Matemáticas básicas: de lo intuitivo y concreto a lo abstracto

Segunda edición

Leonardo Romero Muñoz y Moisés García Villanueva

UNA VISIÓN INTEGRAL DE LOS CONCEPTOS FUNDAMENTALES QUE SE ABORDAN DESDE LA PRIMARIA HASTA EL INICIO EN LA UNIVERSIDAD

amexcomp

ACADEMIA MEXICANA DE COMPUTACIÓN, A.C.

Matemáticas básicas:
de lo intuitivo y concreto a lo abstracto
Segunda edición

Leonardo Romero Muñoz y Moisés García Villanueva

Matemáticas básicas: de lo intuitivo y concreto a lo abstracto.
Autores: Leonardo Romero Muñoz y Moisés García Villanueva.

Segunda edición, 25 de marzo de 2022, Cd. de México, México.
Editorial: Academia Mexicana de Computación, A.C. (978-607-98941)

ISBN: 978-607-98941-5-3

Revisión técnica: Luis Enrique Sucar Succar.
Cuidado de la edición: Luis Enrique Sucar Succar.

Impreso en México.
Printed in Mexico.

Agradecimientos

Agradecemos a la Academia Mexicana de Computación, en especial al Dr. Luis Enrique Sucar Succar y al Dr. Christian Lemaître León por la revisión técnica de la primera edición de este libro y por sus valiosos comentarios y sugerencias para mejorarlo.

Agradecemos al Dr. Luis Enrique Sucar Succar la revisión técnica de la segunda edición de este libro. Agradecemos también las observaciones y sugerencias del Dr. Luis Eduardo Gamboa Guzmán y el Ing. Diego Leonel García Tinajero.

También agradecemos a la Universidad Michoacana de San Nicolás de Hidalgo, por la oportunidad de impartir cursos de matemáticas en la Facultad de Ingeniería Eléctrica y darnos el tiempo para elaborar este libro.

Finalmente agradecemos al Instituto de Ciencia, Tecnología e Innovación del Estado de Michoacán, por su valioso apoyo para la difusión de este libro en Instituciones Educativas, a través del Programa de Fortalecimiento Científico, Tecnológico y de Innovación, con Pertinencia Social, para el Estado de Michoacán.

Prefacio a la segunda edición

En esta segunda edición se corrigen algunos errores de redacción de la primera edición y se agregan cinco capítulos nuevos:

- Sistemas de ecuaciones lineales. Se abordan las operaciones elementales sobre ecuaciones y su aplicación en la solución de sistemas de ecuaciones. Se consideran los casos de cero, una y múltiples soluciones de sistemas de ecuaciones.
- Conceptos básicos de matrices. El capítulo introduce al lector en el uso de las matrices y su aplicación en la solución de sistemas de m ecuaciones lineales con n variables, considerando los casos: $m = n$ y $m > n$. Cuando $m = n$ se utiliza la inversa de una matriz y cuando $m > n$ se utiliza la pseudoinversa de una matriz. Al final del libro se incluye un apéndice que revisa la pseudoinversa de una matriz.
- Polinomios. Se abordan ejemplos de polinomios de varios grados, analizando su comportamiento extremo. Se aborda el problema de determinar un polinomio a partir de puntos por dónde pasa, resolviendo en el camino sistemas de ecuaciones lineales. Se abordan las operaciones con polinomios: suma, resta, multiplicación y división. Al final se revisan algunos teoremas importantes acerca de polinomios y su aplicación en la factorización de un polinomio a partir de sus raíces. Se incluye un apéndice de la técnica de fracciones parciales.
- Desigualdades. Se abordan los tipos de desigualdades, sus propiedades, la notación de intervalos de números reales y la solución de desigualdades con una variable. Se incluye la solución de desigualdades que contienen polinomios, división de polinomios y la función de valor absoluto.
- Una evaluación de los temas anteriores, incluyendo, como un apéndice, la solución detallada de los ejercicios propuestos.

Estos temas normalmente son cubiertos en los cursos de matemáticas en el bachillerato o en un primer curso de álgebra superior en la licenciatura. Al igual que en la primera edición, en los capítulos nuevos se utiliza la herramienta libre Octave para la solución de sistemas de ecuaciones y en la graficación de polinomios y desigualdades.

Esperamos que el lector encuentre en esta segunda edición las herramientas suficientes para continuar sus estudios de matemáticas, en cursos como: cálculo diferencial e integral, álgebra lineal o física.

Este libro se puede descargar gratuitamente de la página de Internet de la Academia Mexicana de Computación: `https://amexcomp.mx/`, en la sección de libros; y también de la página de la Universidad Michoacana: `http://dep.fie.umich.mx/~lromero/libros/`. Las sugerencias, observaciones, errores detectados o comentarios son bienvenidos en las direcciones de correo electrónico de los autores: leonardo.romero@umich.mx y moises.garcia@umich.mx.

Dr. Leonardo Romero Muñoz, M.C. Moisés García Villanueva
25 de marzo de 2022, Morelia, Michoacán, México.

Prefacio

Este libro aborda las matemáticas presentando los conceptos y operaciones básicas desde un punto de vista divertido, intuitivo y concreto, basado en un enfoque de solución de problemas; para gradualmente pasar a las construcciones más complejas y abstractas.

Está escrito de forma que pueda ser utilizado como un material de referencia por estudiantes y profesores de primaria, secundaria o preparatoria; o bien como un material de apoyo para un primer curso de Álgebra Superior en los estudios de licenciatura.

Este libro es fruto de las experiencias de los autores al impartir cursos de Álgebra Superior en el primer semestre de las licenciaturas que ofrece la Facultad de Ingeniería Eléctrica de la Universidad Michoacana de San Nicolás de Hidalgo, en Morelia Michoacán. En muchas ocasiones los estudiantes de nuevo ingreso no tienen la suficiente claridad en temas básicos de matemáticas como por ejemplo: la notación decimal, las operaciones elementales, las fracciones, las propiedades de la igualdad, etc. Este libro nace como material de apoyo para estos estudiantes.

Motivación para escribir este libro

Creemos que un enorme error, en la enseñanza de las matemáticas, se genera al reducir las matemáticas a un conjunto de fórmulas y procedimientos desarticulados, sin conocer cómo se llega a ellos. Tarde o temprano es tal la cantidad de fórmulas y procedimientos, que se olvidan o se confunden y los estudiantes no tienen forma de detectar cuando cometen errores. Los errores también aparecen en algunos libros de álgebra, cuando están llenos de fórmulas desprovistas del contexto en el que se generan. Por ejemplo, se dice que para despejar una variable en una ecuación se deben seguir las reglas siguientes:

- Si algo está sumando, pasa al otro lado de la igualdad restando.
- Si algo está restando, pasa al otro lado de la igualdad sumando.
- Si algo está multiplicando, pasa al otro lado de la igualdad dividiendo.
- Si algo está dividiendo, pasa al otro lado de la igualdad multiplicando.

Utilizar estas reglas, en lugar de las propiedades de la igualdad, conduce frecuentemente a errores y, más grave aún, a la pérdida de la confianza en las operaciones que el estudiante está realizando. Las matemáticas resultan atractivas cuando se entienden, y los conceptos se pueden imaginar y visualizar. De esta manera se puede construir sobre seguro, con la certeza de las operaciones que se realizan.

Hace muchos años, en una conferencia acerca de la enseñanza de las matemáticas, impartida en el Colegio Primitivo y Nacional de San Nicolás de Hidalgo en Morelia Mich., el conferencista destacaba la necesidad de *degustar* las matemáticas, tal como se degusta una buena comida. Debe ser nutritiva, con buena presentación, olor y sabor. Esta clase de comida se genera cuando el estudiante *descubre*, entiende y aplica el sentido de las estructuras matemáticas. Por el contrario, recibir una enorme cantidad de fórmulas y procedimientos sin sentido para él, sería el equivalente a recibir una *comida predigerida* sin sabor u olor atractivo; terminando por aborrecer la comida y comer por necesidad. Esta analogía es muy útil para desarrollar el gusto por las matemáticas en los estudiantes.

Aunque suena extremo, percibimos que así es la realidad en México. Hay muchísimos estudiantes que aborrecen las matemáticas porque nunca las *saborearon*, en la primaria, secundaria o preparatoria; y solamente aprendieron fórmulas y procedimientos para pasar exámenes y aprobar los cursos.

Esto también explica la saturación de carreras universitarias que no llevan muchas matemáticas y, por el contrario, la poca demanda de carreras cuyo fundamento son las matemáticas.

Si los lectores encuentran útil este libro, para *descubrir* el sentido de las matemáticas o despejar algunas dudas básicas que tenían; el tiempo y los esfuerzos dedicados en su elaboración habrán tenido sentido.

Organización del libro

El libro contiene tres partes:

- Aritmética.

  El capítulo 1 se dedica a presentar los números naturales y la operación de suma de números enteros. Se introducen los números positivos utilizando la figura de cilindros y los números negativos utilizando la figura de huecos en un tablero. Con estos elementos es muy sencillo definir la operación de suma y sus propiedades.

  El capítulo 2 se dedica a presentar la operación de resta como una suma, aprovechando el concepto de inverso aditivo definido en el capítulo anterior.

  El capítulo 3 aborda la multiplicación como una suma repetida y también la potencia como una multiplicación repetida. También se desarrolla la notación decimal de números enteros.

  El capítulo 4 introduce la división como una producto que involucra a los números fraccionarios. En este capítulo se concluye la notación decimal completa.

  El capítulo 5 se dedica a los algoritmos de las operaciones básicas: suma, resta, multiplicación y división; enfatizando los fundamentos detrás de los algoritmos compactos que se aprenden comúnmente en los estudios de primaria.

  El capítulo 6 presenta al lector un ejercicio de evaluación de los capítulos anteriores.

- Álgebra y geometría.

  El capítulo 7 presenta los conceptos geométricos básicos: puntos y rectas en el plano cartesiano, ángulos, el cuadrado, rectángulo, etc.

  El capítulo 8 introduce las ecuaciones, un tema fundamental del álgebra.

  El capítulo 9 introduce las funciones trigonométricas y su aplicación en la solución de problemas.

  El capítulo 10 aborda las funciones exponencial y logarítmica.

  Finalmente el capítulo 11 presenta al lector un ejercicio de evaluación de los capítulos anteriores.

- Temas avanzados: lógica, conjuntos y números complejos.

  El capítulo 12 aborda la lógica y su aplicación para la definición de las operaciones sobre conjuntos.

  El capítulo 13 aborda los números complejos, sus operaciones y algunas de sus aplicaciones.

  El capítulo 14 presenta al lector un ejercicio de evaluación final de estos temas.

Podríamos decir que la primera parte corresponde a temas cubiertos en los estudios de primaria, la segunda al nivel de secundaria y la tercera al nivel de preparatoria.

Al final del libro, el apéndice A presenta la herramienta de software libre Octave como apoyo para realizar operaciones y gráficas. Octave es una herramienta muy versátil y poderosa que se utiliza para realizar cálculos matemáticos simples y complejos en ingeniería.

Los apéndices B, C y D contienen las soluciones detalladas de las tres evaluaciones propuestas.
Finalmente el apéndice E contiene las soluciones a los ejercicios impares propuestos.

Comentarios finales

Las sugerencias, observaciones, errores detectados o comentarios son bienvenidos en las direcciones de correo electrónico leonardo.romero@umich.mx y moises.garcia@umich.mx.

Dr. Leonardo Romero Muñoz, M.C. Moisés García Villanueva
15 de Septiembre de 2020, Morelia, Michoacán, México.

Índice general

Índice de figuras XVII

Índice de tablas XX

1. Los números enteros y la suma 1

1.1. Los números enteros positivos del 1 al 9 . . . 1
1.2. El número 0 . . . 1
1.3. Los números negativos . . . 2
1.4. Los números enteros . . . 2
1.5. Suma de números enteros . . . 3
1.6. La igualdad de dos números . . . 3
1.7. De vuelta a la suma de enteros . . . 4
1.8. El 0 como sumando . . . 5
1.9. Sumando enteros positivos y negativos . . . 5
1.10. Inversos aditivos . . . 6
1.11. Utilizando letras como números no determinados . . . 7
1.12. Orden en los números enteros . . . 7
1.13. Propiedades de la suma . . . 8
1.14. Ejercicios propuestos . . . 9

2. La resta como una suma 11

2.1. Resta de dos enteros como una suma . . . 11
2.2. La resta como un inverso aditivo . . . 12
2.3. Sumas de tres o más números . . . 14
2.4. Sumas de tres o más números que tienen "-" . . . 14
2.5. Valor absoluto de un número entero . . . 15
2.6. Ejercicios propuestos . . . 16

3. La multiplicación y la potencia 17

3.1. La multiplicación como una suma repetida . . . 17
3.2. El número 10 . . . 18
3.3. Los números del 0 al 19 . . . 18
3.4. Los números del 20 al 99 . . . 19
3.5. La multiplicación por 1 . . . 20
3.6. La multiplicación por 0 . . . 21
3.7. La multiplicación de un número positivo por uno negativo . . . 21
3.8. La multiplicación de dos números negativos . . . 22

3.9. Propiedades de la multiplicación . . . 22
3.10. Potencia de un número . . . 26
3.11. Simplificando la escritura de expresiones con productos y sumas . . . 27
3.12. Números enteros mayores de 99 . . . 29
3.13. Ejercicios propuestos . . . 30

4. Números fraccionarios y la división **31**
4.1. Las fracciones . . . 31
4.2. Suma y resta de fracciones con igual denominador . . . 34
4.3. Multiplicación de fracciones . . . 34
4.3.1. Multiplicación de un entero mayor de uno por una fracción . . . 35
4.3.2. Multiplicación de fracciones con numerador unitario . . . 35
4.3.3. Multiplicación de una fracción por otra fracción . . . 35
4.3.4. Efecto de multiplicar un número por una fracción . . . 36
4.3.5. Los porcentajes y las fracciones . . . 37
4.4. Fracciones equivalentes . . . 37
4.5. Suma de fracciones con diferente denominador . . . 38
4.6. Comparación de fracciones . . . 39
4.7. Las fracciones y la división . . . 39
4.7.1. Otra interpretación de la división . . . 40
4.7.2. La división . . . 40
4.7.3. Inverso multiplicativo . . . 42
4.7.4. Las divisiones como productos . . . 43
4.7.5. División con números positivos y negativos . . . 43
4.8. Potencias negativas y fraccionarias . . . 46
4.8.1. Potencias negativas . . . 46
4.8.2. Raíces . . . 46
4.8.3. Productos y divisiones de potencias . . . 47
4.8.4. Potencias de productos y fracciones . . . 48
4.9. La notación decimal . . . 49
4.9.1. Multiplicación de números decimales por potencias de 10 . . . 50
4.10. La recta numérica . . . 52
4.11. Ejercicios propuestos . . . 52

5. Algoritmos de las operaciones básicas **55**
5.1. La notación decimal . . . 55
5.2. La suma . . . 55
5.2.1. Ejemplo: $123 + 234$ . . . 56
5.2.2. Ejemplo: $123 + 238$ . . . 56
5.2.3. Ejemplo: suma de tres números. . . . 57
5.2.4. Suma de números negativos. . . . 57
5.2.5. Suma de números con decimales. . . . 57
5.3. La resta . . . 58
5.3.1. Ejemplo: $895 - 234$ . . . 58
5.3.2. Ejemplo: $895 - 238$ . . . 59
5.3.3. Ejemplo: $805 - 238$ . . . 60
5.3.4. Caso del sustraendo mayor que el minuendo. . . . 61

5.3.5. Resta de números con decimales. . . . 61
5.4. La multiplicación 61
5.4.1. Ejemplo: $123 * 3$ 62
5.4.2. Ejemplo: $123 * 4$ 62
5.4.3. Ejemplo: $123 * 30$ 63
5.4.4. Ejemplo: $123 * 34$ 64
5.4.5. Ejemplo: $123 * 834$ 64
5.4.6. Multiplicación con números decimales 65
5.5. La división 66
5.5.1. Ejemplo: $5/3$ 66
5.5.2. Ejemplo: $44/3$ 67
5.5.3. Ejemplo: $24/3$ 69
5.5.4. Ejemplo: $2424/3$ 70
5.5.5. Ejemplo: $8765/12$ 70
5.5.6. División con números decimales 72
5.6. Ejercicios propuestos. 72

6. Evaluación 1 **75**

7. Conceptos geométricos básicos **77**
7.1. El plano cartesiano 77
7.2. Puntos en el plano 77
7.3. Segmentos de recta y líneas rectas 78
7.3.1. Líneas rectas 78
7.4. Ángulo entre dos segmentos de recta 78
7.5. Dos rectas en el plano 80
7.5.1. Rectas secantes 80
7.5.2. Rectas paralelas 80
7.5.3. Rectas coincidentes 80
7.6. El cuadrado 81
7.7. El rectángulo 82
7.8. El triángulo rectángulo 83
7.8.1. Teorema de Pitágoras 84
7.8.2. Distancia entre dos puntos 86
7.9. Tipos de triángulos 87
7.9.1. Suma de ángulos interiores de un triángulo 87
7.9.2. Área de un triángulo 88
7.10. El paralelogramo 90
7.11. Polígonos regulares 91
7.12. El círculo 92
7.13. Desplazamientos angulares en radianes y longitud de arco 93
7.13.1. Grados y radianes 94
7.14. Figuras en tres dimensiones 95
7.14.1. El cubo 96
7.14.2. El ortoedro 97
7.14.3. El cilindro 98
7.15. Los números representan muchas cosas 99

7.15.1. Los números representan longitudes, áreas y volúmenes . . . 99
7.15.2. Los números representan tiempo . . . 100
7.15.3. Los números representan cantidad de masa . . . 100
7.15.4. Conversiones de unidades . . . 101
7.16. Ejercicios propuestos . . . 103

8. Las ecuaciones 105
8.1. Identidades y ecuaciones . . . 106
8.2. Propiedades de la igualdad . . . 106
8.3. Resolviendo ecuaciones de primer grado . . . 108
8.4. Monomios y polinomios . . . 109
8.5. Productos notables . . . 109
8.6. Ecuaciones de segundo grado . . . 111
8.6.1. Fórmula general para encontrar las raíces de una ecuación cuadrática . . . 112
8.7. Factorización de un polinomio de segundo orden . . . 113
8.7.1. Ejemplos de factorización de un polinomio cuadrático . . . 115
8.8. Ecuaciones de primer grado con dos variables . . . 116
8.8.1. El sensor de un robot . . . 116
8.8.2. Ecuación de una línea recta . . . 117
8.8.3. Concepto de función . . . 119
8.8.4. Solución de un sistema de ecuaciones para obtener la línea . . . 122
8.8.5. Solución del problema del sensor del robot . . . 123
8.9. Problemas de variación proporcional directa . . . 124
8.10. Problemas de variación proporcional inversa . . . 126
8.11. Ejercicios propuestos . . . 127

9. Trigonometría 129
9.1. Triángulos rectángulos . . . 129
9.2. Funciones trigonométricas . . . 130
9.2.1. Revisión de la pendiente de una recta . . . 130
9.2.2. La función seno, coseno y tangente . . . 131
9.2.3. Funciones seno, coseno y tangente de 0, 30, 45, 60 y 90 grados . . . 134
9.2.4. Las funciones cotangente, secante y cosecante . . . 137
9.2.5. Funciones trigonométricas inversas . . . 137
9.3. Relaciones trigonométricas . . . 138
9.3.1. Relaciones Pitagóricas . . . 138
9.3.2. Relaciones de las funciones seno y coseno . . . 139
9.3.3. Relaciones de la tangente . . . 140
9.3.4. Funciones seno y coseno de una suma de ángulos . . . 140
9.4. Aplicando la trigonometría . . . 143
9.4.1. Determinar la altura de un edificio de forma indirecta . . . 143
9.4.2. Cálculo de una circunferencia que pasa por los vértices de un triángulo . . . 145
9.5. Funciones trigonométricas en Octave . . . 152
9.6. Ejercicios propuestos . . . 153

10. Las funciones exponencial y logarítmica 155
10.1. El número e . . . 155

10.2. La función exponencial . . . 156
10.2.1. Aplicaciones de la función exponencial . . . 157
10.3. La función logaritmo . . . 159
10.3.1. Convertir logaritmos de una base a otra . . . 161
10.4. Usando Octave . . . 163
10.5. Aplicaciones de la función logaritmo . . . 163
10.5.1. Aplicación en el crecimiento de una población . . . 164
10.5.2. Aplicación en acústica . . . 165
10.6. Ejercicios propuestos . . . 166

11. Evaluación 2 **169**

12. Lógica y conjuntos **171**
12.1. Lógica proposicional . . . 171
12.1.1. Proposiciones lógicas . . . 171
12.1.2. Operaciones lógicas . . . 172
12.1.3. Ejemplos de expresiones lógicas . . . 174
12.1.4. Propiedades de las operaciones lógicas . . . 175
12.2. Conjuntos . . . 177
12.2.1. Operaciones sobre conjuntos . . . 179
12.3. Lógica de predicados . . . 182
12.3.1. Expresiones lógicas cuantificadas . . . 183
12.4. Operaciones adicionales de conjuntos . . . 187
12.4.1. Subconjunto . . . 188
12.4.2. Igualdad de conjuntos . . . 189
12.4.3. Subconjunto propio . . . 190
12.4.4. Conjunto potencia . . . 190
12.5. Propiedades de las operaciones sobre conjuntos . . . 190
12.6. Producto cartesiano . . . 192
12.7. Funciones . . . 193
12.8. Ejercicios propuestos . . . 196

13. Números complejos **201**
13.1. Motivación para la invención de los números complejos . . . 201
13.2. Los números imaginarios . . . 202
13.3. Los números complejos . . . 204
13.3.1. Igualdad de números complejos . . . 205
13.3.2. Representación de un número complejo como vector . . . 205
13.4. Suma de números complejos . . . 209
13.5. Producto de un número real por un número complejo . . . 210
13.6. Resta de números complejos . . . 212
13.7. Representación de un número complejo usando un vector unitario . . . 212
13.8. Producto de un número complejo por otro número complejo . . . 213
13.9. Números complejos conjugados . . . 215
13.10División de números complejos . . . 217
13.10.1.Inverso multiplicativo de un número complejo . . . 220
13.10.2.La división como una multiplicación . . . 220

13.11 Potencias de números complejos . . . 220
13.12 Raíces de números complejos . . . 223
13.13 Aplicaciones de los números complejos . . . 226
13.13.1. Aplicación en geometría . . . 226
13.13.2. Solución general de ecuaciones cuadráticas . . . 227
13.14 Ejercicios propuestos . . . 228

14. Evaluación 3 **231**

15. Sistemas de ecuaciones lineales **233**
15.1. Operaciones elementales para resolver sistemas de ecuaciones . . . 234
15.2. Sistemas de ecuaciones con igual número de ecuaciones y variables . . . 235
15.2.1. Caso de una solución única . . . 235
15.2.2. Caso sin solución . . . 240
15.2.3. Caso con infinidad de soluciones . . . 242
15.3. Método de Gauss-Jordan para resolver sistemas de ecuaciones . . . 245
15.3.1. Ejemplo: sistema de ecuaciones con números reales . . . 247
15.3.2. Ejemplo: sistema de ecuaciones con números complejos . . . 250
15.4. Sistemas de ecuaciones con menos ecuaciones que variables . . . 251
15.4.1. Caso de infinitas soluciones . . . 252
15.4.2. Caso de no existencia de soluciones . . . 253
15.5. Sistemas de ecuaciones lineales homogéneas . . . 253
15.6. Comentarios finales . . . 254
15.7. Ejercicios . . . 255

