UNIVERSIDAD MICHOACANA DE
SAN NICOLAS DE HIDALGO
Facultad de Ingeniería Eléctrica

Laboratorio de Procesamiento Digital de Señales

PRÁCTICA 5

"Filtros Digitales I"

Objetivo:

Usando funciones de transferencia, crear filtros pasa-bajas, pasa-altas, pasa-banda y rechaza-banda. Aplicarlos a señales de prueba y de audio. Caracterizarlos usando su respuesta en frecuencia.

Prerrequisitos

Investigar el uso de las siguientes funciones y herramientas de Matlab:

- Funciones de graficación
    - Stem, semilogx, semilogy
- Cálculo simbólico
    - Sym, symz, poly2sym, expand
- Funciones de conversión
    - pol2cart y cart2pol
- Diseño de filtros
    - fdatool

Antecedentes

El término FILTRO hace referencia a cualquier sistema que discrimina uno o varios elementos de lo que pasa a través de él, de acuerdo a los atributos de dichos elementos. En particular, un filtro electrónico es un elemento que discrimina una determinada frecuencia o gama de frecuencias de una señal eléctrica que pasa a través de él, pudiendo modificar tanto su amplitud como su fase. Los modelos de un filtro electrónico, pueden ser implementados usando tecnología digital, obteniendo los comúnmente llamados Filtros Digitales. En general, cualquier algoritmo o sistema de tratamiento de señal, puede interpretarse como un filtro, sin embargo en nuestro caso, entenderemos por filtro, aquel sistema lineal e invariante en el tiempo, que permite el paso de las componentes de la señal existentes en un determinado intervalo frecuencial, y elimina las demás. Los filtros digitales, tiene como entrada una secuencia discreta y como salida otra secuencia discreta, que habrá experimentado ciertas variaciones en amplitud y/o fase dependiendo del filtro empleado.

La naturaleza de esta acción de filtrado, está determinada por la respuesta en frecuencia $H(\omega)$, que a su vez depende de la elección de los parámetros del sistema (los coeficientes $\{a_k\}$ y $\{b_k\}$ de la ecuación de diferencias que caracteriza el sistema). Por tanto, seleccionando adecuadamente los coeficientes, se pueden diseñar filtros selectivos de frecuencia que dejan pasar señales con componentes de frecuencia en determinadas bandas mientras que atenúan señales que contienen frecuencias en otras bandas.

El comportamiento de un filtro puede ser representado e interpretado observando su gráfica de respuesta a la frecuencia. En dicha gráfica se puede apreciar la *Banda de Paso*, que es el margen de frecuencias que se conservan al paso de la señal por el filtro, y cuyo módulo de respuesta frecuencial toma un valor constante (habitualmente la unidad); en el intervalo de frecuencias complementario, denominado *Banda Atenuada* o Banda de Atenuación, el módulo de la respuesta a la frecuencia es idealmente nulo; cuando el margen frecuencial está fragmentado en varios intervalos, cada uno de éstos recibe el nombre de banda de paso o atenuada según sea el comportamiento deseado.

Los cuatro filtros básicos de respuesta ideal del comportamiento del módulo de la respuesta a la frecuencia, se muestran en la Figura 1. Según sea la posición relativa de las bandas de paso y bandas atenuadas, el filtro recibe el nombre de Pasa-bajas, Pasa-altas, Pasa-banda, y Rechaza-banda. El primero es transparente para las bajas frecuencias y elimina las altas; el filtro Pasa-Altas presenta el comportamiento contrario, es decir elimina las bajas frecuencias y permite el paso de las frecuencias altas. Un filtro Pasa-Banda elimina las bajas y las altas frecuencias (bandas atenuadas inferior y superior), y conserva una banda determinada de frecuencias; el último, presenta bandas de paso en baja y alta frecuencia, y una banda atenuada en un margen de frecuencias intermedio.