16. Conceptos básicos de matrices **257**
16.1. Definición de una matriz . . . 257
16.2. Igualdad de matrices . . . 258
16.3. Matrices especiales . . . 258
16.4. Operaciones sobre matrices . . . 259
16.4.1. Suma y resta de matrices . . . 260
16.4.2. Multiplicación de un escalar por una matriz . . . 260
16.4.3. Multiplicación de un vector renglón por un vector columna . . . 261
16.4.4. Multiplicación de matrices . . . 262
16.4.5. Modelando un sistema de ecuaciones lineales con matrices . . . 264
16.5. Propiedades de las matrices . . . 264
16.6. Inversa de una matriz . . . 266
16.7. Matriz transpuesta . . . 270
16.8. Resolviendo sistemas de ecuaciones usando matrices . . . 271
16.8.1. Sistemas homogéneos . . . 272
16.8.2. La inversa de una matriz de tamaño 2×2 . . . 272
16.8.3. Solución de un sistema de 2 ecuaciones con 2 variables . . . 274
16.8.4. Ejemplo de solución de un sistema de 2 ecuaciones y 2 variables . . . 275
16.8.5. Cálculo de la distancia de un punto a una recta . . . 275
16.9. Sistemas con más ecuaciones lineales que variables . . . 279
16.9.1. Solución mediante la pseudoinversa de una matriz . . . 279
16.9.2. Ejemplo de aplicación de la pseudoinversa . . . 280

16.10. Valores y vectores propios de una matriz . . . 282
16.10.1. Ejemplos de aplicación de valores y vectores propios . . . 285
16.10.2. Cálculo de valores y vectores propios . . . 290
16.11 Ejercicios . . . 292

17. Polinomios **295**
17.1. Ejemplos de polinomios . . . 295
17.1.1. Comportamiento extremo de un polinomio . . . 298
17.2. Determinación de un polinomio a partir de puntos por dónde pasa . . . 300
17.2.1. Polinomio de grado 0 . . . 301
17.2.2. Polinomio de grado 1 . . . 303
17.2.3. Polinomio de grado 2 . . . 306
17.2.4. Polinomios de grado 3 y superiores . . . 312
17.3. Operaciones con polinomios . . . 313
17.3.1. Suma de polinomios . . . 313
17.3.2. Multiplicación de un escalar por un polinomio . . . 314
17.3.3. Resta de polinomios . . . 315
17.3.4. Multiplicación de polinomios . . . 316
17.3.5. División de polinomios . . . 317
17.3.6. Forma simplificada para la división de polinomios . . . 319
17.3.7. División de polinomios en Octave . . . 320
17.4. Teoremas importantes acerca de polinomios . . . 321
17.4.1. Teorema del residuo . . . 321
17.4.2. Teorema del factor . . . 322
17.4.3. Teorema de las n raíces . . . 324
17.4.4. Teoremas sobre las raíces complejas conjugadas . . . 324
17.4.5. Teorema sobre las raíces racionales . . . 327
17.5. Encontrar un polinomio a partir de sus raíces . . . 327
17.6. Fracciones parciales . . . 329
17.7. Ejercicios propuestos . . . 329

18. Desigualdades **333**
18.1. Propiedades de las desigualdades . . . 333
18.2. Notación de intervalos en números reales . . . 337
18.3. Solución de desigualdades en una variable . . . 337
18.3.1. Desigualdades con polinomios . . . 337
18.3.2. Desigualdades que involucran una división de polinomios . . . 340
18.4. Desigualdades con valores absolutos . . . 342
18.4.1. Ejemplo $|x| < 2$ . . . 342
18.4.2. Ejemplo $|x| > a$ . . . 344
18.4.3. Ejemplo $|x - 1| < 5$ . . . 345
18.4.4. Ejemplo $|2x - 1| - |x - 3| - 3 < 0$ . . . 346
18.5. Desigualdades con dos variables . . . 348
18.6. Ejercicios propuestos . . . 349

19. Evaluación 4 **353**

Referencias **355**

A. Aprovechando la tecnología **357**
A.1. Instalación de Octave . . . 357
A.1.1. Utilizando Octave en línea . . . 357
A.1.2. En computadora personal . . . 358
A.2. Primeros pasos en Octave . . . 359
A.2.1. Usando la interfaz de usuario . . . 359
A.2.2. Usando Octave para hacer operaciones numéricas . . . 361
A.2.3. Evaluando expresiones . . . 363
A.2.4. Vectores . . . 363
A.2.5. Vectores con incrementos constantes en sus valores . . . 364
A.2.6. Operaciones elemento a elemento entre vectores . . . 364
A.2.7. Ejemplo de conversión de grados Celsius a Fahrenheit . . . 366
A.3. Graficación básica . . . 367
A.3.1. Gráfica de velocidad contra tiempo . . . 367
A.3.2. Gráfica de un polinomio . . . 368
A.4. Guardando secuencias de comandos en un archivo . . . 370
A.5. Ejercicios . . . 371

B. La Pseudoinversa de una matriz **373**
B.1. Vectores . . . 373
B.1.1. Producto punto de dos vectores . . . 373
B.1.2. Multiplicación de un escalar por un vector . . . 375
B.1.3. Suma de vectores . . . 376
B.1.4. Combinación lineal de vectores . . . 376
B.1.5. Vectores ortogonales . . . 377
B.2. Resolviendo el sistema de ecuaciones con más ecuaciones que variables . . . 377
B.2.1. La matriz Pseudoinversa . . . 379
B.2.2. Criterio de mínimos cuadrados . . . 380

C. Fracciones parciales **381**
C.0.1. Solución general . . . 381
C.0.2. Polinomio $P_m(x)$ con raíces reales distintas . . . 382
C.0.3. Polinomio $P_m(x)$ con raíces reales distintas y un factor cuadrático irreductible . . . 383
C.0.4. Polinomio $P_m(x)$ con raíces reales repetidas . . . 383
C.0.5. Polinomio $P_m(x)$ con factores cuadráticos irreductibles repetidos . . . 384
C.0.6. Cálculo de fracciones parciales en Octave . . . 385
C.1. Ejercicios propuestos . . . 387

D. Respuestas a la Evaluación 1 **389**

E. Respuestas a la Evaluación 2 **395**

F. Respuestas a la Evaluación 3 **405**

G. Respuestas a la Evaluación 4 **411**

H. Respuestas a ejercicios impares **425**

Índice alfabético **433**

Índice de figuras

1.1. Los números 1, 2 y 3. 1
1.2. Los números 4, 5, 6, 7, 8 y 9. 1
1.3. El número 0. 2
1.4. Los números negativos. 2
1.5. La suma de dos números. 3
1.6. La igualdad $1 = 1$. 4
1.7. Suma utilizando el símbolo de igualdad. 4
1.8. Representación de la igualdad: $3 = 3$. 5
1.9. El resultado de sumar el 0 a un número es igual al mismo número. 5
1.10. Sumando enteros positivos y negativos con resultado positivo. 5
1.11. Sumando enteros positivos y negativos con resultado negativo. 6
1.12. Sumando enteros positivos y negativos con resultado 0. 6

3.1. La multiplicación de $3 * 2$. 18
3.2. Verificando que $3 * 2 = 2 * 3$. 18
3.3. El número 10. 18
3.4. Visualización de $2 * (3 * 4) = 4 * (2 * 3)$. 23
3.5. Visualizacion de $2 * (3 + 1) = (2 * 3) + (2 * 1)$. 24

4.1. Dividiendo 3, 2 y 1 cilindro en tres partes iguales. 32
4.2. Otra forma de ver las fracciones $\frac{3}{3}$, $\frac{2}{3}$ y $\frac{1}{3}$. 32
4.3. La recta numérica. 52

7.1. Plano cartesiano. 77
7.2. Un segmento de recta y una recta definida por dos puntos. 78
7.3. Ángulo entre dos segmentos de recta. 79
7.4. Ángulos positivos y negativos expresados en unidades de grado. 79
7.5. Posibles casos de rectas en el plano. 80
7.6. El cuadrado. 81
7.7. El rectángulo. 82
7.8. Formación de un triángulo rectángulo. 83
7.9. Demostración geométrica del Teorema de Pitágoras. 84
7.10. Triángulo rectángulo de lados 3, 4, 5, para ilustrar el Teorema de Pitágoras. 85
7.11. Distancia entre dos puntos $P1$ y $p2$. 86
7.12. Tipos de triángulos: equilatero, isósceles y escaleno. 87
7.13. Un triángulo mostrando la suma de sus ángulos interiores. 88
7.14. Un triángulo visto como dos triángulos rectángulos. 89

7.15. Área de un triangulo que tiene un ángulo mayor de 90 grados. 89
7.16. Un paralelogramo visto como un rectángulo y dos triángulos. 90
7.17. Un octágono. 91
7.18. El círculo. 92
7.19. Concepto de desplazamiento angular. 93
7.20. Ángulo de una vuelta completa. 94
7.21. El cubo. 96
7.22. El ortoedro, un prisma rectangular ortogonal. 98
7.23. El cilindro. 99

8.1. Visualización de la igualdad $3 = 3$ mediante una balanza. 106
8.2. Visualización de la igualdad $x = y$ al sumar 3 a cada lado. 107
8.3. Visualización de la igualdad $3 = 3$ al multiplicar por (-1) a cada lado. 107
8.4. Visualización de la suma de dos igualdades. 108
8.5. Visualización del binomio $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$. 110
8.6. Alfombrando una habitación cuadrada. 111
8.7. Operación de un sensor de distancia. 117
8.8. Líneas en el plano cartesiano. 118
8.9. Una función vista como un bloque de procesamiento con una entrada y una salida. 120
8.10. Una función de dos entradas. 121
8.11. Gráfica de la función $z = x^2 + y^2$. 121
8.12. Variación proporcional directa 124
8.13. La proporción áurea o razón dorada. 128

9.1. Triángulo rectángulo en el plano cartesiano. 129
9.2. Relación de la pendiente con la tangente del ángulo de inclinación. 131
9.3. Coordenadas x, y, para ángulos entre 10 y 350 grados. 132
9.4. Gráfica de la función seno. 133
9.5. Gráfica de la función coseno. 134
9.6. Gráfica de la función tangente. 135
9.7. Triángulos rectángulos de 45 grados y de 60 grados. 136
9.8. Gráficas de la función seno y coseno de 0 a 2π(rad) 139
9.9. Cálculo de [$\sin(\alpha + \beta) = \overline{ED}$. 141
9.10. Cálculo de [$\cos(\alpha + \beta) = \overline{OE}$. 142
9.11. La altura de un edificio calculada por su sombra. 144
9.12. Circunferencia que toca los vértices de un triángulo. 145
9.13. El punto medio P_m del segmento de recta $\overline{P_1P_2}$. 146
9.14. Lineas perpendiculares L_1 y L_2 147

10.1. Gráfica de la función exponencial. 157
10.2. Densidad de probabilidad Gaussiana. 159
10.3. Gráfica de la función logaritmo natural. 162
10.4. Gráfica de la función $P = (3) * 2^t$. 165

12.1. Compuertas lógicas. 174
12.2. La expresión $(p \wedge q) \wedge r$ implementada con compuertas lógicas AND. 174
12.3. Unión de los conjuntos A y B. 179

12.4. Intersección de los conjuntos A y B. 180
12.5. El conjunto complemento del conjunto A. 181
12.6. El conjunto $A - B$. 182
12.7. El conjunto A es subconjunto del conjunto B. 188
12.8. El conjunto $\emptyset$ es subconjunto del conjunto B. 189
12.9. El producto cartesiano $A \times B$ 193
12.10Ejemplo de función inyectiva 194
12.11Ejemplo de función sobreyectiva 195
12.12Ejemplo de función biyectiva y su inversa. 195

13.1. La recta numérica de números imaginarios. 203
13.2. Los números complejos $z_1 = 3 + 2i$ y $z_2 = 7 + 5i$ en el plano complejo. 204
13.3. El punto $z = (x, y\, i)$ representado en su forma polar como el vector $\mathbf{r} = (r, \theta)$. 206
13.4. Representación grafica de la suma de los números complejos z_1 y z_2. 209
13.5. Los números complejos z, $2z$ y $-z = (-1) * z$. 210
13.6. El producto $z * z = (1 + i) * (1 + i) = 2i$. 215
13.7. El número complejo $z = 1 + i$ y su conjugado $\overline{z} = 1 - i$. 216
13.8. El problema de demostrar que $\gamma + \beta = \alpha$. 226
13.9. El problema equivalente de demostrar que $\theta_3 + \theta_2 = \theta_1$. 226

15.1. Soluciones de un sistema de ecuaciones. 235
15.2. Caso de dos rectas que se cruzan en un punto. 237
15.3. Diferentes interpretaciones para $x = 1$. 240
15.4. Caso de dos rectas paralelas. 241
15.5. Caso de dos rectas coincidentes. 243
15.6. Planos definidos por las ecuaciones. 252

16.1. Distancia del punto P_1 a la línea L_0. 276
16.2. Ajuste de puntos a una línea recta. 281
16.3. Visualización de un vector propio y un valor propio de 2 283

17.1. Ejemplos de polinomios de grado 0 y 1. 296
17.2. Ejemplos de polinomios de grado 2. 297
17.3. Ejemplos de polinomios de grado 3. 297
17.4. Ejemplos de polinomios de grado 4. 298
17.5. Comportamiento extremo de un polinomio. 300
17.6. Encontrando un polinomio de grado 0 a partir de 5 puntos. 303
17.7. Polinomio lineal definido por el ángulo de inclinación y un punto. 306
17.8. Encontrando un polinomio de grado 2 a partir de 3 puntos. 307
17.9. El punto P usando dos sistemas de referencia: (x, y) y (x', y'). 309
17.10Encontrando un polinomio de grado 3 a partir de 4 puntos. 313
17.11Gráfica de un polinomio que tiene tres raíces reales. 324
17.12Gráfica de un polinomio que tiene una raíz real y dos complejas. 326

18.1. Si $(a < b)$ y $(b < c)$ se cumple que $(a < c)$ 334
18.2. Multiplicar por -1 invierte la desigualdad. 336
18.3. Gráfica del polinomio $P(x) = x(x - 2)(x - 4)$. 339
18.4. Gráfica de $\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{x-3}{x(x-2)(x-4)}$. 341

18.5. Gráfica de $\frac{x}{x+1}$. . . . 343
18.6. Gráfica de $|x| - 2$. . . . 344
18.7. Gráfica de $|x - 1| - 5$. . . . 346
18.8. Gráfica de $|2x - 1| - |x - 3| - 3$. . . . 348
18.9. Gráfica de la desigualdad $x + y \leq 1$. . . . 349

A.1. El programa Octave en línea a través de un navegador de Internet. . . . 358
A.2. Icono que representa al programa Octave y que inicia su GUI. . . . 359
A.3. Ventana de la GUI para Octave 360
A.4. Ventana de la CLI de Octave. . . . 361
A.5. Gráfica de velocidad (eje y) contra tiempo (eje x). . . . 368
A.6. Gráfica con título y etiquetas en los ejes. . . . 369
A.7. Gráfica de un polinomio. . . . 370
A.8. Gráfica de un circunferencia de radio de 5 unidades centrada en el origen. . . . 372

B.1. El vector $\mathbf{v}$ representado en su forma polar por (r, θ). . . . 374
B.2. Es el espacio lineal creado como una combinación lineal de $\mathbf{a}_1$ y $\mathbf{a}_2$. . . . 378
B.3. El vector $\mathbf{b}$ no está en el plano solución formado por $\mathbf{a}_1$ y $\mathbf{a}_2$. . . . 379

E.1. Problema de avión que desciende siguiendo una línea recta. . . . 401
E.2. Problema del triángulo con dos lados y un ángulo. . . . 402

F.1. Conjuntos A y B. . . . 407

G.1. Gráfica de la desigualdad del ejercicio 6. . . . 424

H.1. Gráfica del ejercicio 7. . . . 429
H.2. Gráfica del ejercicio 3. . . . 431
H.3. Gráfica del ejercicio 5. . . . 431
H.4. Gráfica del ejercicio 7. . . . 432

Índice de tablas

3.1. Los números del 0 al 19 y las cantidades que representan. 19
3.2. Los números del 20 al 99 y las cantidades que representan. 20
3.3. Los números mayores del 99 y las cantidades que representan. 29

4.1. Fracciones comunes. 34

5.1. Tabla de la suma de dos dígitos. 56
5.2. Tabla de la resta. 58
5.3. Tabla del producto de dos dígitos. 62
5.4. Tabla del producto de 12 por un dígito. 70

9.1. Funciones trigonométricas para algunos ángulos. 137

12.1. Tabla de verdad de la operación de negación lógica. 173
12.2. Tablas de verdad de las operaciones lógicas: disyunción ($\vee$), conjunción ($\wedge$) e implicación ($\rightarrow$). . 173
12.3. Tabla de verdad para demostrar la segunda ley de D'Morgan 176
12.4. Tabla de verdad para demostrar la segunda ley de D'Morgan utilizando 0s y 1s 176
12.5. Tabla de membresía para demostrar la primera ley de D'Morgan. 192

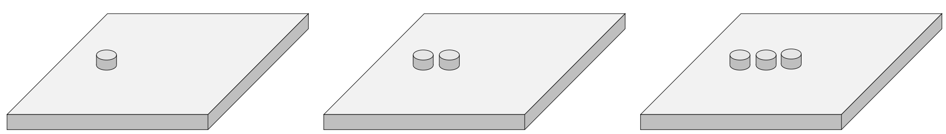
H.1. Tabla de verdad del ejercicio 12.1a. 427
H.2. Tabla de verdad del ejercicio 12.1b. 427

Capítulo 1

Los números enteros y la suma

1.1. Los números enteros positivos del 1 al 9

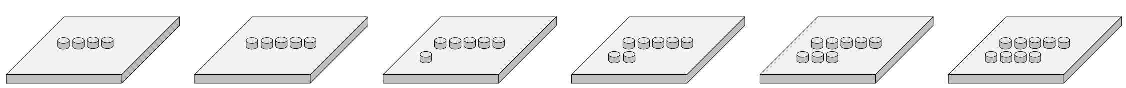
En la figura 1.1(a) se muestra un tablero de madera con un pequeño **cilindro** sobre su superficie, mientras que en la figura 1.1(b) se tienen dos pequeños cilindros y en la figura 1.1(c) el tablero soporta a tres cilindros. Decimos que en el tablero de la figura 1.1(a) se encuentra *1* cilindro, en la figura 1.1(b) se encuentran *2* cilindros y en la figura 1.1(c) se encuentran *3* cilindros. Si omitimos hablar de los cilindros, podemos decir que los tableros de la figura 1.1 son una representación de los **números** 1 (uno), 2 (dos) y 3 (tres). Así, el número 3 podría representar también a tres manzanas, tres árboles, tres casas, etc.



(a) 1 (b) 2 (c) 3

Figura 1.1: Los números 1, 2 y 3.

Si continuamos añadiendo cilindros, como se muestra en la figura 1.2, podemos decir que los tableros mostrados, de izquierda a derecha, representan a los números 4 (cuatro), 5 (cinco), 6 (seis), 7 (siete), 8 (ocho) y 9 (nueve).



(a) 4 (b) 5 (c) 6 (d) 7 (e) 8 (f) 9

Figura 1.2: Los números 4, 5, 6, 7, 8 y 9.

1.2. El número 0

Anteriormente fuimos añadiendo cilindros al tablero para presentar números **cada vez más grandes**. Pero podemos hacer lo contrario, en lugar de añadir, ir quitando cilindros. Por ejemplo, si al tablero del 1 le quitamos un cilindro, nos queda un tablero sin ningún cilindro sobre él, como se muestra en la figura 1.3. Decimos que este tablero representa al número 0 y es muy importante, como veremos más tarde. El número 0 se leé como “cero”.

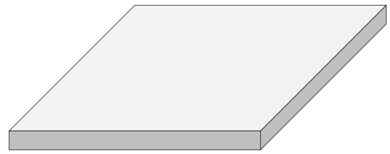
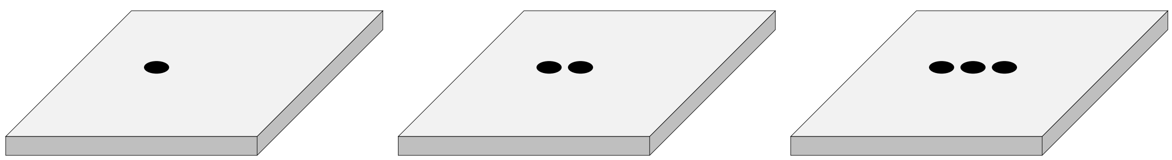


Figura 1.3: El número 0.

1.3. Los números negativos

Parece que al tablero que representa el 0 no podemos quitarle más cilindros, **pero no es así**. Si le quitamos un cilindro, quedaría un **hueco**; precisamente el hueco que dejó el cilindro que quitamos, como lo muestra la figura 1.4(a). Decimos que este tablero representa al número $\overline{1}$, que leeremos como **"uno negativo"**. Si quitamos otro cilindro, tenemos un tablero con dos huecos (como en la figura 1.4(b)) que representa al número $\overline{2}$ (que se leé como el número **"dos negativo"**); si quitamos otro cilindro, tenemos un tablero con tres huecos (como en la figura 1.4(c)) que representa al número $\overline{3}$ (el número **"tres negativo"**) [1].

Podemos continuar quitando cilindros del tablero, para tener los números $\overline{4}$, $\overline{5}$, $\overline{6}$, $\overline{7}$, $\overline{8}$ y $\overline{9}$.



(a) $\overline{1}$ (b) $\overline{2}$ (c) $\overline{3}$

Figura 1.4: Los números negativos.

1.4. Los números enteros

Hagamos las siguientes definiciones:

- Los números que representan tableros con cilindros, los llamaremos **números enteros positivos** o **números naturales**. Los números positivos son:

$$1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, \ \ldots \tag{1.1}$$

  Si tomanos un par de números consecutivos (adyacentes) en esta secuencia de números, el número a la derecha del otro, representa a un tablero con un cilindro adicional. Por ejemplo, el 4 tiene un cilindro más que el 3. Los tres puntos después del 9 representan los números que tienen más cilindros que el 9, los cuales se estudiarán en el capítulo 3.

- Los números representados por tableros con huecos, los llamaremos **números enteros negativos**. Los números negativos son:

$$\ldots\ , \overline{9}, \overline{8}, \overline{7}, \overline{6}, \overline{5}, \overline{4}, \overline{3}, \overline{2}, \overline{1} \tag{1.2}$$

[1] Más adelante, en el siguiente capítulo de la resta (página 12), se introducirá la notación estándar de matemáticas para representar números negativos: $-1 = \overline{1}, -2 = \overline{2}, \ldots$

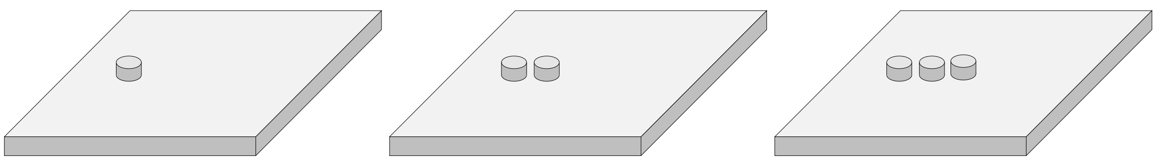
Donde un número a la izquierda de otro, representa a un tablero con un hueco adicional. Por ejemplo, el número $\overline{4}$ tiene un hueco más que el número $\overline{3}$. Sin embargo, se sigue teniendo la propiedad que el número a la derecha de otro tiene un cilindro adicional. Por ejemplo, al número $\overline{4}$ se le tiene que agregar un cilindro adicional para formar el número $\overline{3}$ (el cilindro agregado rellena un hueco). De manera similar al caso de los números positivos, los tres puntos antes del $\overline{9}$ representan los números que tienen más huecos que el $\overline{9}$.