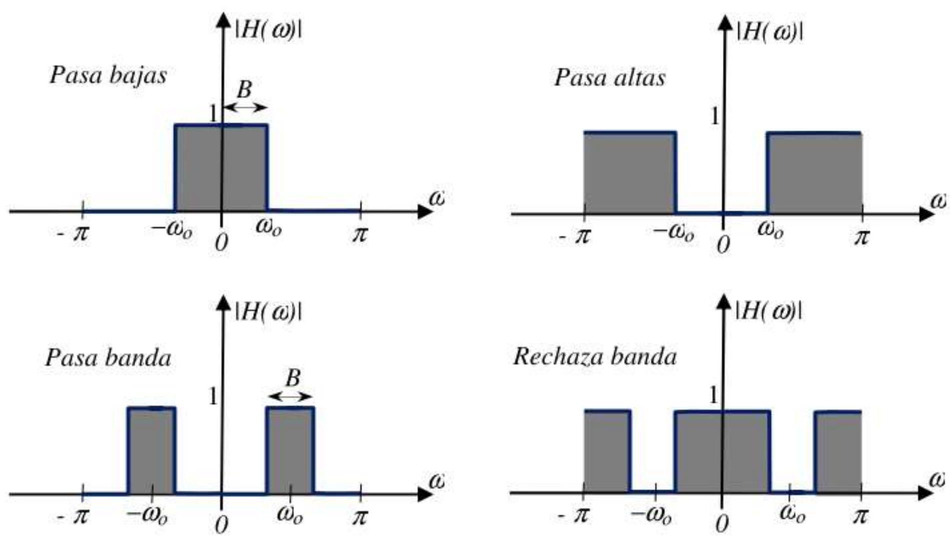

Figura 1 Módulos ideales de respuestas en frecuencia de los 4 tipos de filtros básicos.

Diseño de Filtros por Ubicación de Polos y Ceros

Una forma sencilla de diseñar filtros digitales consiste en usar la interpretación geométrica de la respuesta en frecuencia según la ubicación de Polos y Ceros en el plano

Z, al ubicar uno o más de éstos en el lugar adecuado, y obtener la respuesta de su módulo como una función de transferencia formada como el producto de polos y ceros como se muestra en la siguiente expresión:

$$|H(z)| = \frac{\left|\prod_{k=1}^{M}(z-p_k)\right|}{\left|\prod_{k=1}^{N}(z-q_k)\right|} \qquad (1)$$

Para calcular la respuesta en frecuencia de un filtro, se analiza el comportamiento del mismo ante la entrada de señales senoidales.

El método de diseño se puede resumir en las siguientes reglas y condiciones a cumplir:

i.- Colocar los polos dentro del círculo unitario cercano a los puntos correspondientes a las frecuencias que se desean amplificar.

ii.- Todos los polos deberán ser colocados dentro del círculo unitario para que el filtro sea estable.

iii.- Colocar uno o más ceros en los puntos del círculo unitario correspondientes a las frecuencias que se desean atenuar.

iv.- Los ceros pueden colocarse en cualquier lugar del plano Z, sin embargo en muchos casos por simplicidad, convendrá ponerlos sobre el perímetro del círculo unitario.

v.- Todos los polos y ceros complejos deberán elegirse en pares conjugados para lograr que el filtro tenga coeficientes reales.

Ejemplo

Diseñar un filtro Pasa-bajas de segundo orden cuya frecuencia de corte sea de aproximadamente 150 Hz, el cual se usará para filtrar señales muestreadas a una Fs = 1000 Hz

Solución

Dado que es un filtro Pasa-bajas, se desea que las frecuencias por debajo de la frecuencia de corte (150 Hz) puedan pasar a través del filtro, y las frecuencias superiores a fc sean atenuadas (o eliminadas); se colocarán un par de polos conjugados (para cumplir el inciso "v") dentro del círculo unitario (inciso ii) cerca de la frecuencia de corte (inciso "i") pero por debajo de esta. Esto con el fin de asegurar las frecuencias por debajo de fc sean amplificadas. Posteriormente se procederá a ubicar al menos un cero cerca del lugar que queremos eliminar (inciso iii), en este caso las frecuencias más altas que pueden ser reconstruidas tomando en cuenta Fs y que están representadas por π. El diagrama queda como se muestra en la Figura 2