- A los números negativos, el 0 y positivos los llamaremos **números enteros**. Los números enteros son:

$$\ldots\ ,\overline{9},\overline{8},\overline{7},\overline{6},\overline{5},\overline{4},\overline{3},\overline{2},\overline{1},0,1,2,3,4,5,6,7,8,9,\ \ldots \tag{1.3}$$

1.5. Suma de números enteros

Supongamos que tenemos dos tableros (dos números) y simplemente unimos los tableros, como se muestra en la figura 1.5. El primer tablero tiene 1 cilindro, y el segundo tablero tiene 2 cilindros, de manera que al unir los dos tableros se tiene un tablero con un total de 3 cilindros, como se ilustra en el resultado de la figura. Por simplicidad de dibujado, el tablero resultante de la unión de los dos tableros es del mismo tamaño que los tableros de entrada, lo importante es la cantidad de cilindros que tiene.



(a) Entrada1 (b) Entrada2 (c) Resultado

Figura 1.5: La suma de dos números.

Decimos que el 1 (el primer número) **sumado** con el 2 (el segundo número) da como resultado el número 3. También decimos que la **suma** del 1 y del 2 da como resultado el 3. A los números que se suman también se les conoce como **sumandos** y al resultado como **suma**.

En términos de los tableros asociados a los números,

> **La suma** es la unión de dos tableros como un nuevo tablero.

La suma de dos números se representa poniendo el primer número, después el signo '+' (más) y al final el segundo número. Así, la suma anterior puede expresarse como:

$$1+2$$

y el resultado de la suma es el número

$$3$$

1.6. La igualdad de dos números

Vamos a definir la **igualdad** de dos números, la cual nos será muy útil en todo lo que sigue.

Decimos que **dos números son iguales si los tableros correspondientes a los números tienen la misma cantidad de cilindros o huecos**, como en la figura 1.6. Si esto ocurre, lo indicamos poniendo el símbolo '=' (léase como "igual") en el centro, el primer número a la izquierda del igual, y el segundo número a la derecha del igual.

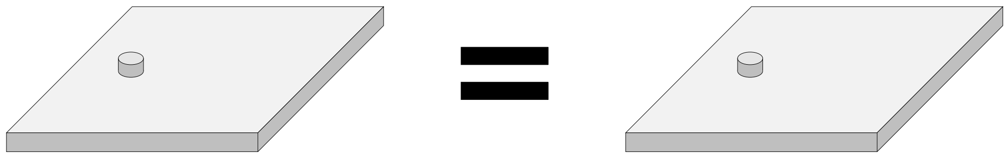


Figura 1.6: La igualdad $1 = 1$.

Por ejemplo, podemos escribir la siguiente **igualdad**:

$$1 = 1$$

y se leé "uno es igual a uno". Una igualdad es cierta o verdadera cuando el número de la izquierda del igual es el mismo que el número a la derecha. En el caso de $1 = 1$, la igualdad es cierta.

Cuando dos números no son iguales, en lugar del signo $=$, utilizamos el símbolo $\neq$ (no igual). Por ejemplo $2 \neq 3$ ("dos no es igual a tres").

1.7. De vuelta a la suma de enteros

Si aprovechamos el símbolo de igualdad ($=$) para denotar que dos números son iguales, como se explicó antes, podemos decir que la suma de dos números es igual al número que representa el resultado de la suma.

Volviendo al ejemplo de la suma anterior, podemos decir que:

$$1 + 2 = 3$$

que se leé "uno más dos es igual a tres". Esto significa que el resultado de la suma del 1 y del 2 es igual al número 3, tal como se ilustra en la figura 1.7.

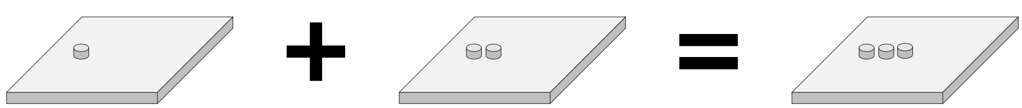


Figura 1.7: Suma utilizando el símbolo de igualdad.

Conviene resaltar que $1 + 2$ representa el número 3, de manera que podemos sustituir a 1+2 por el resultado 3, en la igualdad. Así, realizando la suma de 1 + 2 , la figura 1.7 se transforma en la figura 1.8. Es decir, del lado izquierdo de la igualdad (=) se tiene un sólo número y también se tiene un único número del lado derecho de la igualdad.

Podemos también decir que la igualdad:

$$1 + 2 = 3$$

al realizar la suma, se transforma en la siguiente igualdad

$$3 = 3$$

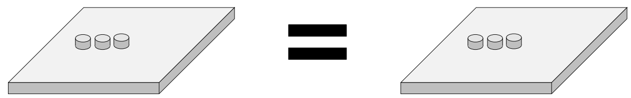


Figura 1.8: Representación de la igualdad: $3 = 3$.

1.8. El 0 como sumando

Es interesante observar que al sumar los números 3 y 0 el resultado es el número 3,

$$3 + 0 = 3$$

Utilizando nuestra representación de tableros (ver la figura 1.9) se explica fácilmente la situación porque el tablero vacío no añade ningún cilindro al resultado de la suma.

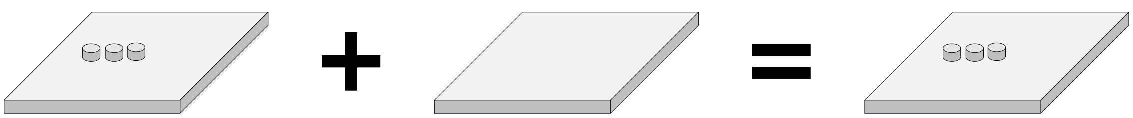


Figura 1.9: El resultado de sumar el 0 a un número es igual al mismo número.

Si sumamos a un número cualquiera el número 0, el resultado es igual al número que teníamos.

1.9. Sumando enteros positivos y negativos

La figura 1.10 representa la suma del número 2 con el número $\overline{1}$. Al unir los tableros, **simplemente un cilindro rellena un hueco** y el resultado es un tablero con un cilindro.

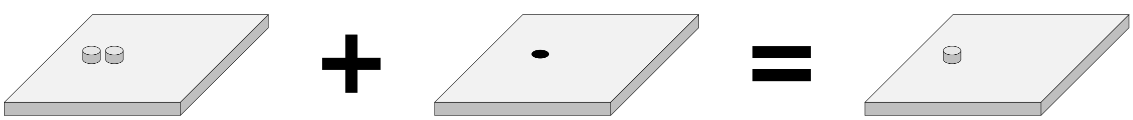


Figura 1.10: Sumando enteros positivos y negativos con resultado positivo.

Es decir:

$$2 + \overline{1} = 1$$

Otro ejemplo se presenta en la figura 1.11 que representa la suma del número 2 con el número $\overline{3}$. Al unir los tableros, **simplemente los dos cilindros rellenan dos de los tres huecos** y el resultado es un tablero con un hueco.

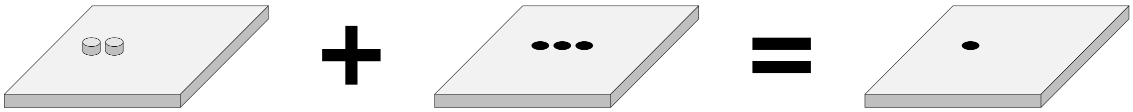


Figura 1.11: Sumando enteros positivos y negativos con resultado negativo.

Es decir:

$$2 + \overline{3} = \overline{1}$$

1.10. Inversos aditivos

Resulta muy interesante observar que la suma $2 + \overline{2}$ es igual a 0 (veáse la figura 1.12). Esto es, existe la misma cantidad de cilindros que de huecos, de manera que al unir los tableros se rellenan todos los huecos y no sobra ningún cilindro.

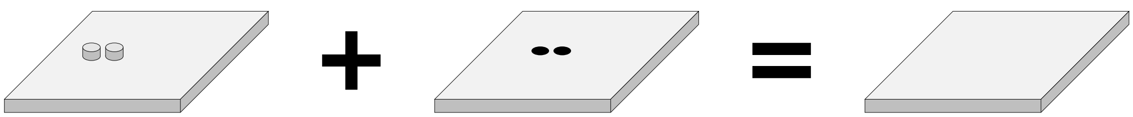


Figura 1.12: Sumando enteros positivos y negativos con resultado 0.

Es decir,

$$2 + \overline{2} = 0$$

Se dice que un número es el **inverso aditivo** de otro, cuando al sumarlos el resultado es 0.

Veamos los siguientes ejemplos:

- $\overline{1}$ es el inverso aditivo de 1, porque $1 + \overline{1} = 0$.
- 1 es el inverso aditivo de $\overline{1}$, porque $\overline{1} + 1 = 0$.
- $\overline{2}$ es el inverso aditivo de 2, porque $2 + \overline{2} = 0$.
- 2 es el inverso aditivo de $\overline{2}$, porque $\overline{2} + 2 = 0$.
- y así sucesivamente.

1.11. Utilizando letras como números no determinados

En ocasiones, en lugar de utilizar números como el 1 ó el 2, se utilizan las primeras letras del alfabeto (a, b, c, etc.) para denotar un determinado número no especificado. Por ejemplo, la igualdad:

$$a + b = c$$

simplemente expresa que "el número representado por a sumado con el número representado por b es igual al número representado por c". En matemáticas es común referirse a las letras como literales y en adelante se utilizará el término literal como sinónimo de letra.

Si la letra a fuera **sustituida** por 1; esto es, si $a = 1$, la igualdad anterior se transforma en la siguiente:

$$1 + b = c$$

Ahora bien, si la letra b fuera sustituida por 2; es decir, si $b = 2$, la igualdad anterior se transforma en:

$$1 + 2 = c$$

y como sabemos sumar, podemos decir que

$$3 = c$$

Es decir, que la letra c tiene que ser el número 3 para que la igualdad sea cierta.

1.12. Orden en los números enteros

Como anotamos anteriormente, los números enteros son los siguientes:

$$\ldots\ ,\overline{9},\overline{8},\overline{7},\overline{6},\overline{5},\overline{4},\overline{3},\overline{2},\overline{1},0,1,2,3,4,5,6,7,8,9,\ \ldots \tag{1.4}$$

Es fácil ver que el siguiente número a la derecha de otro se obtiene sumándole 1. Por ejemplo, $\overline{9} + 1 = \overline{8}$ (nueve huecos más un cilindro dan 8 huecos), $\overline{1} + 1 = 0$, $0 + 1 = 1$ y $8 + 1 = 9$.

Como el 8 tiene menos cilindros que el 9, decimos que 8 **es menor que** 9, lo cual denotamos como:

$$8 < 9$$

También decimos que 9 **es mayor que** 8, lo cual denotamos como:

$$9 > 8$$

Es fácil recordar esta notación teniendo en cuenta que el número menor está indicado por la "punta" del símbolo de mayor o menor.

> Se dice que un número a **es mayor que** b, es decir que $a > b$, si el número a está a la derecha del número b en la secuencia de los números enteros. Así tenemos que $6 > 4$, pero también que $0 > \overline{1}$.

De manera similar,

Se dice que un número a **es menor que** b, es decir que $a < b$, si el número a está a la izquierda del número b en la secuencia de los números enteros. Así tenemos que $1 < 2$, pero también que $\overline{3} < \overline{2}$.

1.13. Propiedades de la suma

Aprovechando el uso de las literales, podemos expresar algunas propiedades muy importantes de la suma:

1. **Propiedad conmutativa**. Si se intercambia el primero y el segundo número de una suma, el resultado es el mismo. Utilizando literales, esta propiedad se expresa como sigue:

$$a + b = b + a \tag{1.5}$$

   Por ejemplo, si $a = 2$ y $b = 3$, esta propiedad nos dice que

$$2 + 3 = 3 + 2$$

   Es decir que la suma $2 + 3$ nos da el mismo resultado que $3 + 2$. Esta propiedad se explica muy fácilmente recordando la representación de los números en tableros. Como la suma es la unión de dos tableros, en realidad no importa cual es el primer tablero y cual el segundo; lo que importa es cuantos cilindros o huecos tienen.

2. **Propiedad asociativa**. Si quisiéramos sumar tres números no importa cuales sumemos primero. Utilizando literales, esta propiedad se expresa así:

$$a + (b + c) = (a + b) + c \tag{1.6}$$

   El número del lado izquierdo de la igualdad se obtiene sumando primero $b + c$ y el resultado se suma con a. De manera similar, el número del lado derecho de la igualdad se obtiene sumando primero $a + b$ y el resultado se suma con c. Si utilizamos los siguientes valores: $a = 1$, $b = 2$, $c = 5$ en la igualdad anterior, la sustitución queda como sigue:

$$1 + (2 + 5) = (1 + 2) + 5$$

   Para comprobar que esta igualdad es cierta, primero hagamos las operaciones que tienen los paréntesis: "( )", conocidos como símbolos de agrupación:

$$1 + 7 = 3 + 5$$

   y enseguida hacemos las sumas que faltan:

$$8 = 8$$

   concluyendo que el número del lado izquierdo es el mismo que el número del lado derecho de la igualdad. Esta propiedad también se explica muy fácilmente recordando la representación de los números en tableros. Como la suma es la unión de dos tableros, en realidad no importa como se junten los tableros, debido a que el resultado es el mismo. Tomando en cuenta esta propiedad, para expresar la suma de 3 o más números es común omitir los paréntesis, por ejemplo en: $a + b + c + d$, debido a que no importa como asociemos, el resultado es el mismo.

3. **Existe un neutro aditivo, el 0**. El 0, también llamado **neutro aditivo**, tiene la siguiente propiedad:

$$a + 0 = a \quad , \quad 0 + a = a \tag{1.7}$$

la cual se explica fácilmente si consideramos que el 0 está representado por un tablero vacío (sin cilindros ni huecos). De igual forma, $0 + a = a$ por la propiedad conmutativa de la suma.

4. **Existencia de inversos aditivos**. Para cualquier número a existe un **inverso aditivo**, denotado como $\overline{a}$, que cumple la siguiente igualdad:

$$a + \overline{a} = 0 \tag{1.8}$$

Es decir, el inverso aditivo de un número es otro número que cuando se suman ambos números el resultado es 0. Esta propiedad se explica fácilmente con la representación de los números en tableros. Por cada tablero que tenga cierta cantidad de cilindros, existe otro tablero que tiene la misma cantidad de huecos. Así el inverso aditivo de 2 es $\overline{2}$, el inverso aditivo de $\overline{1}$ es 1, el inverso aditivo del 0 es el 0, etc.

Veamos un ejemplo de la aplicación de las propiedades de la suma. Calculemos el valor de:

$$\begin{aligned}
a &= 2 + 3 + 4 + \overline{3} + \overline{2} \\
a &= 2 + \overline{2} + 3 + \overline{3} + 4 \\
a &= (2 + \overline{2}) + (3 + \overline{3}) + 4 \\
a &= 0 + 0 + 4 \\
a &= 4
\end{aligned}$$

1.14. Ejercicios propuestos

Para las igualdades siguientes encuentre el valor que corresponde a la variable a al realizar las sumas del lado derecho de las igualdades.

1. $a = 2 + 5$
2. $a = 4 + 3$
3. $a = 3 + 4$
4. $a = 3 + \overline{1}$
5. $a = 3 + \overline{2}$
6. $a = 3 + \overline{3}$
7. $a = 3 + \overline{5}$
8. $a = \overline{2} + 5$
9. $a = \overline{2} + \overline{5}$
10. $a = 1 + 2 + 3$
11. $a = 1 + 3 + 4$

12. $a = 1 + 3 + \overline{5}$
13. $a = 1 + 3 + \overline{3}$
14. $a = 1 + 3 + \overline{9} + 2$

Reemplace el símbolo ? en las siguientes expresiones por $=$, $\neq$, $<$ o $>$, según corresponda a la relación correcta entre los números.

15. $2 \quad ? \quad 2$
16. $3 \quad ? \quad 2$
17. $2 \quad ? \quad 3$
18. $0 \quad ? \quad 2$
19. $0 \quad ? \quad 0$
20. $0 \quad ? \quad \overline{1}$
21. $\overline{1} \quad ? \quad \overline{1}$
22. $\overline{2} \quad ? \quad \overline{3}$
23. $\overline{3} \quad ? \quad \overline{2}$
24. $\overline{9} \quad ? \quad 2$

Resuelva los siguientes problemas que involucran números enteros.

25. Si en una canasta que tiene una manzana agregamos 2 manzanas más, encuentre la cantidad de manzanas que tiene la canasta al final.
26. Si en una canasta vacía agregamos 6 manzanas más, encuentre la cantidad de manzanas que tiene la canasta al final.
27. Si en una canasta que tiene una manzana agregamos una más y después cinco más, encuentre la cantidad de manzanas que tiene la canasta al final.
28. Si en una alberca la temperatura del agua está a 4 grados y después sube 5 grados más, encuentre la temperatura final del agua.
29. Si en una alberca la temperatura del agua está a 8 grados y después baja 5 grados, encuentre la temperatura final del agua.
30. Si tengo 5 pesos en mi bolsillo y pago 3 pesos en la tienda, encuentre la cantidad de pesos que me quedó en el bolsillo al final.
31. Si tengo 3 pesos en mi bolsillo y compro un pan de 5 pesos en la tienda, ¿Cuánto quedé a deber? Sugerencia: un número positivo indicaría la cantidad de pesos que tengo, mientras que un número negativo indicaría la cantidad de pesos de deuda.

Capítulo 2

La resta como una suma

2.1. Resta de dos enteros como una suma

Una vez que sabemos sumar enteros, podemos pasar a la siguiente operación importante: la resta o sustracción de dos enteros. La resta de dos números a y b, representada como $a - b$ (se leé "a menos b"), la podemos definir en términos de una suma:

$$a - b = a + \overline{b}$$

donde $\overline{b}$ representa el inverso aditivo de b. Es decir, **la resta es una suma donde en lugar de sumar el segundo número, le sumamos al primer número el inverso aditivo del segundo número**. Conviene recordar que los inversos aditivos los vimos en la página 9.

El primer número (a) se llama **minuendo**, el segundo número (b) se llama **sustraendo** y al resultado se le llama **resta o diferencia**.

Veamos algunos ejemplos:

- "5 menos 2". Utilizando la definición:

  $$5 - 2 = 5 + \overline{2}$$

  Si hacemos la suma del lado derecho de la igualdad, tenemos:

  $$5 - 2 = 3$$

  es decir, el resultado es 3.

- " 3 - 3". En este caso tenemos:

  $$3 - 3 = 3 + \overline{3}$$

  Si hacemos la suma del lado derecho de la igualdad, tenemos:

  $$3 - 3 = 0$$

  es decir el resultado es 0.

  Es fácil asociar la resta con la noción de **quitar**. Cuando el sustraendo es positivo (como en este caso y el anterior), se quita, del tablero del minuendo, la cantidad de cilindros indicada por el sustraendo. Para quitarlos, simplemente se reemplaza el tablero del sustraendo con uno que tenga la misma cantidad, pero de huecos, y se suma al minuendo.

La representación de números negativos como tableros con huecos, nos permite ver fácilmente que pasa cuando el sustraendo es más grande que el minuendo, como en el siguiente caso.

- "3 - 5". Utilizando la definición:

  $$3 - 5 = 3 + \overline{5}$$

  Si hacemos la suma del lado derecho de la igualdad, tenemos:

  $$3 - 5 = \overline{2}$$

  el resultado es $\overline{2}$. Es decir, quitar 5 cilindros a un tablero que tiene sólo tres nos da por resultado un tablero con dos huecos.

  Ahora veamos que sucede cuando el sustraendo es un número negativo.

- "$3 - \overline{1}$". Aplicando la definición de resta y tomando en cuenta que el inverso aditivo de $\overline{1}$ es 1 tenemos

  $$3 - \overline{1} = 3 + 1$$

  Si hacemos la suma del lado derecho de la igualdad, tenemos:

  $$3 - \overline{1} = 4$$

  el resultado es 4.

La resta de dos números a y b, representada como $a - b$ (se leé "a menos b"), se define como la suma del número a y del inverso aditivo de b (denotado por $\overline{b}$):

$$a - b = a + \overline{b}$$

2.2. La resta como un inverso aditivo

Pensemos por un momento que el minuendo es el 0 y que el sustraendo es el número b. La resta $0 - b$, quedaría como sigue:

$$0 - b = 0 + \overline{b}$$

Pero como sabemos que $0 + \overline{b} = \overline{b}$, tenemos que:

$$0 - b = \overline{b}$$

Por simplicidad, la resta cuando el minuendo es el 0, queda definida como:

$$-b = \overline{b}$$

y en lugar de leerse como "cero menos b", simplemente se leé "menos b". De esta forma, tenemos que $-b$ también lo podemos utilizar para denotar el inverso aditivo del número b.

Veamos algunos ejemplos:

- -2. Utilizando la definición:

$$-2 = \overline{2}$$

  Es interesante hacer notar que "menos 2" y "dos negativo" se refieren al mismo número. De igual forma "menos 3" y "tres negativo" se refieren al mismo número ($-3 = \overline{3}$), $-4 = \overline{4}$, $-5 = \overline{5}$, etc.

- -0. Utilizando la definición:

$$-0 = 0$$

  es decir, "menos cero" y "cero" se refieren al mismo número.

- $-\overline{5}$. Utilizando la definición:

$$-\overline{5} = 5$$

  puesto que el inverso aditivo de $\overline{5}$ es el 5. Así, tenemos que "menos 5 negativo" y "cinco" se refieren al mismo número. Si expresamos $\overline{5}$ como -5, tenemos que el miembro izquierdo de la igualdad anterior se transforma en:

$$-(-5) = 5$$

Cuando se omite el minuendo en una resta, podemos asumir que es 0. De esta forma:

$$\begin{aligned} -b &= \overline{b} \qquad (2.1) \\ -(-b) &= b \qquad (2.2) \end{aligned}$$

$-b$ denota el inverso aditivo del número b. El inverso aditivo del inverso aditivo del número b es el mismo número b. De manera que "menos uno" (-1) y "uno negativo" ($\overline{1}$) son el mismo número, $-2 = \overline{2}$, y así sucesivamente.

Con esta notación para denotar los inversos aditivos, tenemos la siguiente definición de la resta.

La resta de dos números a y b, representada como $a - b$ se define como la suma del número a y del inverso aditivo de b (denotado por $-b$):

$$a - b = a + (-b) \qquad (2.3)$$

En adelante, utilizaremos la notación estándar de matemáticas de utilizar el signo - para denotar números negativos. Por ejemplo, -1, -2, -3, etc.

2.3. Sumas de tres o más números

Como la suma tiene dos sumandos, se requiere sumar repetidamente cuando se involucran más de dos números. Por ejemplo para sumar:1, 2, 3 y 1; lo podemos hacer de la siguiente manera:

$$((1+2)+3)+1$$

Los paréntesis indican las operaciones que se deben realizar primero. La expresión anterior nos dará como resultado

$$\begin{aligned}
((1+2)+3)+1 &= ((1+2)+3)+1\\
((1+2)+3)+1 &= (3+3)+1\\
((1+2)+3)+1 &= 6+1\\
((1+2)+3)+1 &= 7
\end{aligned}$$

Esta asociación de paréntesis, iniciando por la izquierda, es la forma usual de llevar a cabo las operaciones de sumas en matemáticas y para simplificar su notación se puede escribir simplemente como:

$$1+2+3+1$$

2.4. Sumas de tres o más números que tienen "-"

Consideremos ahora las sumas de los siguientes tres enteros, que involucran un inverso aditivo:

$$2+4-3$$

Con la convención de realizar primero las sumas por la izquierda y la noción de la resta como una suma con el inverso aditivo del sustraendo, obtenemos el siguiente resultado:

$$\begin{aligned}
2+4-3 &= 2+4-3\\
2+4-3 &= (2+4)-3\\
2+4-3 &= (2+4)+(-3)\\
2+4-3 &= 6+(-3)\\
2+4-3 &= 3
\end{aligned}$$

El resultado es 3. Ahora consideremos el siguiente ejemplo:

$$2-3+4$$

Con nuestra noción del signo "$-$" como inverso aditivo, tendremos el siguiente resultado:

$$\begin{aligned}
2-3+4 &= (2-3)+4\\
2-3+4 &= (2+(-3))+4\\
2-3+4 &= (-1)+4\\
2-3+4 &= 3
\end{aligned}$$

El resultado es el mismo que antes, como debe de corresponder a una suma, donde solamente los sumandos cambiaron de lugar. Sin embargo, hubiéramos obtenido un resultado muy diferente si le restamos la suma de 3 y 4 al 2. Esto es:

$$2-(3+4)$$

Observe que en este caso utilizamos paréntesis para indicar que la suma $(3+4)$ es la que se resta al primer número. En matemáticas se considera que el **alcance** del signo $-$ como inverso aditivo se aplica al número, letra o expresión en paréntesis que esté a su derecha. En este caso, el resultado es:

$$\begin{aligned}2-(3+4)&=2-(3+4)\\2-(3+4)&=2-7\\2-(3+4)&=2+(-7)\\2-(3+4)&=-5\end{aligned}$$

Veamos algunos ejemplos más.

- Calculemos la siguiente expresión: $1+2-3+4-2$. Primero aplicamos los inversos aditivos y después sumamos formando pares, de izquierda a derecha.

$$\begin{aligned}1+2-3+4-2&=1+2+(-3)+4+(-2)\\1+2-3+4-2&=(1+2)+(-3)+4+(-2)\\1+2-3+4-2&=(3+(-3))+4+(-2)\\1+2-3+4-2&=(0+4)+(-2)\\1+2-3+4-2&=4+(-2)\\1+2-3+4-2&=2\end{aligned}$$

- Calculemos la siguiente expresión: $-1-3+2$.

$$\begin{aligned}-1-3+2&=(-1)+(-3)+2\\-1-3+2&=((-1)+(-3))+2\\-1-3+2&=(-4)+2\\-1-3+2&=-2\end{aligned}$$

Cuando en una suma hay sumandos precedidos del signo menos $(-)$, simplemente se cambian los sumandos por sus inversos aditivos y se suman como ya sabemos.

2.5. Valor absoluto de un número entero

El valor absoluto de un número es su valor numérico sin tener en cuenta su signo y se representa por dos líneas verticales que encierran el número. Por ejemplo, el valor absoluto de 3 es 3, $|3|=3$, y el valor absoluto de -3 también es 3, $|-3|=3$.

La definición de valor absoluto es la siguiente:

$$|a|=\begin{cases}a & \text{si} \quad a\geq 0\\ -a & \text{si} \quad a<0\end{cases} \tag{2.4}$$

Esta notación significa que si a es mayor o igual a 0, entonces $|a|=a$; y si a es menor que 0, entonces $|a|=-a$.

2.6. Ejercicios propuestos

Para cada igualdad encuentre el valor de a al realizar las operaciones indicadas.

1. $a = 2 - 1$
2. $a = 4 - 3$
3. $a = 3 - 4$
4. $a = 3 - (-1)$
5. $a = 3 - 2$
6. $a = 3 - (-2)$
7. $a = (-2) - 5$
8. $a = 1 + 3 - 2$
9. $a = -2 - 3 - 4$
10. $a = 1 - 2 - 3$
11. $a = -1 - 3 + 4$
12. $a = -1 - (-3) + (-5)$
13. $a = -1 - (3 + 4)$
14. $a = -1 - (3 - 4)$
15. $a = |-5|$
16. $a = |3|$
17. $a = |-3 + 2|$
18. $a = |-3 - 2|$
19. $a = |4 - 4|$
20. $a = |1 - 1 - 1|$

Capítulo 3

La multiplicación y la potencia

3.1. La multiplicación como una suma repetida

Muchas veces ocurre que necesitamos sumar varias veces el mismo número. Por ejemplo el perímetro, p, de un cuadrado que tiene 2 metros por lado, es la suma de sus cuatro lados iguales:

$$p = 2 + 2 + 2 + 2$$

Cuando esto ocurre, que el sumando es el mismo, definimos una nueva operación llamada **multiplicación** o **producto** de dos enteros, representada por un '$*$', que se coloca entre los dos números (en el mismo lugar que ocupa el '$+$' en la suma). El número a la izquierda del $*$ indica el número de veces que se repite como sumando el número de la derecha del $*$. Para el caso del perímetro antes mencionado, usando la multiplicación, tenemos que:

$$p = 4 * 2$$

La **multiplicación** de a y b, expresada como $a * b$ (se leé como "a por b"), está definida como una suma repetida de la siguiente forma:

$$a * b = 0 + b + b + ... + b \tag{3.1}$$

donde el número b aparece a veces como sumando. A los números a y b se les conoce como factores y al resultado se le denomina producto.

Enseguida se presentan algunos ejemplos de multiplicaciones:

$$\begin{aligned}
3 * 2 &= 0 + 2 + 2 + 2 \\
3 * 2 &= 6 \\
\\
5 * 1 &= 0 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 \\
5 * 1 &= 5 \\
\\
2 * 3 &= 0 + 3 + 3 \\
2 * 3 &= 6
\end{aligned}$$

La figura 3.1 ilustra el producto $3 * 2$, donde aparecen dos cilindros al frente, dos en la parte media y otros dos en la parte de atrás del tablero.

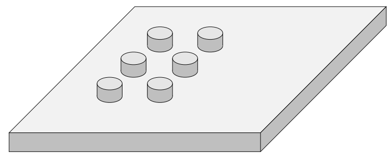


Figura 3.1: La multiplicación de $3 * 2$.

La figura 3.2 ilustra el hecho de que $3 * 2 = 2 * 3$. El tablero sólo giro un poco. En la multiplicación si se cambian de lugar los factores, se tiene el mismo resultado.

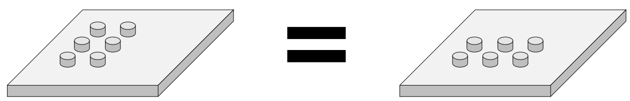


Figura 3.2: Verificando que $3 * 2 = 2 * 3$.

3.2. El número 10

Hasta ahora, hemos utilizado sólo los números: 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, y 9 y nos queda el problema de representar el siguiente número: $9 + 1$. A este nuevo número lo vamos a representar como "10", se leé como "**diez**" y nos representa a una **decena** de cilindros en el tablero. En la figura 3.3 se muestra la representación del 10 en forma de tablero como la suma del número 10 y del 0.

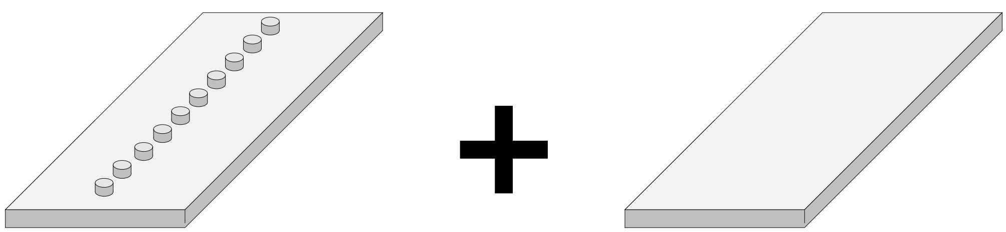


Figura 3.3: El número 10.

Más adelante quedará muy clara la ventaja de representar el 10 como:

$$10 = 10 + 0$$

3.3. Los números del 0 al 19

El siguiente número del 10 lo escribiremos como "11" y lo leeremos como "once". Siguiendo con nuestra convención, el once representa a:

$$11 = 10 + 1$$

Símbolo	Igualdad	Significa	Se leé
0	$0 = 0$	0 unidades	cero
1	$1 = 1$	1 unidades	uno
2	$2 = 2$	2 unidades	dos
3	$3 = 3$	3 unidades	tres
4	$4 = 4$	4 unidades	cuatro
5	$5 = 5$	5 unidades	cinco
6	$6 = 6$	6 unidades	seis
7	$7 = 7$	7 unidades	siete
8	$8 = 8$	8 unidades	ocho
9	$9 = 9$	9 unidades	nueve
10	$10 = 10 + 0$	1 decena y 0 unidades	diez
11	$11 = 10 + 1$	1 decena y 1 unidad	once
12	$12 = 10 + 2$	1 decena y 2 unidades	doce
13	$13 = 10 + 3$	1 decena y 3 unidades	trece
14	$14 = 10 + 4$	1 decena y 4 unidades	catorce
15	$15 = 10 + 5$	1 decena y 5 unidades	quince
16	$16 = 10 + 6$	1 decena y 6 unidades	dieciséis
17	$17 = 10 + 7$	1 decena y 7 unidades	diecisiete
18	$18 = 10 + 8$	1 decena y 8 unidades	dieciocho
19	$19 = 10 + 9$	1 decena y 9 unidades	diecinueve

Tabla 3.1: Los números del 0 al 19 y las cantidades que representan.

Es decir, **una decena más una unidad**. El siguiente número lo escribiremos como “12” y representa a:

$$12 = 10 + 2$$

Es decir, **una decena más dos unidades**. Siguiendo este proceso, en la tabla 3.1 se muestran los números del 0 hasta el 19, junto con las cantidades que representan y cómo se leen. Observe que en los números del 10 al 19, el primer dígito (el de la izquierda) es un 1 y representa a una decena y el segundo dígito corresponde al número de unidades que se suman a la decena.

> Decimos que nuestro sistema de numeración es **decimal** porque utilizamos **10 dígitos diferentes,** para representar cualquier cantidad. Los dígitos son: 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 y 9.

3.4. Los números del 20 al 99

El siguiente número del 19 se puede expresar como sigue:

$$20 = (2 * 10) + 0$$

Símbolo	Igualdad	Significa	See leé
20	$20 = (2 * 10) + 0$	2 decenas y 0 unidades	veinte
21	$21 = (2 * 10) + 1$	2 decenas y 1 unidades	veintiuno
22	$22 = (2 * 10) + 2$	2 decenas y 2 unidades	veintidós
23	$23 = (2 * 10) + 3$	2 decenas y 3 unidades	veintitrés
24	$24 = (2 * 10) + 4$	2 decenas y 4 unidades	veinticuatro
25	$25 = (2 * 10) + 5$	2 decenas y 5 unidades	veinticinco
26	$26 = (2 * 10) + 6$	2 decenas y 6 unidades	veintiséis
27	$27 = (2 * 10) + 7$	2 decenas y 7 unidades	veintisiete
28	$28 = (2 * 10) + 8$	2 decenas y 8 unidades	veintiocho
29	$29 = (2 * 10) + 9$	2 decena y 9 unidades	veintinueve
30	$30 = (3 * 10) + 0$	3 decenas y 0 unidades	treinta
31	$31 = (3 * 10) + 1$	3 decenas y 1 unidades	treinta y uno
32	$32 = (3 * 10) + 2$	3 decenas y 2 unidades	treinta y dos
32	$33 = (3 * 10) + 3$	3 decenas y 3 unidades	treinta y tres
32	$34 = (3 * 10) + 4$	3 decenas y 4 unidades	treinta y cuatro
32	$35 = (3 * 10) + 5$	3 decenas y 5 unidades	treinta y cinco
32	$36 = (3 * 10) + 6$	3 decenas y 6 unidades	treinta y seis
32	$37 = (3 * 10) + 7$	3 decenas y 7 unidades	treinta y siete
32	$38 = (3 * 10) + 8$	3 decenas y 8 unidades	treinta y ocho
39	$39 = (3 * 10) + 9$	3 decenas y 9 unidades	treinta y nueve
40	$40 = (4 * 10) + 0$	4 decenas y 0 unidades	cuarenta
50	$50 = (5 * 10) + 0$	5 decenas y 0 unidades	cincuenta
60	$60 = (6 * 10) + 0$	6 decenas y 0 unidades	sesenta
70	$70 = (7 * 10) + 0$	7 decenas y 0 unidades	setenta
80	$80 = (8 * 10) + 0$	8 decenas y 0 unidades	ochenta
90	$90 = (9 * 10) + 0$	9 decenas y 0 unidades	noventa
...			
99	$99 = (9 * 10) + 9$	9 decenas y 9 unidades	noventa y nueve

Tabla 3.2: Los números del 20 al 99 y las cantidades que representan.

Esto es, 2 decenas y 0 unidades. De igual manera se puede aplicar este procedimiento para representar los siguientes números hasta el 99:

$$99 = (9 * 10) + 9$$

En este caso estamos hablando de que 99 contiene 9 decenas y 9 unidades. En la tabla 3.2 se muestran los números del 20 hasta el 99, junto con las cantidades que representan y cómo se leen.

3.5. La multiplicación por 1

Veamos que pasa cuando uno de los factores de la multiplicación es la unidad,

$$1 * 2 = 0 + 2$$
$$1 * 2 = 2$$

$$
\begin{aligned}
2 * 1 &= 0 + 1 + 1 \\
2 * 1 &= 2
\end{aligned}
$$

Se puede ver que se obtiene el mismo número, en ambos casos. Es decir, cuando un número se multiplica por 1, se obtiene el mismo número.

Observe también que el resultado es el mismo cuando se intercambian de posición los factores en la multiplicación.

3.6. La multiplicación por 0

Veamos ahora el caso de multiplicación por 0,

$$
0 * 2 = 0
$$

$$
\begin{aligned}
2 * 0 &= 0 + 0 + 0 \\
2 * 0 &= 0
\end{aligned}
$$

El resultado siempre es 0.

3.7. La multiplicación de un número positivo por uno negativo

Abordemos ahora el caso de multiplicar un número positivo por uno negativo:

$$
\begin{aligned}
2 * (-3) &= 0 + (-3) + (-3) \\
2 * (-3) &= -6
\end{aligned}
$$

El resultado es negativo.

Veamos otro ejemplo:

$$
\begin{aligned}
3 * (-1) &= 0 + (-1) + (-1) + (-1) \\
3 * (-1) &= -3
\end{aligned}
$$

Es interesante observar que multiplicar por -1 equivale a calcular el inverso aditivo del primer factor.

Pero ¿Qué pasa cuando el factor negativo es el primero? ¿Qué significa -3 veces el número 2? Si 3 veces significa que se sume tres veces el segundo factor, -3 veces bien se puede interpretar como sumar tres veces el inverso aditivo del segundo factor, es decir restar tres veces el segundo factor ((Anfossi and Flores Mayer, 1930), página 44). Esto es,

$$
\begin{aligned}
(-3) * 2 &= 0 - 2 - 2 - 2 \\
(-3) * 2 &= 0 + (-2) + (-2) + (-2) \\
(-3) * 2 &= -6
\end{aligned}
$$

Podemos observar que el producto de un número positivo por un número negativo resulta ser negativo, independientemente de que el número negativo sea el primer factor o el segundo.

3.8. La multiplicación de dos números negativos

Ahora toca el caso de la multiplicación de dos números negativos, haciendo restas repetidas:

$$\begin{aligned}
(-2) * (-3) &= 0 - (-3) - (-3) \\
(-2) * (-3) &= 0 + (-(-3)) + (-(-3)) \\
(-2) * (-3) &= 0 + 3 + 3 \\
(-2) * (-3) &= 6
\end{aligned}$$

En este resultado se ha tomado en cuenta que $-(-3) = 3$. Es decir, el inverso aditivo del -3 es el 3. Vemos que el producto es positivo. Veamos ahora que sucede cuando se multiplica -1 por -1,

$$\begin{aligned}
(-1) * (-1) &= 0 - (-1) \\
(-1) * (-1) &= 0 + (-(-1)) \\
(-1) * (-1) &= 0 + 1 \\
(-1) * (-1) &= 1
\end{aligned}$$

Estos ejemplos muestran que el producto de dos números negativos resulta ser positivo e igual al producto de los valores absolutos de los factores.

3.9. Propiedades de la multiplicación

Aprovechando el uso de las literales, podemos expresar algunas propiedades muy importantes de la multiplicación:

1. **Propiedad conmutativa**. Si se intercambian los factores de una multiplicación, el resultado es el mismo (véase un ejemplo en la figura 3.2 de la página 18) . Utilizando literales, esta propiedad se expresa como sigue:
$$a * b = b * a \tag{3.2}$$

2. **Propiedad asociativa**. Si quisiéramos multiplicar tres números no importa cuales multipliquemos primero. Utilizando literales, esta propiedad se expresa así:
$$a * (b * c) = (a * b) * c \tag{3.3}$$
Ilustremos esta propiedad con un ejemplo:
$$2 * (3 * 4) = (2 * 3) * 4$$
Podemos aplicar la propiedad conmutativa al lado derecho de esta igualdad, de manera que tenemos:
$$2 * (3 * 4) = 4 * (2 * 3)$$
La figura 3.4 ilustra el resultado del producto del lado izquierdo y el producto del lado derecho, utilizando cubos en lugar de cilindros, para formar bloques.

   El bloque del lado izquierdo presenta una cara frontal que representa el producto $3*4$, es decir, cuatro cubos en la parte de abajo se replican 3 veces, hacia arriba. La profundidad de 2 unidades del cubo denota que se repiten dos veces los cubos de la parte frontal, es decir $2 * (3 * 4)$.

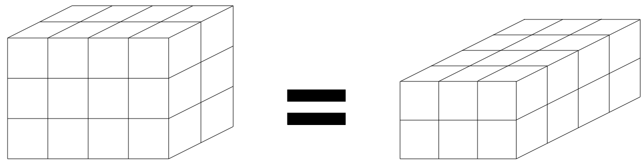


Figura 3.4: Visualización de $2 * (3 * 4) = 4 * (2 * 3)$.

El bloque del lado derecho presenta una cara frontal que representa el producto $2 * 3$, es decir, tres cubos en la parte de abajo se replican 2 veces, hacia arriba. La profundidad de 4 unidades del cubo denota que se repiten cuatro veces los cubos de la parte frontal, es decir $4 * (2 * 3)$.

Podemos observar que ambos bloques contienen el mismo número de cubitos, es decir representan el mismo número. En realidad se trata simplemente del mismo bloque visto desde ángulos diferentes. El lector puede comprobar que la cara frontal del bloque izquierdo es la misma que la cara superior del bloque derecho, la cara superior del bloque izquierdo es la misma que la cara lateral del bloque derecho, y la cara lateral del bloque izquierdo es la misma que la cara frontal del bloque derecho.

3. **Existe un neutro multiplicativo, el 1**. La unidad, el 1, también llamado **neutro multiplicativo**, tiene la siguiente propiedad:
$$a * 1 = a \quad , \quad 1 * a = a \tag{3.4}$$

4. **Multiplicación por 0**. Cualquier número a multiplicado por 0 da como resultado 0,
$$a * 0 = 0 \quad , \quad 0 * a = 0 \tag{3.5}$$

5. **Propiedad distributiva**. Si tenemos tres números a, b y c, la **propiedad distributiva** del producto sobre la suma se enuncia como sigue:
$$a * (b + c) = (a * b) + (a * c) \tag{3.6}$$
Veamos por ejemplo a que equivale $2 * (3 + 1)$
$$\begin{aligned} 2 * (3 + 1) &= 2 * 4 \\ 2 * (3 + 1) &= 8 \end{aligned}$$
Si aplicamos el punto de vista del producto como una suma repetida del segundo factor y las propiedades conmutativa y asociativa de la suma, tenemos:
$$\begin{array}{rcll} 2 * (3 + 1) & = & 0 + (3 + 1) + (3 + 1) & \text{dos veces (3 + 1)} \\ 2 * (3 + 1) & = & 0 + 3 + 1 + 3 + 1 & \text{propiedad asociativa de la suma} \\ 2 * (3 + 1) & = & (0 + 3) + 1 + 3 + 1 & \text{propiedad asociativa de la suma} \\ 2 * (3 + 1) & = & 3 + 1 + 3 + 1 & \text{efectuando la primera suma con 0} \\ 2 * (3 + 1) & = & 3 + 3 + 1 + 1 & \text{usando la propiedad conmutativa de la suma} \\ 2 * (3 + 1) & = & (3 + 3) + (1 + 1) & \text{usando la propiedad asociativa de la suma} \\ 2 * (3 + 1) & = & (0 + 3 + 3) + (0 + 1 + 1) & \text{usando la propiedad del 0 como sumando} \\ 2 * (3 + 1) & = & (2 * 3) + (2 * 1) & \text{expresando las sumas como producto} \end{array}$$
Este resultado es el mismo que hubiéramos obtenido al aplicar directamente la propiedad distributiva. En la figura 3.5 se visualiza este resultado. Los cuadros sombreados ilustran la multiplicación de $2*(3+1) = 2*4$. Los cuadros con el tono gris claro representan el producto $(2 * 3)$, mientras que los cuadros con el tono gris obscuro representan el producto $(2 * 1)$.

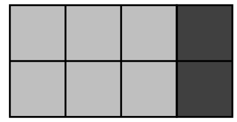


Figura 3.5: Visualizacion de $2 * (3 + 1) = (2 * 3) + (2 * 1)$.

6. **Propiedad distributiva generalizada**. La propiedad distributiva la podemos aplicar varias veces para multiplicar factores expresados como sumas. Por ejemplo:

$$
\begin{array}{lcll}
(a+b)*(c+d) & = & ((a+b)*c)+((a+b)*d) & \text{primera aplicación considerando } (a+b) \\
(a+b)*(c+d) & = & ((a*c)+(b*c))+((a*d)+(b*d)) & \text{segunda aplicación a los productos} \\
(a+b)*(c+d) & = & (a*c)+(b*c)+(a*d)+(b*d) &
\end{array}
$$

Este procedimiento se puede extender fácilmente a factores con más sumandos:

$$
\begin{array}{rcl}
(a+b)*(c+d+e) & = & (a*c)+(b*c)+(a*d)+(b*d)+(a*e)+(b*e) \\
(a+b+c)*(x+y+z) & = & (a*x)+(b*x)+(c*x)+(a*y)+(b*y)+(c*y)+(a*z)+(b*z)+(c*z)
\end{array}
$$

7. **Producto de un número positivo por uno negativo**. Si tenemos dos números positivos a y b, podemos efectuar el siguiente procedimiento, cuyo paso clave es la observancia de la propiedad distributiva:

$$
\begin{array}{lcll}
a*(b+(-b)) & = & (a*b)+(a*(-b)) & \text{usando la propiedad distributiva} \\
a*0 & = & (a*b)+(a*(-b)) & \text{haciendo la suma del lado izquierdo} \\
0 & = & (a*b)+(a*(-b)) & \text{realizando el producto por cero} \\
0-(a*b) & = & (a*b)+(a*(-b))-(a*b) & \text{sumando -(a*b) a ambos lados} \\
0-(a*b) & = & (a*b)-(a*b)+(a*(-b)) & \text{propiedad conmutativa de la suma} \\
0-(a*b) & = & ((a*b)-(a*b))+(a*(-b)) & \text{propiedad asociativa de la suma} \\
-(a*b) & = & 0+(a*(-b)) & \text{realizando operaciones a ambos lados} \\
-(a*b) & = & a*(-b) & \text{realizando la suma del lado derecho} \\
a*(-b) & = & -(a*b) & \text{intercambiando los miembros de la igualdad}
\end{array}
$$

Observe que en el cuarto paso, se ha sumando $-(a * b)$ a ambos lados de la igualdad, por lo que la igualdad se sigue conservando. En el capítulo 8 veremos otras propiedades de la igualdad.