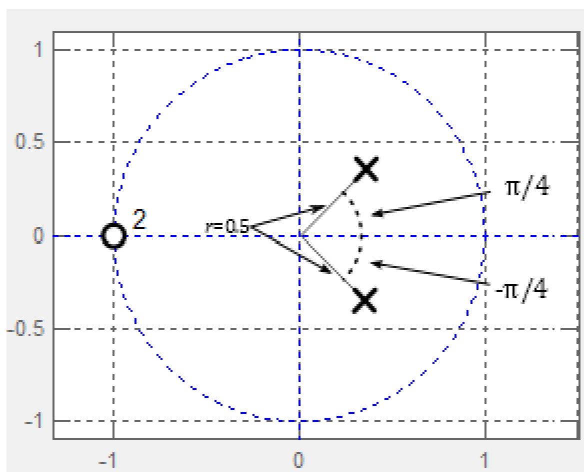

Figura 2: Diagrama de polos y ceros de un filtro pasabajas.

De la ecuación (1), y de la ubicación de los polos y ceros de la Figura 2, (ayudándonos de la función "pol2cart"[1] para convertir de coordenadas polares a rectangulares) obtenemos:

$$H(z) = \frac{(z+1)(z+1)}{(z-(0.3536+j0.3536))(z-(0.3536-j0.3536))} = \frac{z^2+2Z+1}{z^2-0.7071Z+0.25}$$

[1] Consultar ayuda de Matlab

Multiplicando numerador y denominador por z^{-2}

$$H(z) = \frac{z^2 + 2Z + 1}{z^2 - 0.7071Z + 0.25} \cdot \frac{z^{-2}}{z^{-2}}$$

$$H(z) = \frac{z^{-2}+2z^{-1}+1}{0.25z^{-2}-0.7071z^{-1}+1} \tag{2}$$

Por otra parte, recordemos que una ecuación de diferencias finitas con coeficientes constantes que modela un sistema, responde a la ecuación:

$$\sum_{k=0}^{N} a_k y[n-k] = \sum_{k=0}^{M} b_k x[n-k] \tag{3}$$

Si se aplica a la entrada del sistema en reposo una secuencia exponencial $x[n] = z^n$, la salida es proporcional a la misma exponencial

$$y[n] = H(z)z^n$$

Siempre que $H[z]$ exista, se puede sustituir $y[\mathrm{n}]$ y $x[\mathrm{n}]$ en la ecuación (3)

$$\sum_{k=0}^{N} a_k H(z) z^{n-k} = \sum_{k=0}^{M} b_k z^{n-k}$$

simplificando z^n en ambos lados de la igualdad y despejando $H(z)$, se obtiene:

$$H(z) = \frac{\sum_{k=0}^{M} b_k z^{-k}}{\sum_{k=0}^{N} a_k z^{-k}} \tag{4}$$

Al comparar la ecuación (2) con la expresión anterior, claramente se ve que los coeficientes del numerador (b_k) son: 1, 2 1, mientras que los del denominador (a_k) son:

0.25, -0.7071, 1. Con dichos coeficientes, se esta en posibilidad de implementar la ecuación de diferencias del filtro tal y como lo indica la ecuación (3).

Para obtener la gráfica de la magnitud podemos usar la función de Matlab "freqz"[2] obteniendo:

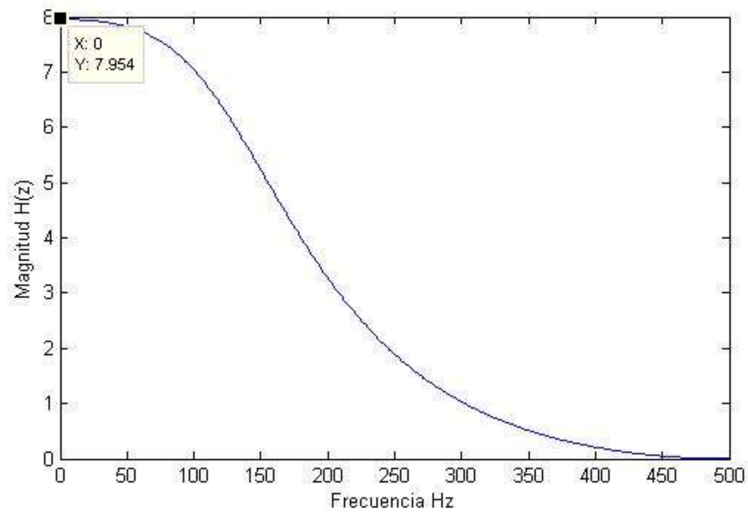

Figura 3: Magnitud de la respuesta en frecuencia del filtro.

La Figura 3 muestra claramente que aunque el comportamiento de la respuesta en frecuencia es el que se busca, la ganancia en la banda de paso excede en mucho la ganancia unitaria deseada. Este problema puede ser fácilmente corregido aplicando una ganancia constante a la salida del sistema; el valor de dicha ganancia puede deducirse fácilmente obteniendo el recíproco del valor máximo de la ganancia en la banda de paso de la respuesta en frecuencia; en este caso $g = 1/7.954$ = 0.12572. Aplicando esta ganancia a la salida del sistema se obtiene la respuesta deseada.

[2] Consultar ayuda de Matlab

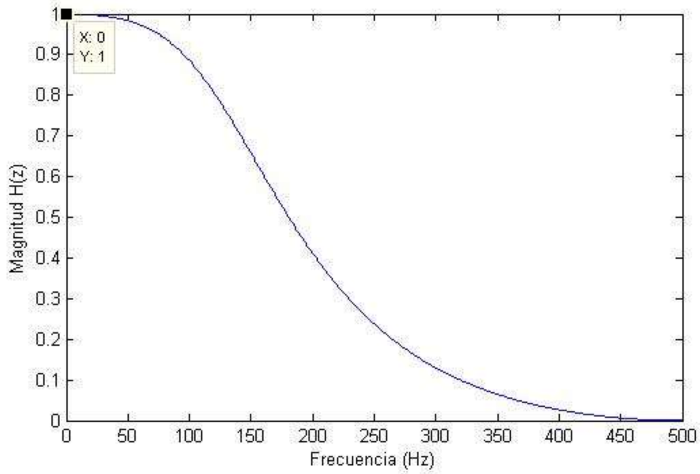

Figura 4: Respuesta en frecuencia con factor de corrección de ganancia

Desarrollo

1.- Obtenga 5 segundos de una secuencia de audio, de preferencia elija algún audio con música y voz.

2.- Obtenga el espectro de frecuencias de algunos cuadros de tamaño N, para identificar el ancho de banda del audio analizado. Elija N lo suficientemente grande para tener una resolución de frecuencia aceptable.

3.- Diseñe un filtro pasa-bajas cuya frecuencia de corte este aproximadamente a la mitad de la banda del audio.

4.- Aplique el filtro a la señal de audio, y escuche el efecto obtenido. Anote sus observaciones.

5.- Repita el paso 3 y 4 para un filtro pasa-altas, con las mismas características (frecuencia de corte a la mitad de la banda).

6.- La voz humana tiene un ancho de banda que va aproximadamente de los 300 Hz a los 3 KHz (en telefonía fija normalmente se utilizan 3.8kHz de ancho de banda). Diseñe un filtro rechaza-banda de tal manera que simule el funcionamiento de un karaoke, es decir que atenúe las frecuencias de la voz (no necesariamente deben ser eliminadas), y permita el paso de las frecuencias correspondientes a la música. Ajuste los filtros de ser necesario hasta lograr el mejor resultado posible.

7.- Diseñe un filtro pasa-banda que permita el paso de la voz, y rechace el resto de los componentes de frecuencia (atenúe la música). Ajuste el filtro hasta obtener el mejor resultado posible.

Reportar

- Diagramas de polos y ceros para cada filtro diseñado.
- Respuesta en frecuencia de cada filtro diseñado.
- Código implementado.
- Observaciones y comentarios.
- Conclusiones.