Si recordamos que el valor absoluto de un número, visto en la sección 2.5 de la página 15, corresponde a la cantidad positiva expresada por el número (sin tomar en cuenta si se trata de cilindros o huecos), podemos ver que si a y b son números positivos, entonces a es el valor absoluto de a y b es el valor absoluto de $(-b)$.

Si a y b son números positivos, la igualdad obtenida:

$$a * (-b) = -(a * b) \tag{3.7}$$

se puede leer como: **el producto de un número positivo por un número negativo es igual al inverso aditivo del producto de los valores absolutos de los factores**. En otras palabras, el resultado es negativo.

El lector puede comprobar fácilmente que si hubiéramos iniciado con

$$(b + (-b)) * a = (b * a) + ((-b) * a)$$

El resultado es

$$(-b) * a = -(b * a)$$

Nuevamente, el producto de un número negativo por un número positivo es el negativo del producto de los valores absolutos de los factores. Un caso especial ocurre cuando se multiplica un número por -1, veamos:

$$\begin{aligned}(-1) * a &= -(1 * a)\\(-1) * a &= -a\end{aligned}$$

Es decir, podemos multiplicar por (-1) a un número y el resultado es el inverso aditivo del número. Si multiplicamos un número negativo (digamos $-a$) por -1, tenemos:

$$\begin{aligned}(-1) * (-a) &= -(-a)\\(-1) * (-a) &= a\end{aligned}$$

Es decir, volvemos a obtener que al multiplicar por (-1) a un número, el resultado es el inverso aditivo del número.

Multiplicar por -1. Si se multiplica un número por -1, se obtiene el inverso aditivo de dicho número. Es decir:

$$(-1) * a = -a \tag{3.8}$$

$$(-1) * (-a) = a \tag{3.9}$$

Veamos ahora como podemos aplicar lo anterior, junto con la propiedad distributiva, para calcular la expresión $-(a + b - c)$,

$$\begin{aligned}-(a + b + (-c)) &= (-1) * (a + b + (-c))\\-(a + b + (-c)) &= ((-1) * a) + ((-1) * b) + ((-1) * (-c))\\-(a + b + (-c)) &= -a - b + c\end{aligned}$$

Conviene resaltar que en la igualdad presentada anteriormente: $(-1) * (-a) = a$, tenemos justamente el caso del producto de un número negativo (-1) por otro negativo $(-a)$, cuyo resultado es un número positivo (a). Comprobemos a continuación que efectivamente esto ocurre siempre.

8. **Producto de dos números negativos**. Si tenemos dos números positivos a y b, podemos efectuar el si-

guiente procedimiento:

$$\begin{array}{lcll}
(-a)*(b+(-b)) & = & ((-a)*b))+((-a)*(-b)) & \text{usando la propiedad distributiva} \\
(-a)*0 & = & ((-a)*b))+((-a)*(-b)) & \text{haciendo la suma del lado izquierdo} \\
0 & = & ((-a)*b))+((-a)*(-b)) & \text{haciendo el producto lado izquierdo} \\
0 & = & -(a*b)+((-a)*(-b)) & \text{realizando el primer producto del lado derecho} \\
0+(a*b) & = & -(a*b)+((-a)*(-b))+(a*b) & \text{sumando (a*b) a ambos lados} \\
0+(a*b) & = & -(a*b)+(a*b)+((-a)*(-b)) & \text{propiedad conmutativa de la suma} \\
0+(a*b) & = & (-(a*b)+(a*b))+((-a)*(-b)) & \text{propiedad asociativa de la suma} \\
a*b & = & 0+((-a)*(-b)) & \text{realizando operaciones a ambos lados} \\
a*b & = & (-a)*(-b) & \text{realizando la suma del lado derecho} \\
(-a)*(-b) & = & a*b & \text{intercambiando los miembros de la igualdad}
\end{array}$$

Del resultado obtenido tenemos que:

$$(-a)*(-b) = a*b \tag{3.10}$$

Es decir, **el producto de dos números negativos es positivo**. En el lado izquierdo de la igualdad tenemos la multiplicación de dos números negativos: $(-a)$ y $(-b)$. En el lado derecho de la igualdad tenemos el producto de los valores absolutos de los factores: a y b.

9. **Regla de los signos para la multiplicación.** Los dos resultados anteriores dan origen a la siguiente regla para determinar el signo del producto.

Regla de los signos del producto. El producto de números de diferente signo da un resultado negativo y el producto de números del mismo signo da un resultado positivo. Si a y b son números positivos, tenemos

$$\begin{array}{lclcl}
a*b & = & a*b & , & (+)*(+)=(+) \\
(-a)*b & = & -(a*b) & , & (-)*(+)=(-) \\
a*(-b) & = & -(a*b) & , & (+)*(-)=(-) \\
(-a)*(-b) & = & a*b & , & (-)*(-)=(+)
\end{array}$$

3.10. Potencia de un número

Si queremos calcular el área de un cuadrado con lado a, basta calcular $(a*a)$. Si queremos calcular el volumen de un cubo de lado a, es necesario multiplicar $(a*a*a)$. Es tan frecuente la utilización de multiplicaciones repetidas del mismo factor que se introduce a continuación una operación llamada **potencia** de un número.

Un número a **elevado a la potencia entera** n (donde $n \geq 0$) se define por

$$a^n = 1 * a * a * \ldots * a \tag{3.11}$$

Donde el factor a se repite n veces. Al número a se denomina base y al número n se le conoce como exponente.

Cuando $n = 2$ se dice que a se eleva al cuadrado (o a cuadrada), cuando $n = 3$ se dice que a se eleva al cubo (o a cúbica) y a partir de $n > 3$ se dice que a se eleva a la potencia n.

Enseguida se presentan algunos ejemplos:

$$\begin{aligned} a^0 &= 1 \\ a^1 &= 1 * a \\ a^2 &= 1 * a * a \\ a^3 &= 1 * a * a * a \end{aligned}$$

Es interesante observar que cualquier número elevado a la potencia cero es 1, aún el caso de $0^0 = 1$ [1].

3.11. Simplificando la escritura de expresiones con productos y sumas

Consideremos la siguiente expresión para calcular el valor de la variable x

$$x = 1 + 2 * 3$$

A primera vista podría pensarse que el valor de x es 9, como resultado de sumar $(1 + 2) = 3$ y dicho resultado al multiplicarlo por 3 nos da 9. Sin embargo, en el lenguaje matemático los productos tienen precedencia sobre las sumas, es decir, se realizan antes. Utilizando este criterio, primero se realiza el producto de $(2 * 3) = 6$ y este resultado se suma con el 1. El resultado final es 7.

Jerarquía de operaciones. Cuando una expresión contiene sumas, productos y potencias; primero se realizan las expresiones que contienen paréntesis, después las potencias, enseguida los productos y al final las sumas y restas. Por ejemplo:

$$\begin{aligned} a + b * c^2 &= a + (b * (c^2)) \\ (a + b)^2 + c * d^2 &= (a + b)^2 + (c * (d^2)) \end{aligned}$$

Para expresar que primero debemos sumar 1 + 2 y el resultado multiplicarlo por 3, lo escribimos como:

$$x = (1 + 2) * 3$$

[1] En cursos avanzados de cálculo se formula la situación como el límite de x^x cuando x tiende a 0, encontrando que $0^0 = 1$.

En matemáticas, para simplificar la escritura de expresiones, **es común expresar el producto mediante dos variables juntas**, omitiendo el símbolo '*' entre ellas. Veamos algunos ejemplos, donde además se utiliza la propiedad distributiva para simplificar expresiones:

- Suma de la misma variable o la misma expresión:

$$\begin{aligned} x + x &= (1+1)x \\ x + x &= 2x \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} xy^2 + xy^2 &= (1+1)xy^2 \\ xy^2 + xy^2 &= 2xy^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x^2 + 3x^2 + 2x &= (1+3)x^2 + 2x \\ x^2 + 3x^2 + 2x &= 4x^2 + 2x \end{aligned}$$

- Aplicación de la jerarquía de operaciones y el uso de paréntesis:

$$\begin{aligned} -5^2 &= 0 - (5^2) \\ -5^2 &= -25 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (-5)^2 &= (-5)(-5) \\ (-5)^2 &= 25 \end{aligned}$$

Utilizando la convención de expresar el producto al colocar dos variables (o expresiones) juntas, la propiedad distributiva se puede escribir como

$$a(b + c) = ab + ac$$

La propiedad distributiva generalizada la podemos escribir como:

$$\begin{aligned} (a_1 + a_2 + \ldots + a_n)(b_1 + b_2 + \ldots + b_m) &= a_1b_1 + a_2b_1 + \ldots + a_nb_1 + \\ &\quad a_1b_2 + a_2b_2 + \ldots + a_nb_2 + \\ &\quad \ldots + \\ &\quad a_1b_m + a_2b_m + \ldots + a_nb_m \end{aligned}$$

Observe que para la propiedad distributiva generalizada se han utilizado las **variables con subíndice**: a_1, a_2, $\ldots$, a_n, para expresar los términos que al sumarse forman el primer factor; mientras que se han utilizado las variables: b_1, b_2, $\ldots$, b_m, para expresar los términos que al sumarse forman el segundo factor. De esta manera se expresa que el primer factor tiene n sumandos y el segundo factor tiene m sumandos.

3.12. Números enteros mayores de 99

En la tabla 3.3 se presentan los números mayores de 99 utilizando la notación de potencias, productos y sumas.

Símbolo	Igualdad	Se leé
100	$100 = 1 * 10^2 + 0 * 10^1 + 0 * 10^0$	cien
101	$101 = 1 * 10^2 + 0 * 10^1 + 1 * 10^0$	ciento uno
102	$102 = 1 * 10^2 + 0 * 10^1 + 2 * 10^0$	ciento dos
103	$103 = 1 * 10^2 + 0 * 10^1 + 3 * 10^0$	ciento tres
...		
200	$200 = 2 * 10^2 + 0 * 10^1 + 0 * 10^0$	doscientos
300	$300 = 3 * 10^2 + 0 * 10^1 + 0 * 10^0$	trescientos
400	$400 = 4 * 10^2 + 0 * 10^1 + 0 * 10^0$	cuatrocientos
500	$500 = 5 * 10^2 + 0 * 10^1 + 0 * 10^0$	quinientos
600	$600 = 6 * 10^2 + 0 * 10^1 + 0 * 10^0$	seiscientos
700	$700 = 7 * 10^2 + 0 * 10^1 + 0 * 10^0$	setecientos
800	$800 = 8 * 10^2 + 0 * 10^1 + 0 * 10^0$	ochocientos
900	$900 = 9 * 10^2 + 0 * 10^1 + 0 * 10^0$	novecientos
1,000	$1,000 = 1 * 10^3 + 0 * 10^2 + 0 * 10^1 + 0 * 10^0$	mil
1,001	$1,001 = 1 * 10^3 + 0 * 10^2 + 0 * 10^1 + 1 * 10^0$	mil uno
...		
2,000	$2,000 = 2 * 10^3 + 0 * 10^2 + 0 * 10^1 + 0 * 10^0$	dos mil
10,000	$10,000 = 1 * 10^4$	diez mil
100,000	$100,000 = 1 * 10^5$	cien mil
1,000,000	$1,000,000 = 1 * 10^6$	un millón
2,000,000	$2,000,000 = 2 * 10^6$	dos millones
1,000,000,000	$1,000,000,000 = 1 * 10^9$	mil millones
1,000,000,000,000	$1,000,000,000,000 = 1 * 10^{12}$	un billón
1,000,000,000,000,000,000	$1,000,000,000,000,000,000 = 1 * 10^{18}$	un trillón

Tabla 3.3: Los números mayores del 99 y las cantidades que representan.

Por ejemplo:

$$\begin{aligned} 999 &= 9 * 10^2 + 9 * 10^1 + 9 * 10^0 \\ 12,345 &= 1 * 10^4 + 2 * 10^3 + 3 * 10^2 + 4 * 10^1 + 5 * 10^0 \end{aligned}$$

Recordemos que $10^2 = 100$ (el 10 se repite 2 veces, $1 * 10 * 10$), $10^1 = 10$ (el 10 se repite 1 vez, $1 * 10$) y $10^0 = 1$ (el 10 se repite 0 veces y sólo queda el 1).

Con esta notación, decimos que el presupuesto del Gobierno de México en 2016 fue de $4,763,874,000,000$; es decir, un presupuesto de cuatro billones setecientos sesenta y tres mil ochocientos setenta y cuatro millones de pesos.

3.13. Ejercicios propuestos

Para las igualdades siguientes encuentre el valor que corresponde a la variable a al realizar las operaciones indicadas.

1. $2 * 5 = a$
2. $(-4) * (-3) = a$
3. $(-3) * 4 = a$
4. $3 * (-1) = a$
5. $3 * (5 - 3) = a$
6. $(10^2 + (5)(2)) * 10 = a$
7. $(1 + 2 + 3 - 6)(10) = a$
8. $2^2 + 2^1 + 2^0 = a$
9. $1 + 2 * 3 * (-5) = a$
10. $2^8 = a$
11. $2^6 * 2^2 = a$
12. $(1 - 3)(-2) = a$
13. $-10^2 - 10 = a$
14. $10^{2*3} = a$
15. $10^3 + 10^2 + 10^0 = a$
16. $2^{100,000} * (2^2 - 4) = a$

Para cada número, indique la cantidad equivalente en potencias de 10 y escriba cómo se leé.

17. 123
18. $12,345$
19. $100,001$
20. $2,521,489$
21. $100,003,002$
22. $300,000,000$
23. $1,000,410,030$
24. $40,000,000,000,300,000$

Capítulo 4

Números fraccionarios y la división

En este capítulo vamos a introducir números intermedios entre dos enteros, así como otra de las operaciones básicas: la división.

4.1. Las fracciones

Supongamos que tenemos 6 manzanas y las deseamos repartir a 3 niños en forma equitativa. La cantidad de manzanas, 2 en este caso, que recibe cada niño se expresa de la siguiente manera:

$$\frac{6}{3} = 2$$

Decimos que "6 dividido entre 3 es igual a 2" o "la división de 6 entre 3 es igual a 2". Podemos ver que si la multiplicación 3 por 6 produce un resultado tres veces más grande que el 6; la división de 6 entre 3 produce un resultado tres veces más pequeño que el 6. De manera que la división es la operación contraria a la multiplicación.

Veamos otro ejemplo. Si tenemos 12 manzanas y se reparten equitativamente a 3 personas, cada persona recibe 4 manzanas. Es decir:

$$\frac{12}{3} = 4$$

Estos ejemplos nos llevan al concepto de una fracción.

Una fracción es un número que se expresa de la forma

$$\frac{a}{b}$$

Donde a y b son números enteros, siendo $b \neq 0$. El número a define el número inicial que se va dividir en b partes iguales. El resultado es una de las partes. Al número a se le conoce como numerador y al número b como denominador. A las fracciones también se les conoce como números racionales.

Ahora hablemos en términos de los cilindros que ya hemos utilizado anteriormente. Si tenemos 3 cilindros y los dividimos en 3 partes, el resultado es un cilindro, como se ilustra en la figura 4.1(a). En este caso tenemos que:

$$\frac{3}{3} = 1$$

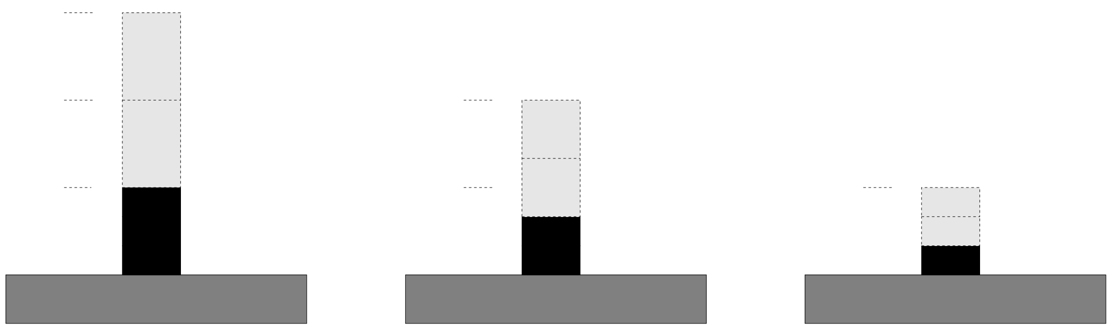
Ahora bien, si tenemos 2 cilindros, los dividimos en 3 partes del mismo tamaño y nos quedamos con una de esas partes, como se muestra en la figura 4.1(b), tenemos que la fracción mostrada en color negro es menor que la unidad:

$$\frac{2}{3} < 1$$

Observe que su altura es menor que la de un cilindro completo.

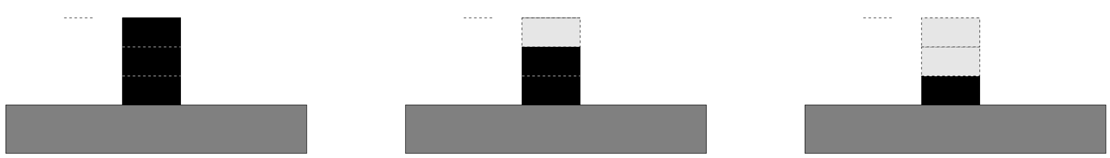
Finalmente consideremos que 1 cilindro lo dividimos en 3 partes del mismo tamaño y sólo nos quedamos con una de estas partes, como se muestra en la figura 4.1(c). Esta cantidad es mayor que el 0 y menor que 1 y la denotamos como:

$$\frac{1}{3}$$



(a) $\frac{3}{3}$ (b) $\frac{2}{3}$ (c) $\frac{1}{3}$

Figura 4.1: Dividiendo 3, 2 y 1 cilindro en tres partes iguales. Los cilindros se colocaron uno arriba del otro. El resultado de la división es la parte en color negro. Las partes en color gris claro son las otras dos partes. Las líneas a la izquierda de los cilindros indican la altura de 1, 2 y 3 cilindros.



(a) $\frac{3}{3}$ (b) $\frac{2}{3}$ (c) $\frac{1}{3}$

Figura 4.2: Otra forma de ver las fracciones $\frac{3}{3}$, $\frac{2}{3}$ y $\frac{1}{3}$. La línea a la izquierda de las fracciones de cilindro indican la altura de un cilindro.

La figura 4.2 nos presenta otra forma de ver las fracciones mostradas en la figura 4.1.

Al observar con cuidado ambas figuras, podemos afirmar que se cumple lo siguiente:

$$\begin{aligned} \frac{3}{3} &= \frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} &= \frac{1}{3} + \frac{1}{3} \end{aligned}$$

Esto nos lleva a otra posible definición de una fracción.

Una fracción es un número que se expresa de la forma

$$\begin{aligned}\frac{a}{b} &= 0+\frac{1}{b}+\frac{1}{b}+\ldots+\frac{1}{b}\\ \frac{a}{b} &= a*\frac{1}{b}\end{aligned} \tag{4.1}$$

Donde a y b son números enteros, siendo $b \neq 0$. El número b define el número de partes en que se divide la unidad (la fracción $\frac{1}{b}$) y a indica cuántas de esas partes se toman para formar la cantidad deseada.

Si continuamos aumentando el numerador de la fracción tenemos:

$$\begin{aligned}\frac{4}{3} &= 0+\frac{1}{3}+\frac{1}{3}+\frac{1}{3}+\frac{1}{3}\\ \frac{4}{3} &= \left(\frac{1}{3}+\frac{1}{3}+\frac{1}{3}\right)+\frac{1}{3}\\ \frac{4}{3} &= \frac{3}{3}+\frac{1}{3}\\ \frac{4}{3} &= 1+\frac{1}{3}\end{aligned}$$

Este resultado nos muestra claramente que $\frac{4}{3}$ es mayor que la unidad.

Si $a \geq 0$ y $b > 0$, en la fracción $\frac{a}{b}$ podemos tener los siguientes casos:

- $a = 0$. En este caso la fracción $\frac{0}{b}$ representa al 0. Se tomaron 0 partes.
- $a = b$. En este caso la fracción $\frac{b}{b}$ representa a la unidad. Se tomaron las b partes en las que se dividió la unidad. Es decir: $\frac{b}{b} = 1$.
- $b = 1$. En este caso la fracción $\frac{a}{1}$ representa al entero a.
- $a < b$. En este caso la fracción $\frac{a}{b} < 1$. Cuando esto sucede se dice que la fracción es propia.
- $a > b$. En este caso la fracción $\frac{a}{b} > 1$. Cuando esto sucede se dice que la fracción es impropia.

La tabla 4.1 presenta algunas fracciones de uso cotidiano y el nombre que se utiliza para leerlas. Veamos ahora ejemplos de lectura de fracciones:

- $\frac{10}{2} = 5$. Esta igualdad se leé como “diez entre dos es igual a cinco” o bien como “diez medios es igual a cinco”. La lectura como “diez entre dos” nos recuerda que las 10 unidades se dividen en dos partes y cada parte tiene 5 unidades. Por otro lado, “diez medios” nos recuerda que diez mitades nos dan cinco unidades.
- $\frac{2}{3}$. Esta fracción se puede leer como “dos entre tres” o bien como “dos tercios”. Cuando una fracción representa cantidades que no son enteras, es más común usar la segunda forma: “dos tercios”, para expresar que se trata de $\frac{1}{3}+\frac{1}{3}$.
- $\frac{3}{2}$. Esta fracción se leé comúnmente como “tres medios”, para expresar que se trata de $\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}$.

Fracción	See leé
$\frac{1}{2}$	un medio
$\frac{1}{3}$	un tercio
$\frac{1}{4}$	un cuarto
$\frac{1}{5}$	un quinto
$\frac{1}{6}$	un sexto
$\frac{1}{7}$	un séptimo
$\frac{1}{8}$	un octavo
$\frac{1}{9}$	un noveno
$\frac{1}{10}$	un décimo

Tabla 4.1: Fracciones comunes.

4.2. Suma y resta de fracciones con igual denominador

Si tenemos una pizza dividida en 4 rebanadas del mismo tamaño y Juan tiene una rebanada, mientras que Pedro tiene 2 rebanadas, es evidente que si juntan sus rebanadas de pizza tienen un total de 3 rebanadas. Utilizando fracciones, podemos decir que:

$$\begin{aligned} \frac{1}{4}+\frac{2}{4} &= \frac{1+2}{4} \\ &= \frac{3}{4} \end{aligned}$$

Para **sumar dos fracciones** con el mismo denominador, simplemente se suman los numeradores. Es decir:

$$\frac{a}{c}+\frac{b}{c}=\frac{a+b}{c} \tag{4.2}$$

Si se trata de una resta de fracciones, simplemente se restan los numeradores. Es decir:

$$\frac{a}{c}-\frac{b}{c}=\frac{a-b}{c} \tag{4.3}$$

4.3. Multiplicación de fracciones

Cuando multiplicamos a una fracción por la unidad, de acuerdo a la definición de la multiplicación, el resultado es la misma fracción, esto es:

$$\begin{aligned} 1*\frac{1}{5} &= 0+\frac{1}{5} \\ 1*\frac{1}{5} &= \frac{1}{5} \end{aligned}$$

Ahora veamos lo que sucede al multiplicar por un entero mayor de 1 y por una fracción menor que 1.

4.3.1. Multiplicación de un entero mayor de uno por una fracción

Veamos que sucede cuando se multiplica un entero mayor de uno por una fracción. Por ejemplo:

$$\begin{aligned} 2 * \frac{1}{5} &= 0 + \frac{1}{5} + \frac{1}{5} \\ 2 * \frac{1}{5} &= \frac{1+1}{5} \\ 2 * \frac{1}{5} &= \frac{2}{5} \end{aligned}$$

Como cualquier entero n puede ser expresado por la fracción $\frac{n}{1}$, tenemos que:

$$\frac{2}{1} * \frac{1}{5} = \frac{2 * 1}{5}$$

Es decir, **el numerador de la nueva fracción es el producto de los numeradores de las fracciones**. En este caso, el doble de la fracción original $\frac{1}{5}$. El denominador de la nueva fracción no cambia.

4.3.2. Multiplicación de fracciones con numerador unitario

Supongamos que queremos multiplicar $\frac{1}{2}$ por $\frac{1}{5}$, lo que esperamos es que el resultado sea la mitad de la fracción original $\frac{1}{5}$. Este resultado se logra al multiplicar los denominadores de las fracciones. Esto es,

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} * \frac{1}{5} &= \frac{1}{2 * 5} \\ \frac{1}{2} * \frac{1}{5} &= \frac{1}{10} \end{aligned}$$

Es decir, **el denominador de la nueva fracción es el producto de los denominadores de las fracciones**. El numerador de la nueva fracción sigue siendo unitario.

4.3.3. Multiplicación de una fracción por otra fracción

De acuerdo a la sección 4.3.1, tenemos que dos fracciones cualquiera $\frac{a}{b}$ y $\frac{c}{d}$ se pueden expresar como sigue:

$$\frac{a}{1} * \frac{1}{b} = \frac{a}{b} \quad , \quad \frac{c}{1} * \frac{1}{d} = \frac{c}{d}$$

Ahora bien, cuando multiplicamos $\frac{a}{b}$ por $\frac{c}{d}$, el resultado lo podemos expresar como sigue:

$$\begin{aligned} \frac{a}{b} * \frac{c}{d} &= \left(\frac{a}{1} * \frac{1}{b}\right) * \left(\frac{c}{1} * \frac{1}{d}\right) & \\ \frac{a}{b} * \frac{c}{d} &= \frac{a}{1} * \frac{1}{b} * \frac{c}{1} * \frac{1}{d} & \text{Propiedad asociativa del producto} \\ \frac{a}{b} * \frac{c}{d} &= \frac{a}{1} * \frac{c}{1} * \frac{1}{b} * \frac{1}{d} & \text{Propiedad conmutativa del producto} \\ \frac{a}{b} * \frac{c}{d} &= \left(\frac{a}{1} * \frac{c}{1}\right) * \left(\frac{1}{b} * \frac{1}{d}\right) & \text{Propiedad asociativa del producto} \\ \frac{a}{b} * \frac{c}{d} &= \frac{a*c}{1} * \left(\frac{1}{b} * \frac{1}{d}\right) & \text{Producto de los enteros } a \text{ y } c \\ \frac{a}{b} * \frac{c}{d} &= \frac{a*c}{1} * \frac{1}{b*d} & \text{Sección 4.3.2} \\ \frac{a}{b} * \frac{c}{d} &= \frac{a*c}{b*d} & \text{Sección 4.3.1} \end{aligned}$$

De esta manera tenemos una regla general para la multiplicación de fracciones.

El producto de dos fracciones se realiza de la siguiente forma:

$$\frac{a}{b} * \frac{c}{d} = \frac{a * c}{b * d} \tag{4.4}$$

4.3.4. Efecto de multiplicar un número por una fracción

Veamos que sucede cuando multiplicamos el número 4 por una cantidad mayor o igual que la unidad:

$$\begin{aligned} 2 * 4 &= 0 + 4 + 4 \\ 2 * 4 &= 8 \\ \\ 1 * 4 &= 0 + 4 \\ 1 * 4 &= 4 \end{aligned}$$

Es decir, multiplicar por 2 cierta cantidad, duplica dicha cantidad, multiplicar por 1 conserva la cantidad. Veamos ahora que sucede cuando se multiplica por una fracción menor de la unidad:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} * 4 &= 4 * \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} * 4 &= 0 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} * 4 &= 2 \\ \\ \frac{1}{4} * 4 &= 4 * \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} * 4 &= 0 + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} * 4 &= 1 \end{aligned}$$

Multiplicar por un medio ($\frac{1}{2}$), divide la cantidad entre dos (se reduce a la mitad) y multiplicar por un cuarto ($\frac{1}{4}$), divide la cantidad entre 4 (se reduce a una cuarta parte).

Podemos inferir que multiplicar una cantidad por números mayores que la unidad, aumenta la cantidad inicial; mientras que multiplicar por un número menor que la unidad (y mayor que 0) reduce la cantidad inicial. Tener presente este comportamiento ayuda a detectar fácilmente cuando se incurre en algún error de cálculo.

4.3.5. Los porcentajes y las fracciones

Como hemos visto anteriormente, si queremos el doble de un número, lo multiplicamos por 2. Por ejemplo:

$$2 * 200 = 400$$

Si queremos la mitad de un número, lo multiplicamos por $\frac{1}{2}$. Por ejemplo:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2} * 200 &= \frac{1}{2} * \frac{200}{1} \\
\frac{1}{2} * 200 &= \frac{200}{2} \\
\frac{1}{2} * 200 &= 100
\end{aligned}$$

Ahora bien, si queremos $\frac{16}{100}$ (dieciseis centésimos) de un número, también lo multiplicamos por $\frac{16}{100}$. Por ejemplo:

$$\begin{aligned}
\frac{16}{100} * 200 &= \frac{16}{100} * \frac{200}{1} \\
\frac{16}{100} * 200 &= \frac{16 * 200}{100} \\
\frac{16}{100} * 200 &= 32
\end{aligned}$$

Decimos que dieciseis centésimos de 200 es 32 o también que el $16\,\%$ (se leé "16 por ciento") de 200 es 32. Si queremos calcular el $35\,\%$ de 200 lo podemos hacer calculando $\frac{35}{100}$ por 200,

$$\begin{aligned}
\frac{35}{100} * 200 &= \frac{35}{100} * \frac{200}{1} \\
\frac{35}{100} * 200 &= \frac{35 * 200}{100} \\
\frac{35}{100} * 200 &= 70
\end{aligned}$$

El resultado es 70.

El porcentaje x de una cantidad n, denotado como $x\,\%$ de n (se lee "x por ciento de n") se refiere a x centésimos de la cantidad n. Es decir:

$$(x\,\% \text{ de } n) = \frac{x}{100} * n \tag{4.5}$$

4.4. Fracciones equivalentes

Ya hemos visto que una fracción al multiplicarse por la unidad nos da la misma fracción. Sin embargo, la unidad se puede expresar como $\frac{n}{n}$ para cualquier entero $n \neq 0$. Aplicando la regla del producto de fracciones, tenemos que una fracción $\frac{a}{b}$ también se puede expresar como:

$$
\begin{aligned}
\frac{a}{b} &= \frac{a}{b} * 1 \\
\frac{a}{b} &= \frac{a}{b} * \frac{n}{n} \\
\frac{a}{b} &= \frac{a * n}{b * n}
\end{aligned}
$$

Siendo el número del lado izquierdo igual al número del lado derecho, decimos que se trata de **fracciones equivalentes** o iguales. Por ejemplo, $\frac{1}{2}$ y $\frac{2}{4}$ son fracciones equivalentes, puesto que al multiplicar $\frac{1}{2}$ por $\frac{2}{2}$ obtenemos $\frac{2}{4}$.

Una fracción es equivalente a otra si se obtiene exactamente una de ellas al multiplicar el numerador y el denominador de la otra fracción por un mismo entero $n \neq 0$. Es decir, las fracciones $\frac{a}{b}$ y $\frac{c}{d}$ son equivalentes o iguales, si y sólo si existe un entero $n \neq 0$ tal que haga que los numeradores y denominadores se hagan iguales:

$$a = c * n$$

$$b = d * n$$

O bien,

$$a * n = c$$

$$b * n = d$$

4.5. Suma de fracciones con diferente denominador

Para sumar fracciones de diferente denominador, es oportuno convertir ambas fracciones en fracciones equivalentes que tengan el mismo denominador. En el siguiente ejemplo basta convertir la primera fracción para tener el mismo denominador:

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{2} + \frac{1}{4} &= \frac{1 * 2}{2 * 2} + \frac{1}{4} \\
\frac{1}{2} + \frac{1}{4} &= \frac{2}{4} + \frac{1}{4} \\
\frac{1}{2} + \frac{1}{4} &= \frac{2 + 1}{4} \\
\frac{1}{2} + \frac{1}{4} &= \frac{3}{4}
\end{aligned}
$$

En el caso general, siempre podemos obtener un denominador común que sea el producto de los denominadores de las fracciones. Por ejemplo:

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{2} + \frac{1}{3} &= \frac{1 * 3}{2 * 3} + \frac{1 * 2}{3 * 2} \\
\frac{1}{2} + \frac{1}{3} &= \frac{3}{6} + \frac{2}{6} \\
\frac{1}{2} + \frac{1}{3} &= \frac{3 + 2}{6}
\end{aligned}
$$

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{3} = \frac{5}{6}$$

Para sumar fracciones de diferente denominador se convierten a fracciones equivalentes con el mismo denominador y se suman los numeradores:

$$\frac{a}{b}+\frac{c}{d} = \frac{a*d}{b*d}+\frac{c*b}{d*b} \quad (4.6)$$

$$\frac{a}{b}+\frac{c}{d} = \frac{a*d+c*b}{b*d} \quad (4.7)$$

4.6. Comparación de fracciones

Para **comparar fracciones** basta convertirlas en fracciones equivalentes con el mismo denominador, como en el caso de la suma de fracciones anterior, y comparar los numeradores. Por ejemplo, para comparar $\frac{3}{4}$ con $\frac{5}{7}$, tenemos:

$$\frac{3}{4} = \frac{3*7}{4*7} \quad , \quad \frac{5}{7} = \frac{5*4}{7*4}$$

$$\frac{3}{4} = \frac{21}{28} \quad , \quad \frac{5}{7} = \frac{20}{28}$$

Ahora podemos ver claramente cuál es mayor,

$$\frac{21}{28} > \frac{20}{28}$$

Es decir,

$$\frac{3}{4} > \frac{5}{7}$$

Para comparar fracciones con diferente denominador se convierten a fracciones equivalentes con el mismo denominador y se comparan los numeradores.

4.7. Las fracciones y la división

Decimos que un número entero b es **múltiplo** de otro a cuando existe un entero n que satisface la igualdad siguiente:

$$b = a*n$$

Por ejemplo, los múltiplos de 2 son todos los enteros:

$$\ldots, -10, -8, -6, -4, -2, 0, 2, 4, 6, 8, 10, \ldots$$

Cuando en una fracción el numerador es un múltiplo del denominador, la fracción representa a un entero. Por ejemplo:

$$\begin{aligned}
\frac{6}{2} &= \frac{3*2}{1*2} \\
\frac{6}{2} &= \frac{3}{1}*\frac{2}{2} \\
\frac{6}{2} &= \frac{3}{1}*1 \\
\frac{6}{2} &= \frac{3}{1} \\
\frac{6}{2} &= 3
\end{aligned}$$

Si llamamos al numerador de la fracción como dividendo, al denominador de la fracción como divisor, y al entero correspondiente a la fracción como cociente; entonces tenemos la operación conocida como división. El cociente es el resultado de dividir el numerador en la cantidad de partes que indica el denominador y tomar una de esas partes. Así, $\frac{6}{2} = 3$ nos puede representar la operación de dividir 6 manzanas (el dividendo) entre 2 personas (el divisor), teniendo como resultado que cada persona tendrá 3 manzanas (el cociente), puesto que $2 * 3 = 6$.

Ahora bien, consideremos la siguiente fracción y tratemos de obtener el mayor entero asociado.

$$\begin{aligned}
\frac{7}{2} &= \frac{6}{2}+\frac{1}{2} \\
\frac{7}{2} &= 3+\frac{1}{2}
\end{aligned}$$

En este caso, la fracción representa al entero 3 más $\frac{1}{2}$. Si fuéramos a repartir 7 manzanas a dos personas, en forma equitativa, cada persona recibe 3 manzanas completas y una mitad de manzana.

En el lenguaje de la operación de la división, esto se puede interpretar como que al dividir 7 (el dividendo) entre 2 (el divisor) el cociente es 3 y el residuo es 1. En este caso se cumple que $7 = (3 + 3) + 1$, $7 = 2 * 3 + 1$. Es decir, el 7 corresponde a dos veces el 3, más una unidad.

4.7.1. Otra interpretación de la división

En el ejemplo anterior, vimos que $7 = 2 * 3 + 1$. Sin embargo, por la propiedad conmutativa de la multiplicación tenemos que también se cumple lo siguiente: $7 = 3 * 2 + 1$, es decir, $7 = (2 + 2 + 2) + 1$. Podemos observar que el número 7 es 3 veces el 2, más una unidad.

De esta manera si queremos ver cuantas veces el dividendo D es más grande que el divisor d, necesitamos obtener el cociente que corresponda a fracción $\frac{D}{d}$.

4.7.2. La división

Los ejemplos anteriores han preparado el camino para presentar enseguida la operación de división de números enteros.

Operación de división. Sea D el dividendo, d el divisor, c el cociente y r el residuo. La división $\frac{D}{d}$ se puede ver como la fracción $\frac{D}{d}$ expresada como la suma de un entero (c) y una fracción menor que la unidad ($\frac{r}{d}$). Es decir:

$$\frac{D}{d} = c + \frac{r}{d} \tag{4.8}$$

Donde r es un entero que cumple la condición $0 \leq r < d$. Si multiplicamos a ambos lados de la igualdad por $\frac{d}{1}$ podemos obtener

$$\begin{aligned}
\frac{D}{d} * \frac{d}{1} &= \left(c + \frac{r}{d}\right) * \frac{d}{1} \\
\frac{D}{1} * \frac{d}{d} &= \left(c * \frac{d}{1}\right) + \left(\frac{r}{d} * \frac{d}{1}\right) \\
\frac{D}{1} * 1 &= (c * d) + \left(\frac{r}{1} * \frac{d}{d}\right) \\
D * 1 &= (c * d) + \left(\frac{r}{1} * 1\right) \\
D &= c * d + r \qquad (4.9)
\end{aligned}$$

Esto es, el cociente multiplicado por el divisor más el residuo nos da el dividendo.

Si el residuo de la división $\frac{D}{d}$ es 0, decimos que D es **divisible** por d, que D es un **múltiplo** de d y que d es un **divisor** de D. Veamos algunos ejemplos:

- El 15 es divisible por el 1, 5 y 15. Los números 1, 5 y 15 son divisores del 15.
- El 20 es divisible por el 1, 2, 4, 5, 10 y 20. Los números 1, 2, 4, 5, 10 y 20 son divisores del 20.

En ocasiones es importante conocer el **máximo común divisor (MCD) de dos números**. En el caso del 15 y del 20, su MCD es el número 5. El MCD del numerador y denominador de una fracción es útil para expresar la fracción utilizando números más pequeños (**fracción simple**). Por ejemplo:

$$\begin{aligned}
\frac{15}{20} &= \frac{3*5}{4*5} \\
\frac{15}{20} &= \frac{3}{4} * \frac{5}{5} \\
\frac{15}{20} &= \frac{3}{4} * 1 \\
\frac{15}{20} &= \frac{3}{4}
\end{aligned}$$

El nuevo numerador se puede ver como el resultado de dividir el 15 entre el 5 (que es el MCD de 15 y 20). El nuevo denominador se puede ver como el resultado de dividir el 20 entre el 5. De esta manera podemos tener una versión ampliada para obtener una fracción equivalente.

Una fracción es equivalente a otra si se obtiene una de ellas al multiplicar o dividir el numerador y el denominador de la otra por un mismo entero $n \neq 0$. Es decir, la fracción $\frac{a}{b}$ no se altera por multiplicar o dividir por un entero $n \neq 0$ el numerador y el denominador de la fracción:

$$\frac{a}{b} = \frac{a*n}{b*n} \quad , \quad \frac{a}{b} = \frac{a/n}{b/n}$$

Una fracción se expresa en su forma simple cuando el numerador y denominador se dividen entre el Máximo Común Divisor de los dos enteros. Si m es el Máximo Común Divisor de los números enteros D y d, la fracción simple equivalente a $\frac{D}{d}$ se expresa como:

$$\frac{D/m}{d/m}$$

Conviene también recordar que si un **número natural** (un número entero positivo) mayor que la unidad sólo tiene como divisores al 1 y a si mismo, a ese número se le llama **número primo**. Son números primos el 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, etc. Los números naturales, diferentes de la unidad, que no son primos, se llaman **números compuestos** y se pueden expresar como el producto de números primos. Por ejemplo, el número 6 es un número compuesto y se puede expresar como producto de números primos: $6 = 2 * 3$.

También decimos que el numerador y denominador de una fracción simple son números primos relativos o primos entre si. Es decir, son **números primos relativos** si el máximo común divisor de ambos números es el 1. Por ejemplo en la fracción $\frac{3}{4}$, el 3 y el 4 son números primos relativos.

4.7.3. Inverso multiplicativo

Anteriormente para la suma, definimos que el inverso aditivo de un número a es un número $-a$ tal que sumado al número a nos da el número 0, el neutro aditivo.

Algo similar ocurre para la multiplicación. Decimos que el **inverso multiplicativo** de un número $a \neq 0$ es otro número $\frac{1}{a}$ tal que multiplicado por el número a nos da el 1, el neutro multiplicativo. Esto es:

$$\begin{aligned} a * \frac{1}{a} &= \frac{a}{1} * \frac{1}{a} \\ a * \frac{1}{a} &= \frac{a}{a} \\ a * \frac{1}{a} &= 1 \end{aligned}$$

Se dice que un número es el **inverso multiplicativo** de otro, cuando al multiplicarlos el resultado es 1.

4.7.4. Las divisiones como productos

En forma análoga a la resta, que se interpreta como la suma con el inverso aditivo del sustraendo; si queremos dividir a entre b, esta división $\frac{a}{b}$ se puede expresar como a por el inverso multiplicativo de b (el cual es $\frac{1}{b}$). Esto es:

$$\frac{a}{b} = a * \frac{1}{b}$$

Si hacemos el producto del lado derecho tenemos: $\frac{a}{1} * \frac{1}{b} = \frac{a}{b}$, que es la misma fracción del lado izquierdo de la igualdad.

Ahora bien, si los números $a = \frac{c}{d}$ y $b = \frac{e}{f}$, son fracciones, la división $\frac{a}{b}$ se realiza de la misma manera, tomando en cuenta que el inverso multiplicativo de b es $\frac{f}{e}$. Es decir:

$$\begin{aligned} \frac{e}{f}\,\frac{f}{e} &= \frac{ef}{fe} \\ \frac{e}{f}\,\frac{f}{e} &= 1 \end{aligned}$$

La división de fracciones se efectúa de la siguiente forma:

$$\frac{\frac{c}{d}}{\frac{e}{f}} = \frac{c}{d} * \frac{f}{e} \tag{4.10}$$

$$\frac{\frac{c}{d}}{\frac{e}{f}} = \frac{c * f}{d * e} \tag{4.11}$$

A menudo a este procedimiento se le conoce como **regla de la herradura** para la división de fracciones.

4.7.5. División con números positivos y negativos

Para completar el estudio de las fracciones y las divisiones es conveniente validar que sucede cuando el numerador (o dividendo) o el denominador (o divisor) son negativos. En los siguientes razonamientos vamos a considerar fracciones donde el numerador D es un múltiplo del denominador d; es decir, tenemos que la división $\frac{D}{d}$ es igual al cociente c, debido a que el residuo es cero. Esto es:

$$\frac{D}{d} = c$$

De tal manera que se cumple la igualdad:

$$D = d * c$$

Fracción con numerador negativo y denominador positivo

Consideremos el caso de la fracción $\frac{-6}{2}$. Esta fracción indica que -6 (6 cilindros huecos) se dividen en dos partes iguales, lo cual nos da -3. Es decir:

$$\frac{-6}{2} = -3$$

Es decir, un número negativo entre un número positivo nos da un número negativo. Este resultado es congruente con la regla de los signos de la multiplicación:

$$-6 = (2) * (-3)$$

Por otro lado, el resultado -3 se puede también expresar como el inverso aditivo de la fracción $\frac{6}{2}$,

$$\frac{-6}{2} = -\frac{6}{2}$$

En el caso general, tenemos que si a y b son enteros positivos, se cumple lo siguiente:

$$\frac{-a}{b} = -\frac{a}{b}$$

Fracción con numerador positivo y denominador negativo

Consideremos el caso de la fracción $\frac{6}{-2}$. Como sabemos que:

$$6 = (-2) * (-3)$$

Tenemos que necesariamente el resultado de la fracción es -3,

$$\frac{6}{-2} = -3$$

De otra manera, no se cumpliría la regla de los signos de la multiplicación. Por otro lado, el resultado -3 se puede también expresar como el inverso aditivo de la fracción $\frac{6}{2}$,

$$\frac{6}{-2} = -\frac{6}{2}$$

En el caso general, tenemos que si a y b son enteros positivos, se cumple lo siguiente:

$$\frac{a}{-b} = -\frac{a}{b}$$

Fracción con numerador negativo y denominador negativo

Consideremos el caso de la fracción $\frac{-6}{-2}$. Como sabemos que:

$$-6 = (-2) * (3)$$

Tenemos que necesariamente el resultado de la fracción es 3,

$$\frac{-6}{-2} = 3$$

De otra manera, no se cumpliría la regla de los signos de la multiplicación. Por otro lado, el resultado 3 se puede también expresar como la fracción $\frac{6}{2}$,

$$\frac{-6}{-2} = \frac{6}{2}$$

En el caso general, tenemos que si a y b son enteros positivos, se cumple lo siguiente:

$$\frac{-a}{-b} = \frac{a}{b}$$

Un caso particular ocurre cuando $a = n$ y $b = n$. Es decir:

$$\frac{-n}{-n} = \frac{n}{n}$$

$$\frac{-n}{-n} = 1$$

Esto nos lleva a concluir que si al numerador y el denominador de una fracción se multiplica por un entero $n \neq 0$ (positivo o negativo), la fracción no se altera; es decir obtenemos una fracción equivalente a la original. Veamos un ejemplo donde podemos simplificar una expresión aprovechando nuestros conocimientos sobre fracciones.

$$\begin{aligned}
\frac{-x^2+2x-1}{-1} &= \frac{-x^2+2x-1}{-1} \\
\frac{-x^2+2x-1}{-1} &= \frac{-1}{-1}\,\frac{-x^2+2x-1}{-1} \\
\frac{-x^2+2x-1}{-1} &= \frac{(-1)(-x^2+2x-1)}{(-1)(-1)} \\
\frac{-x^2+2x-1}{-1} &= \frac{x^2-2x+1}{1} \\
\frac{-x^2+2x-1}{-1} &= x^2-2x+1
\end{aligned}$$

Regla de los signos para la división

De los resultados anteriores podemos concluir que el signo (positivo o negativo) del resultado obtenido en una fracción o división sigue el mismo comportamiento que la multiplicación.

Regla de los signos de la división. El resultado de la división de números de diferente signo, es negativo; y el resultado de la división de números del mismo signo, es positivo. Si a y b son números positivos, tenemos

$$\begin{aligned}
\tfrac{a}{b} &= \tfrac{a}{b} \quad , \quad (+)/(+) = (+) \\
\tfrac{-a}{b} &= -\tfrac{a}{b} \quad , \quad (-)/(+) = (-) \\
\tfrac{a}{-b} &= -\tfrac{a}{b} \quad , \quad (+)/(-) = (-) \\
\tfrac{-a}{-b} &= \tfrac{a}{b} \quad , \quad (-)/(-) = (+)
\end{aligned}$$

4.8. Potencias negativas y fraccionarias

4.8.1. Potencias negativas

Aprovechando las fracciones, se define un número elevado a una potencia negativa de la siguiente manera.

Un número a **elevado a la potencia entera negativa** $-n$ se define por

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n} \tag{4.12}$$

De esta manera tenemos que: $a^{-1} = \frac{1}{a}$, $a^{-2} = \frac{1}{a^2}$, $a^{-3} = \frac{1}{a^3}$, etc.

4.8.2. Raíces

Se define la raíz n–ésima de un número, siendo n un entero positivo, de la siguiente manera.

La raíz n-ésima de un número a se define como el número b tal que la siguiente igualdad se cumple:

$$b^n = a \tag{4.13}$$

y se denota como $\sqrt[n]{a} = b$ o bien $a^{\left(\frac{1}{n}\right)} = b$.

Si $n = 2$, se utiliza simplemente el símbolo $\sqrt{a}$ y se conoce como raíz cuadrada. Cuando $n = 3$ se denomina raíz cúbica. Veamos algunos ejemplos:

- $\sqrt{4} = 2$ y también $\sqrt{4} = -2$. Debido a que $2^2 = 4$ y $(-2)^2 = 4$.
- $\sqrt[3]{1000} = 10$, porque $10^3 = 1000$.
- $\sqrt[3]{-1000} = -10$, porque $(-10)^3 = (-10) * (-10) * (-10) = -1000$.

Es importante observar que cuando n es par, se pueden tener dos resultados, como en el caso de $\sqrt{4}$, uno positivo y otro negativo. También puede ocurrir que no exista la raíz. Por la regla de los signos no hay forma de que el producto de dos números iguales sea negativo, por lo tanto no existe la raíz cuadrada de un número negativo (por ahora, cuando se incluyan los números imaginarios en el capítulo 13, las raíces de números negativos si existen).

Normalmente, cuando expresamos $\sqrt{4}$ nos referiremos a la raíz cuadrada positiva del número 4, en este caso $\sqrt{4} = 2$. Si queremos expresar la raíz cuadrada negativa lo expresamos como $-\sqrt{4} = -2$. Sin embargo, si queremos resaltar que existen las dos raíces, lo podemos expresar como $x = \pm\sqrt{4}$, $x_1 = \sqrt{4}$, $x_2 = -\sqrt{4}$.

4.8.3. Productos y divisiones de potencias

Si queremos multiplicar potencias de la misma base, por ejemplo:

$$\begin{aligned} a^3 * a^2 &= (1 * a * a * a) * (1 * a * a) \\ a^3 * a^2 &= 1 * a * a * a * a * a \\ a^3 * a^2 &= a^5 \end{aligned}$$

El nuevo exponente de a es la suma de los exponentes $3 + 2 = 5$. Obtenemos el mismo resultado de suma de exponentes cuando tenemos exponentes fraccionarios. Por ejemplo:

$$a^{\frac{1}{2}} * a^{\frac{1}{2}} = a$$

En este caso $\frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$. Por otro lado si queremos dividir potencias de una misma base, por ejemplo:

$$\begin{aligned} \frac{a^5}{a^2} &= \frac{1 * a * a * a * a * a}{1 * a * a} \\ \frac{a^5}{a^2} &= \frac{1 * a * a * a}{1} * \frac{a * a}{a * a} \\ \frac{a^5}{a^2} &= (1 * a * a * a) * 1 \\ \frac{a^5}{a^2} &= a^3 \end{aligned}$$

El nuevo exponente de a es la resta de los exponentes $5 - 2 = 3$. Si ahora queremos elevar a una potencia otra potencia, por ejemplo:

$$\begin{aligned} \left(a^2\right)^3 &= 1 * a^2 * a^2 * a^2 \\ \left(a^2\right)^3 &= (a^2 * a^2) * a^2 \\ \left(a^2\right)^3 &= a^4 * a^2 \\ \left(a^2\right)^3 &= a^6 \end{aligned}$$

El nuevo exponente de a es el producto de los exponentes $2 * 3 = 6$. Finalmente combinemos potencias y raíces, como en el siguiente ejemplo:

$$\begin{aligned} \left(100^{\frac{1}{2}}\right)^2 &= 10^2 \\ \left(100^{\frac{1}{2}}\right)^2 &= 100 \end{aligned}$$

El nuevo exponente de 100 vuelve a ser el producto de los exponentes $\frac{1}{2} * 2 = 1$.

Combinando raíces y potencias obtenemos potencias con exponentes fraccionarios. Por ejemplo:

$$a^{\frac{3}{2}} = \left(a^3\right)^{\frac{1}{2}}$$

o bien:

$$a^{\frac{3}{2}} = \left(a^{\frac{1}{2}}\right)^3$$

Por ejemplo, si $a = 100$ en el ejemplo anterior, tenemos

$$\begin{aligned} 100^{\frac{3}{2}} &= \left(100^3\right)^{\frac{1}{2}} \\ 100^{\frac{3}{2}} &= (1,000,000)^{\frac{1}{2}} \\ 100^{\frac{3}{2}} &= 1,000 \end{aligned}$$

en el otro caso tenemos

$$\begin{aligned} 100^{\frac{3}{2}} &= \left(100^{\frac{1}{2}}\right)^3 \\ 100^{\frac{3}{2}} &= (10)^3 \\ 100^{\frac{3}{2}} &= 1,000 \end{aligned}$$

En las **operaciones de potencias y raíces** se siguen las siguientes reglas:

$$a^m * a^n = a^{m+n} \tag{4.14}$$

$$\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n} \tag{4.15}$$

$$(a^m)^n = a^{m*n} \tag{4.16}$$

Donde m y n son números racionales. Recuerde que los enteros son un caso especial de los números racionales o fracciones.

4.8.4. Potencias de productos y fracciones

Recordemos que la potencia de un número es un producto repetido. Consideremos ahora el caso de que el número sea en realidad un producto. Por ejemplo:

$$\begin{aligned} (ab)^2 &= 1 * (ab) * (ab) \\ &= (1 * a * a)(1 * b * b) \\ &= a^2 b^2 \end{aligned}$$

Vemos que el exponente pasa a cada factor del producto. Esto también se verifica si la potencia es una raíz, por ejemplo:

$$\begin{aligned} (4 * 9)^{\frac{1}{2}} &= 4^{\frac{1}{2}} * 9^{\frac{1}{2}} \\ &= 2 * 3 \\ &= 6 \end{aligned}$$

Cuando se eleva una fracción a una potencia, también tenemos productos repetidos. Por ejemplo:

$$\begin{aligned}\left(\frac{a}{b}\right)^2 &= 1 * \frac{a}{b} * \frac{a}{b}\\ &= \frac{1 * a * a}{1 * b * b}\\ &= \frac{a^2}{b^2}\end{aligned}$$

En forma similar, la raíz de una fracción es igual a obtener por separados las raíces del numerador y denominador. Por ejemplo:

$$\begin{aligned}\left(\frac{4}{9}\right)^{\frac{1}{2}} &= \frac{4^{\frac{1}{2}}}{9^{\frac{1}{2}}}\\ &= \frac{2}{3}\end{aligned}$$

Lo cual podemos comprobar fácilmente:

$$\begin{aligned}\left(\frac{2}{3}\right)^2 &= \frac{2}{3} * \frac{2}{3}\\ &= \frac{4}{9}\end{aligned}$$

En las **operaciones de potencias de productos o fracciones** se verifica:

$$(ab)^n = a^n b^n \tag{4.17}$$

$$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n} \tag{4.18}$$

Donde n es un número racional o fracción.

4.9. La notación decimal

En el sistema de numeración decimal, cuya base es 10, las primeras potencias negativas son las siguientes:

- $10^{-1} = \frac{1}{10}$. Llamamos un décimo a la fracción $\frac{1}{10}$.
- $10^{-2} = \frac{1}{100}$. Llamamos un centésimo a la fracción $\frac{1}{100}$.
- $10^{-3} = \frac{1}{1{,}000}$. Llamamos un milésimo a la fracción $\frac{1}{1{,}000}$.
- $10^{-4} = \frac{1}{10{,}000}$. Llamamos un diez milésimo a la fracción $\frac{1}{10{,}000}$.

- $10^{-5} = \frac{1}{100{,}000}$. Llamamos un cien milésimo a la fracción $\frac{1}{100{,}000}$.
- $10^{-6} = \frac{1}{1{,}000{,}000}$. Llamamos un millonésimo a la fracción $\frac{1}{1{,}000{,}000}$.

Cuando se utilizan números decimales expresados con punto decimal, los digitos a la derecha del punto decimal se multiplican por potencias negativas de 10, iniciando con 10^{-1}, después 10^{-2}, etc. Por ejemplo el número 567.123 significa:

$$\begin{aligned}
567.123 &= 5*10^2+6*10^1+7*10^0+1*10^{-1}+2*10^{-2}+3*10^{-3}\\
567.123 &= 5*100+6*10+7*1+1*\frac{1}{10}+2*\frac{1}{100}+3*\frac{1}{1000}\\
567.123 &= 500+60+7+\frac{1}{10}+\frac{2}{100}+\frac{3}{1000}
\end{aligned}$$

4.9.1. Multiplicación de números decimales por potencias de 10

Veamos que sucede cuando multiplicamos un número expresado en la notación decimal por una potencia de 10:

$$\begin{aligned}
123*10 &= (1*10^2+2*10^1+3*10^0)*10^1\\
123*10 &= 1*10^2*10^1+2*10^1*10^1+3*10^0*10^1\\
123*10 &= 1*(10^2*10^1)+2*(10^1*10^1)+3*(10^0*10^1)\\
123*10 &= 1*10^{2+1}+2*10^{1+1}+3*10^{0+1}\\
123*10 &= 1*10^3+2*10^2+3*10^1\\
123*10 &= 1230
\end{aligned}$$

Cuando multiplicamos por 100:

$$\begin{aligned}
123*100 &= (1*10^2+2*10^1+3*10^0)*10^2\\
123*100 &= 1*10^2*10^2+2*10^1*10^2+3*10^0*10^2\\
123*100 &= 1*(10^2*10^2)+2*(10^1*10^2)+3*(10^0*10^2)\\
123*100 &= 1*10^{2+2}+2*10^{1+2}+3*10^{0+2}\\
123*100 &= 1*10^4+2*10^3+3*10^2\\
123*100 &= 12300
\end{aligned}$$

Podemos decir que cuando multiplicamos por 10 a 123.00 el punto decimal se desplaza un lugar a la derecha, para dar el resultado 1230.0. Cuando multiplicamos por 100 a 123.00 el punto decimal se desplaza dos lugares a la derecha, para dar el resultado 12300.

Cuando multiplicamos un número decimal por 10^n, siendo n positivo, el punto decimal se desplaza n lugares a la derecha.

Ahora veamos que sucede cuando multiplicamos un número expresado en la notación decimal por una potencia negativa de 10. Por ejemplo al multiplicar por $\frac{1}{10}$, lo cual es equivalente a dividir entre 10, tenemos

$$\begin{aligned}
\frac{123}{10} &= 123 * \frac{1}{10} \\
\frac{123}{10} &= 123 * 10^{-1} \\
\frac{123}{10} &= (1 * 10^2 + 2 * 10^1 + 3 * 10^0) * 10^{-1} \\
\frac{123}{10} &= 1 * 10^2 * 10^{-1} + 2 * 10^1 * 10^{-1} + 3 * 10^0 * 10^{-1} \\
\frac{123}{10} &= 1 * (10^2 * 10^{-1}) + 2 * (10^1 * 10^{-1}) + 3 * (10^0 * 10^{-1}) \\
\frac{123}{10} &= 1 * 10^{2-1} + 2 * 10^{1-1} + 3 * 10^{0-1} \\
\frac{123}{10} &= 1 * 10^1 + 2 * 10^0 + 3 * 10^{-1} \\
\frac{123}{10} &= 12.3
\end{aligned}$$

Cuando dividimos entre 100,

$$\begin{aligned}
\frac{123}{100} &= 123 * \frac{1}{100} \\
\frac{123}{100} &= 123 * 10^{-2} \\
\frac{123}{100} &= (1 * 10^2 + 2 * 10^1 + 3 * 10^0) * 10^{-2} \\
\frac{123}{100} &= 1 * 10^2 * 10^{-2} + 2 * 10^1 * 10^{-2} + 3 * 10^0 * 10^{-2} \\
\frac{123}{100} &= 1 * (10^2 * 10^{-2}) + 2 * (10^1 * 10^{-2}) + 3 * (10^0 * 10^{-2}) \\
\frac{123}{100} &= 1 * 10^{2-2} + 2 * 10^{1-2} + 3 * 10^{0-2} \\
\frac{123}{100} &= 1 * 10^0 + 2 * 10^{-1} + 3 * 10^{-2} \\
\frac{123}{100} &= 1.23
\end{aligned}$$

Podemos decir que cuando dividimos entre 10 a $123.$, el punto decimal se desplaza un lugar a la izquierda, para dar el resultado 12.3. Cuando dividimos entre 100 a $123.$ el punto decimal se desplaza dos lugares a la izquierda, para dar el resultado 1.23.

Cuando multiplicamos un número decimal por 10^{-n}, siendo n positivo, el punto decimal se desplaza n lugares a la izquierda.

4.10. La recta numérica

Como vimos en este capítulo, los números enteros son un caso especial de los números fraccionarios, también conocidos como **números racionales**.

Podemos representar a todos los números racionales en una línea recta, llamada **recta numérica**, que representa cada número mediante un punto en dicha recta. En la figura 4.3 se presenta la recta numérica donde se han indicado los primeros enteros positivos, el 0 y los primeros enteros negativos. Además se indican las fracciones $\frac{1}{2}$, que corresponde a un punto localizado a la mitad de la distancia entre el 0 y el 1, y $-\frac{1}{2}$, que corresponde a un punto localizado a la mitad de la distancia entre el -1 y el 0.

También se indica la fracción $\frac{5}{4}$. Para ubicar el punto correspondiente a $\frac{5}{4}$, sabemos que $\frac{5}{4} = 1 + \frac{1}{4}$, de manera que conviene dividir la distancia entre el 1 y el 2 en cuatro segmentos de igual longitud, como se muestra en la figura 4.3.

Recordemos que un número a es mayor que otro b si el punto correspondiente a a está a la derecha del punto b. De esta manera podemos decir que $1 < \frac{5}{4}$, $-\frac{1}{2} < 0$, $-2 < -1$, etc.

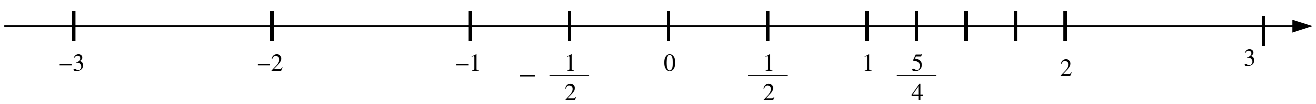


Figura 4.3: La recta numérica.

En la recta numérica existen puntos que corresponden a números que no son racionales. Es decir, números que no se pueden expresar como una fracción. A dichos números se les conoce como **números irracionales**. Los números racionales y los irracionales forman lo que se conoce como los **números reales**.

Un ejemplo de un número irracional es el número π (se leé "número pi"), la relación entre la longitud de una circunferencia relativo a su diámetro:

$$\pi = \frac{\text{longitud\_circunferencia}}{\text{diámetro}} \tag{4.19}$$

$$\pi = 3.14159265358979323846\ldots \tag{4.20}$$

En la mayoría de las operaciones es suficiente considerar los 4 primeros decimales, es decir: $\pi = 3.1416$.

Los números irracionales tienen un número infinito de decimales, sin secuencias de digitos repetidos, como el caso de π. Cuando la secuencia de digitos es infinita pero periódica, se trata de un número racional (una fracción). Por ejemplo: la expresión decimal de $1/11$ es $(1/11 = 0.09090909\ldots)$, aunque es infinita, es periódica; se repite la secuencia "09".

4.11. Ejercicios propuestos

Reemplace el símbolo ? en las siguientes expresiones por $=$, $<$ o $>$, según corresponda a la relación correcta entre los números.

1. $\frac{1}{2}$? $\frac{10}{20}$
2. $\frac{1}{2}$? $\frac{5}{10}$

3. $\frac{1}{3} \quad ? \quad 0.3$
4. $\frac{1}{3} \quad ? \quad 0.33$
5. $\frac{7}{3} \quad ? \quad \frac{9}{4}$
6. $\frac{-3}{10} \quad ? \quad \frac{-1}{3}$
7. $\frac{5}{3} \quad ? \quad 1.6$
8. $\frac{1}{3} \quad ? \quad 3 * 10^{-1}$

Para cada igualdad encuentre el valor de a al realizar las operaciones del lado izquierdo de las igualdades. Exprese su resultado como una fracción simple menor de la unidad y mayor que cero, o un entero más una fracción simple menor que la unidad y mayor que cero, según corresponda.

9. $\frac{4}{2} + \frac{4}{3} = a$
10. $\frac{1}{3} + \frac{4}{6} = a$
11. $\frac{1}{3} - 1 = a$
12. $\frac{1}{2} + \frac{2}{4} = a$
13. $\frac{5}{9} + \frac{10}{11} = a$
14. $\frac{10}{-3} + \frac{-4}{-6} = a$
15. $\frac{1}{3} + 0.3 = a$
16. $\frac{1}{3} - 0.6 = a$
17. $\frac{-1}{3} * 0.9 = a$
18. $\frac{-1}{3} * (-1.3) = a$
19. $\frac{-1}{3} * 3 = a$
20. $\frac{-5}{7} * \left(\frac{10}{-3} - 0.3\right) = a$
21. $\frac{-5}{7} * \left(\frac{10}{-3} + 3.3\right) = a$
22. $\frac{10}{7} * 0.01 = a$
23. $\left(\frac{1}{2}\right)^2 = a$
24. $\left(\frac{-1}{2}\right)^3 = a$
25. $\left(\frac{100}{25}\right)^{\frac{1}{2}} = a$
26. $\left(\frac{-27}{125}\right)^{\frac{1}{3}} = a$

Efectúa las siguientes operaciones, expresando el valor de a como el entero que corresponde al cociente más la fracción que involucra al residuo.

27. $a = \frac{10}{3}$
28. $a = \frac{19}{4}$
29. $a = \frac{27}{7}$
30. $a = \frac{-12}{3}$
31. $a = \frac{-1289}{-3}$
32. $a = \frac{0.15}{0.03}$

Capítulo 5

Algoritmos de las operaciones básicas

En este capítulo revisaremos los procedimientos o **algoritmos** para realizar las cuatro operaciones básicas: la suma, la resta, la multiplicación y la división de números expresados en el sistema de numeración decimal; haciendo énfasis en comprender porqué se realizan de dicha forma.

El lector interesado también puede consultar el libro (Moreno Aranda, 2002), donde se presentan numerosos ejemplos de la notación decimal y los algoritmos de las operaciones básicas.

Los algoritmos de estas operaciones, conteniendo la secuencia de pasos o instrucciones detalladas para obtener el resultado, se ilustrarán a través de ejemplos, iniciando con los casos más sencillos y avanzando hacia los casos más complicados.

5.1. La notación decimal

Recordemos que en la notación decimal la base es 10 (el total de dedos de nuestras manos) y los dígitos son: 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 y 9. La posición de cada dígito con respecto al punto decimal define su valor relativo en función de potencias de 10. Así el número 123.45 significa:

$$
\begin{aligned}
123.45 &= 1*10^2+2*10^1+3*10^0+4*10^{-1}+5*10^{-2}\\
123.45 &= 1*100+2*10+3*1+4*\frac{1}{10}+5*\frac{1}{100}\\
123.45 &= 100+20+3+\frac{4}{10}+\frac{5}{100}
\end{aligned}
$$

Es decir, 123.45 equivale a la suma de 1 centena, 2 decenas, 3 unidades, 4 décimos y 5 centésimos. Una observación clave en el sistema decimal es que un dígito en cierta posición es 10 veces más grande que en la posición adyacente a su derecha. Por ejemplo: 1 centena es igual a 10 decenas, $1*100=10*10$; 1 decena es igual a 10 unidades, $1*10=10*1$; 1 unidad es igual a 10 décimos, $1*1=10*\frac{1}{10}$; 1 décimo es igual a 10 centésimos, $1*\frac{1}{10}=10*\frac{1}{100}$; etc.

5.2. La suma

Iniciemos por las sumas más sencillas, aquellas en las cuales los sumandos tienen un sólo dígito. Por ejemplo $0+1=1$, $1+3=4$, $9+9=18$, etc. En la tabla 5.1 se presenta el resultado de todas las combinaciones posibles de suma de dígitos. Para obtener el resultado simplemente nos ubicamos en la columna que corresponde al primer dígito y en el renglón que corresponde al segundo dígito. Por ejemplo, en el renglón del dígito 9 y columna del dígito 9, el resultado es 18.

número	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
2	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
3	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
4	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
5	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
6	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
7	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
8	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17
9	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18

Tabla 5.1: Tabla de la suma de dos dígitos.

5.2.1. Ejemplo: $123 + 234$

Calculemos ahora la suma de los números 123 y 234, aprovechando la tabla 5.1 y las propiedades de la suma y el producto:

$$\begin{array}{rcrrr}
123+234 & = & 1*10^2 & +2*10^1 & +3*10^0 \\
 & & +2*10^2 & +3*10^1 & +4*10^0 \\
123+234 & = & (1+2)*10^2 & +(2+3)*10^1 & +(3+4)*10^0 \\
123+234 & = & 3*10^2 & +5*10^1 & +7*10^0 \\
123+234 & = & 357 & &
\end{array}$$

En forma simplificada, esta operación se puede escribir de la siguiente manera:

$$\begin{array}{cccc}
 & 1 & 2 & 3 \\
+ & 2 & 3 & 4 \\
\hline
 & 3 & 5 & 7
\end{array}$$

5.2.2. Ejemplo: $123 + 238$

Ahora abordemos un caso más complejo, donde la suma de los dígitos es mayor que 9. Por ejemplo, sumemos 123 con 238:

$$\begin{array}{rcrrrl}
123+238 & = & 1*10^2 & +2*10^1 & +3*10^0 & \\
 & & +2*10^2 & +3*10^1 & +8*10^0 & \\
123+238 & = & (1+2)*10^2 & +(2+3)*10^1 & +(3+8)*10^0 & \\
123+234 & = & 3*10^2 & +5*10^1 & +11*10^0 & \\
123+234 & = & 3*10^2 & +5*10^1 & +(10+1)*10^0 & |r_1 \\
123+234 & = & 3*10^2 & +5*10^1 & +1*10^1+1*10^0 & |r_2 \\
123+234 & = & 3*10^2 & +(5+1)*10^1 & +1*10^0 & |r_3 \\
123+234 & = & 3*10^2 & +6*10^1 & +1*10^0 & |r_4 \\
123+234 & = & 361 & & &
\end{array}$$

Los renglones etiquetados como r_1 y r_2 justifican el paso de las 11 unidades a 1 decena más una unidad. La decena adicional se suma a las decenas existentes (renglones r_3 y r_4).

En forma simplificada, esta operación se puede escribir de la siguiente manera:

$$\begin{array}{cccc|l} & & (1) & & r_0 \\ & 1 & 2 & 3 & \\ + & 2 & 3 & 8 & \\ \hline & 3 & 6 & 1 & \end{array}$$

Observe que en el renglón marcado como r_0 se muestra, entre paréntesis, la decena adicional que se suma en la columna de las decenas. Esta unidad adicional se conoce como **acarreo**. Cuando la suma de una columna es mayor que 9 se genera un acarreo a la siguiente posición a la izquierda. El procedimiento inicia sumando los dígitos de la columna de la derecha (las unidades) y avanzando hacia las columnas de la izquierda. Por ejemplo:

$$\begin{array}{ccccc} & (1) & & (1) & \\ & & 2 & 2 & 2 \\ + & & 9 & 3 & 8 \\ \hline & 1 & 1 & 6 & 0 \end{array}$$

5.2.3. Ejemplo: suma de tres números.

El procedimiento anterior se puede extender a sumar más de dos números, por ejemplo:

$$\begin{array}{ccccc} & (1) & & (1) & \\ & & 1 & 2 & 3 \\ & & 2 & 2 & 2 \\ + & & 9 & 3 & 8 \\ \hline & 1 & 2 & 8 & 3 \end{array}$$

5.2.4. Suma de números negativos.

Cuando los sumandos son negativos podemos multiplicar dos veces por -1 para convertir la operación en una suma de números positivos. Por ejemplo:

$$\begin{aligned} -113-253 &= (-1)(-1)(-113-253) \\ -113-253 &= (-1)((-1)(-113-253)) \\ -113-253 &= (-1)(113+253)) \\ -113-253 &= (-1)(366)) \\ -113-253 &= -366 \end{aligned}$$

Es decir, se efectuó la suma $113+253=366$ y el resultado se multiplicó por -1, para dar el resultado final de -366.

5.2.5. Suma de números con decimales.

El algoritmo que se ha seguido se puede aplicar a los números decimales que contienen potencias negativas de 10. Por ejemplo $1.25+1.9$:

$$
\begin{array}{rcrrr}
1.25+1.9 & = & 1*10^0 & +2*10^{-1} & +5*10^{-2} \\
 & & +1*10^0 & +9*10^{-1} & \\
1.25+1.9 & = & (1+1)*10^0 & +(2+9)*10^{-1} & +5*10^{-2} \\
1.25+1.9 & = & 2*10^0 & +11*10^{-1} & +5*10^{-2} \\
1.25+1.9 & = & 2*10^0 & +(10+1)*10^{-1} & +5*10^{-2} \\
1.25+1.9 & = & 2*10^0 & +1+1*10^{-1} & +5*10^{-2} \\
1.25+1.9 & = & (2+1)*10^0 & +1*10^{-1} & +5*10^{-2} \\
1.25+1.9 & = & 3*10^0 & +1*10^{-1} & +5*10^{-2} \\
1.25+1.9 & = & 3.15 & &
\end{array}
$$

Es decir, los 11 décimos se transformaron en un décimo y una unidad (el acarreo). En forma simplificada, esta operación se puede escribir de la siguiente manera:

$$
\begin{array}{crrr}
 & (1) & & \\
 & 1. & 2 & 5 \\
+ & 1. & 9 & \\
\hline
 & 3. & 1 & 5
\end{array}
$$

5.3. La resta

Al igual que en la suma, iniciemos por las restas más sencillas, aquellas en las cuales el minuendo tienen un sólo dígito, al igual que el resultado. Por ejemplo $2-1=1$, $4-2=3$, $18-9=9$, etc. En la tabla 5.2 se presenta el resultado de todas las combinaciones posibles de este tipo de resta. Para obtener el resultado simplemente nos ubicamos en la columna que corresponde al primer número y en el renglón que contiene el segundo número (el que se resta). Por ejemplo, el resultado de $18-9$ lo encontramos en la columna del 18, y en el renglón del -9. El resultado es 9.

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18
-0	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18
- 1		0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17
- 2			0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
- 3				0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
- 4					0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
- 5						0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
- 6							0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
- 7								0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
- 8									0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
- 9										0	1	2	3	4	5	6	7	8	9

Tabla 5.2: Tabla de la resta.

5.3.1. Ejemplo: $895-234$

Calculemos ahora la siguiente operación: $895-234$, aprovechando la tabla 5.2 y las propiedades de la suma y el producto:

$$
\begin{array}{rcrrr}
895-234 & = & 8*10^2 & +9*10^1 & +5*10^0 \\
 & & -(2*10^2 & +3*10^1 & +4*10^0)
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{rcrrr}
895-234 & = & 8*10^2 & +9*10^1 & +5*10^0 \\
 & & -2*10^2 & -3*10^1 & -4*10^0 \\
123+234 & = & (8-2)*10^2 & +(9-3)*10^1 & +(5-4)*10^0 \\
123+234 & = & 6*10^2 & +6*10^1 & +1*10^0 \\
123+234 & = & 661 & &
\end{array}
$$

En forma simplificada, esta operación se puede escribir de la siguiente manera:

$$
\begin{array}{cccc}
 & 8 & 9 & 5 \\
- & 2 & 3 & 4 \\
\hline
 & 6 & 6 & 1
\end{array}
$$

Observe que en todas las columnas el número que se restó (el sustraendo) es menor que el primer número (el minuendo).

5.3.2. Ejemplo: $895-238$

Ahora veamos que sucede cuando tenemos columnas donde el sustraendo es mayor que el minuendo. Por ejemplo, calculemos $895-238$:

$$
\begin{array}{rcrrrl}
895-238 & = & 8*10^2 & +9*10^1 & +5*10^0 & \\
 & & -(2*10^2 & +3*10^1 & +8*10^0) & \\
895-238 & = & 8*10^2 & +9*10^1 & +5*10^0 & \\
 & & -2*10^2 & -3*10^1 & -8*10^0 & \\
895-238 & = & 8*10^2 & +(8+1)*10^1 & +5*10^0 & |r_1 \\
 & & -2*10^2 & -3*10^1 & -8*10^0 & \\
895-238 & = & 8*10^2 & +8*10^1 & +10^1+5*10^0 & |r_2 \\
 & & -2*10^2 & -3*10^1 & -8*10^0 & \\
895-238 & = & 8*10^2 & +8*10^1 & +(10+5)*10^0 & |r_3 \\
 & & -2*10^2 & -3*10^1 & -8*10^0 & \\
895-238 & = & 8*10^2 & +8*10^1 & +15*10^0 & |r_4 \\
 & & -2*10^2 & -3*10^1 & -8*10^0 & \\
895-238 & = & 8*10^2 & +8*10^1 & & \\
 & & -2*10^2 & -3*10^1 & +(15-8)*10^0 & |r_5 \\
895-238 & = & 8*10^2 & +8*10^1 & & \\
 & & -2*10^2 & -3*10^1 & +7*10^0 & |r_6 \\
895-238 & = & 8*10^2 & & & \\
 & & -2*10^2 & +(8-3)*10^1 & +7*10^0 & |r_7 \\
895-238 & = & 8*10^2 & & & \\
 & & -2*10^2 & +5*10^1 & +7*10^0 & |r_8 \\
895-238 & = & (8-2)*10^2 & +5*10^1 & +7*10^0 & |r_9 \\
895-238 & = & 6*10^2 & +5*10^1 & +7*10^0 & |r_{10} \\
895-238 & = & 657 & & &
\end{array}
$$

Observe que en los renglones r_1, r_2, r_3 y r_4 las 9 decenas se convirtieron en 8 decenas y la decena adicional se convirtió en 10 unidades que sumadas a las 5 que tenía, dan un total de 15 unidades (renglón r_4). Con este préstamo el resultado de $15-8=7$ (renglones r_5 y r_6). Enseguida se procede a restar las decenas (renglones r_7 y r_8) y finalmente las centenas (renglones r_9 y r_{10}).

En forma simplificada, esta operación se puede escribir de la siguiente manera:

$$\begin{array}{cccc} & 8 & 9 & 5 \\ - & 2 & 3 & 8 \\ \hline \end{array}$$

Ahora bien, como en la columna de la derecha (de las unidades) es mayor el 8 que el 5, las 9 decenas se convierten en 8 decenas y 10 unidades que se suman a las 5 unidades. Esto lo representamos de la siguiente forma (observe el renglón r_0):

$$\begin{array}{ccccc} & & 8 & 15 & |r_0 \\ & 8 & \cancel{9} & \cancel{5} & \\ - & 2 & 3 & 8 & \\ \hline \end{array}$$

Ahora si podemos llevar a cabo la operación de resta en la columna de las unidades:

$$\begin{array}{cccc} & & 8 & 15 \\ & 8 & \cancel{9} & \cancel{5} \\ - & 2 & 3 & 8 \\ \hline & & & 7 \end{array}$$

Enseguida podemos proceder a realizar la resta de la columna de las decenas:

$$\begin{array}{cccc} & & 8 & 15 \\ & 8 & \cancel{9} & \cancel{5} \\ - & 2 & 3 & 8 \\ \hline & & 5 & 7 \end{array}$$

Finalmente la resta en la columna de las centenas:

$$\begin{array}{cccc} & & 8 & 15 \\ & 8 & \cancel{9} & \cancel{5} \\ - & 2 & 3 & 8 \\ \hline & 6 & 5 & 7 \end{array}$$

5.3.3. Ejemplo: $805 - 238$

Veamos ahora un ejemplo más complicado:

$$\begin{array}{cccc} & 8 & 0 & 5 \\ - & 2 & 3 & 8 \\ \hline \end{array}$$

En este caso, la columna de las decenas es 0 en el primer renglón. Sin embargo, podemos convertir las 8 centenas en 7 centenas + 10 decenas. Esto lo representamos de la siguiente manera:

$$\begin{array}{cccc} & 7 & 10 & \\ & \cancel{8} & \cancel{0} & 5 \\ - & 2 & 3 & 8 \\ \hline \end{array}$$

Enseguida convertimos las 10 decenas en 9 decenas más 10 unidades las cuales se suman a las 5 unidades que tenemos:

$$\begin{array}{rrrr} & 7 & 9 & 15 \\ & \cancel{8} & \cancel{0} & \cancel{5} \\ - & 2 & 3 & 8 \\ \hline \end{array}$$

Ahora si podemos realizar la resta en la columna de las unidades y después en las decenas y finalmente en las centenas, para tener el resultado siguiente:

$$\begin{array}{rrrr} & 7 & 9 & 15 \\ & \cancel{8} & \cancel{0} & \cancel{5} \\ - & 2 & 3 & 8 \\ \hline & 5 & 6 & 7 \end{array}$$

5.3.4. Caso del sustraendo mayor que el minuendo.

Finalmente, cuando en una resta el sustraendo es mayor que el minuendo, podemos multiplicar dos veces por -1 para convertir la operación en una resta donde el minuendo es mayor que el sustraendo. Por ejemplo:

$$\begin{aligned} 13-253 &= (-1)(-1)(13-253) \\ 13-253 &= (-1)((-1)(13-253) \\ 13-253 &= (-1)(-13+253) \\ 13-253 &= (-1)(253-13) \\ 13-253 &= (-1)(240) \\ 13-253 &= -240 \end{aligned}$$

Es decir, se efectuó la resta $253 - 13 = 240$ y el resultado se multiplicó por -1, para dar el resultado final de -240.

5.3.5. Resta de números con decimales.

El algoritmo que se ha seguido se puede aplicar a los números decimales que contienen potencias negativas de 10. Por ejemplo $1.90 - 1.25$ se puede calcular en la forma simplificada de la siguiente manera:

$$\begin{array}{rrrr} & & 8 & 10 \\ & 1. & \cancel{9} & \cancel{0} \\ - & 1. & 2 & 5 \\ \hline & 0. & 6 & 5 \end{array}$$

En este caso, los 9 décimos se convirtieron en 8 décimos más diez centésimos ($\frac{9}{10} = \frac{8}{10} + \frac{10}{100}$). De esta manera, la resta de los centésimos se pudo llevar a cabo.

5.4. La multiplicación

Iniciemos por las multiplicaciones más sencillas, aquellas en las cuales los factores tienen un sólo dígito. Recordemos que la multiplicación es una suma repetida, por ejemplo:

$$3 * 5 = 0 + 5 + 5 + 5$$

Con este procedimiento en mente, podemos fácilmente calcular el resultado de todas las combinaciones posibles de dígitos, como se muestra en la tabla 5.3. Para obtener el resultado simplemente nos ubicamos en la columna que corresponde al primer factor y en el renglón que corresponde al segundo factor. Por ejemplo, en el renglón del dígito 9 y columna del dígito 9, el resultado es 81. Esto es, $9 * 9 = 81$.

número	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
2	0	2	4	6	8	10	12	14	16	18
3	0	3	6	9	12	15	18	21	24	27
4	0	4	8	12	16	20	24	28	32	36
5	0	5	10	15	20	25	30	35	40	45
6	0	6	12	18	24	30	36	42	48	54
7	0	7	14	21	28	35	42	49	56	63
8	0	8	16	24	32	40	48	56	64	72
9	0	9	18	27	36	45	54	63	72	81

Tabla 5.3: Tabla del producto de dos dígitos.

5.4.1. Ejemplo: $123 * 3$

Calculemos ahora el producto de los números 123 y 3, aprovechando la tabla 5.3, las propiedades del producto (en especial las propiedades distributiva y conmutativa) y de las potencias:

$$
\begin{array}{rcrrrl}
123 * 3 & = & (1 * 10^2 & +2 * 10^1 & +3 * 10^0) & *(3 * 10^0) \\
123 * 3 & = & 1 * 10^2 * 3 * 10^0 & +2 * 10^1 * 3 * 10^0 & +3 * 10^0 * 3 * 10^0 & |r_1 \\
123 * 3 & = & 1 * 3 * 10^2 * 10^0 & +2 * 3 * 10^1 * 10^0 & +3 * 3 * 10^0 * 10^0 & |r_2 \\
123 * 3 & = & 1 * 3 * 10^2 & +2 * 3 * 10^1 & +3 * 3 * 10^0 & |r_3 \\
123 * 3 & = & 3 * 10^2 & +6 * 10^1 & +9 * 10^0 & |r_4 \\
123 * 3 & = & 369 & & &
\end{array}
$$

En el renglón r_1 se aplicó la propiedad distributiva. En el renglón r_2 se aplicó la propiedad conmutativa del producto. En el renglón r_3 se realizaron los productos de potencias de 10. En el renglón r_4 se realizaron los productos de los dígitos, aprovechando la tabla de multiplicar 5.3.

En forma simplificada, esta operación se puede escribir de la siguiente manera:

$$
\begin{array}{cccc}
 & 1 & 2 & 3 \\
* & & & 3 \\
\hline
 & 3 & 6 & 9
\end{array}
$$

El procedimiento inicia multiplicando las unidades $3 * 3 = 9$, enseguida se multiplica el 3 por el dígito de las decenas $3 * 2 = 6$ y finalmente se multiplica el 3 por el dígito de las centenas $3 * 1 = 3$.

5.4.2. Ejemplo: $123 * 4$

Calculemos ahora el producto de los números 123 y 4:

$$
\begin{array}{llrrrl}
123*4 & = & (1*10^2 & +2*10^1 & +3*10^0) & \\
 & & & & *(4*10^0) & \\
123*4 & = & 1*10^2*4*10^0 & +2*10^1*4*10^0 & +3*10^0*4*10^0 & \\
123*4 & = & 1*4*10^2*10^0 & +2*4*10^1*10^0 & +3*4*10^0*10^0 & \\
123*4 & = & 1*4*10^2 & +2*4*10^1 & +3*4*10^0 & \\
123*4 & = & 4*10^2 & +8*10^1 & +12*10^0 & |r_1 \\
123*4 & = & 4*10^2 & +8*10^1 & +(10+2)*10^0 & |r_2 \\
123*4 & = & 4*10^2 & +8*10^1 & +10+2*10^0 & |r_3 \\
123*4 & = & 4*10^2 & +(8+1)*10^1 & +2*10^0 & |r_4 \\
123*4 & = & 4*10^2 & +9*10^1 & +2*10^0 & |r_5 \\
123*4 & = & 492 & & &
\end{array}
$$

En el renglón r_1 el producto $3*4 = 12$, genera un resultado mayor que 9. El número 12 se expresa entonces como una decena más 2 unidades (renglones r_2 y r_3). Enseguida esta decena se pasa a la columna de decenas, incrementando de 8 a 9 dicho número (renglones r_4 y r_5).

En forma simplificada, esta operación se puede escribir de la siguiente manera:

$$
\begin{array}{cccc}
 & 1 & 2 & 3 \\
* & & & 4 \\
\hline
 & & (1) & \\
 & 4 & 9 & 2
\end{array}
$$

El procedimiento inicia multiplicando $4*3 = 12$, generando un acarreo de una decena (el renglón que contiene el número en paréntesis se utilizó para poner el acarreo). Enseguida se realiza la multiplicación de $4*2+1=9$ (el producto de $4*2$ más el acarreo). Finalmente el producto $4*1=4$.

5.4.3. Ejemplo: $123*30$

Veamos ahora que sucede cuando multiplicamos los números 123 * 30:

$$
\begin{array}{llrrr}
123*30 & = & (1*10^2 & +2*10^1 & +3*10^0) \\
 & & & *(3*10^1) & \\
123*30 & = & 1*10^2*3*10^1 & +2*10^1*3*10^1 & +3*10^0*3*10^1 \\
123*30 & = & 1*3*10^2*10^1 & +2*3*10^1*10^1 & +3*3*10^0*10^1 \\
123*30 & = & 1*3*10^3 & +2*3*10^2 & +3*3*10^1 \\
123*30 & = & 3*10^3 & +6*10^2 & +9*10^1 \\
123*30 & = & 3690 & &
\end{array}
$$

Este resultado también lo podríamos haber obtenido al efectuar la siguiente operación, que resulta más sencilla:

$$
\begin{array}{llr}
123*30 & = & 123*(3*10) \\
123*30 & = & (123*3)*10 \\
123*30 & = & (369)*10 \\
123*30 & = & 3690
\end{array}
$$

Es decir, aprovechamos la propiedad asociativa del producto y el hecho de que multiplicar por 10 equivale a agregar un 0 a la derecha. Si hubiéramos multiplicado por 300 se agregan dos ceros a la derecha, por 3000, tres ceros a la derecha, etc. Este tema se revisó en la seccion 4.9.1 (página 50). En forma simplificada, esta operación se puede escribir de la siguiente manera:

$$\begin{array}{ccccc} & & 1 & 2 & 3 \\ * & & & 3 & 0 \\ \hline & 3 & 6 & 9 & 0 \end{array}$$

5.4.4. Ejemplo: $123 * 34$

Veamos un caso más complicado: $123 * 34$:

$$\begin{aligned} 123 * 34 &= 123 * (4 + 30) \\ 123 * 34 &= (123 * 4) + (123 * 30) \\ 123 * 34 &= 492 + 3690 \\ 123 * 34 &= 4182 \end{aligned}$$

Es decir, esta multiplicación implicó realizar dos multiplicaciones: una por las unidades del segundo número (el 4) y otra por las decenas del segundo número (el 30). Finalmente se suman ambos resultados para obtener el resultado final. En forma simplificada, esta operación se puede escribir de la siguiente manera:

$$\begin{array}{cccccl} & & 1 & 2 & 3 & \\ * & & & 3 & 4 & \\ \hline & & & \cancel{(1)} & & |r_1 \\ & & 4 & 9 & 2 & |r_2 \\ & & & & & |r_3 \\ & 3 & 6 & 9 & & |r_4 \\ \hline & (1) & (1) & & & |r_5 \\ & 4 & 1 & 8 & 2 & |r_6 \end{array}$$

Donde el renglón r_2 fue el resultado de multiplicar $123 * 4$, teniendo cuidado del acarreo de 1 que se generó al multiplicar $4 * 3$ (el renglón r_1 nos recuerda este acarreo). El renglón r_4 es el resultado de multiplicar $123 * 30$. Observe que la columna de las unidades aparece vacía (es cero). Finalmente en el renglón r_6 se tiene la suma de los dos resultados anteriores. Observe que al sumar las decenas: $9 + 9$, se generó un acarreo de una centena. También se generó un acarreo de un millar, al sumar las centenas y el acarreo: $4 + 6 + 1 = 11$. El renglón r_5 registra estos acarreos al realizar la suma.

5.4.5. Ejemplo: $123 * 834$

Este algoritmo se puede generalizar para números más grandes. Por ejemplo:

$$
\begin{array}{ccccccc}
 & & & 1 & 2 & 3 & \\
* & & & 8 & 3 & 4 & \\
\hline
 & & & & (1) & & \\
 & & & 4 & 9 & 2 & \\
 & & & & & & \\
 & & 3 & 6 & 9 & & \\
 & (1) & (2) & & & & \\
 & 9 & 8 & 4 & & & |r_1 \\
\hline
\end{array}
$$

Donde el renglón r_1 ahora corresponde a la multiplicación de $123*800$, teniendo cuidado de considerar el acarreo de 2 que se generó al multiplicar $8*3=24$. También se generó un acarreo de 1 al multiplicar $8*2+2=18$. Para facilitar los cálculos, los acarreos se han colocado en la fila superior al resultado del producto, utilizando paréntesis. Falta solamente efectuar la suma de los tres productos:

$$
\begin{array}{cccccc}
 & & & 1 & 2 & 3 \\
* & & & 8 & 3 & 4 \\
\hline
 & & & & \cancel{(1)} & \\
 & & & 4 & 9 & 2 \\
 & & & & & \\
 & & 3 & 6 & 9 & \\
 & \cancel{(1)} & \cancel{(2)} & & & \\
 & 9 & 8 & 4 & & \\
\hline
(1) & (1) & (1) & (1) & & \\
1 & 0 & 2 & 5 & 8 & 2
\end{array}
$$

Nuevamente, para facilitar los cálculos y evitar cometer errores se han tachado los acarreos anteriores y se han colocado los nuevos acarreos de la suma en la fila inmediata superior al resultado. Sin embargo, en la práctica es frecuente ir anotando en otro lado los acarreos que se van generando, quedando la multiplicación como sigue:

$$
\begin{array}{cccccc}
 & & & 1 & 2 & 3 \\
* & & & 8 & 3 & 4 \\
\hline
 & & & 4 & 9 & 2 \\
 & & 3 & 6 & 9 & \\
 & 9 & 8 & 4 & & \\
\hline
1 & 0 & 2 & 5 & 8 & 2
\end{array}
$$

5.4.6. Multiplicación con números decimales

Una forma sencilla para multiplicar números que incluyen decimales es convertirlos a números enteros, multiplicando por potencias positivas de 10. Al final, el producto se multiplica por las potencias negativas de 10. Por ejemplo:

$$
\begin{aligned}
1.32 * 0.002 &= (1.32 * 10^2 * 10^{-2}) * (0.002 * 10^3 * 10^{-3}) \\
1.32 * 0.002 &= (1.32 * 10^2) * (0.002 * 10^3) * (10^{-2} * 10^{-3}) \\
1.32 * 0.002 &= 132 * 2 * 10^{-2-3} \\
1.32 * 0.002 &= (132 * 2) * 10^{-5} \\
1.32 * 0.002 &= 264 * 10^{-5} \\
1.32 * 0.002 &= 0.00264
\end{aligned}
$$

Observe que $10^2 * 10^{-2} = 1$ de manera que al multiplicar 1.32 por esta cantidad, el número original no se altera. De igual forma $10^3 * 10^{-3} = 1$ de manera que al multiplicar 0.002 por esta cantidad, tampoco se altera dicho número. Sin embargo, se aprovechan las propiedades conmutativas y asociativas del producto para cambiar el factor 1.32 a 132 y 0.002 a 2 y realizar el producto de números enteros. Observe también que se agruparon las potencias negativas de 10, para obtener al final el resultado correcto.

Recuerde que al multiplicar por 10^n el punto decimal se desplaza n lugares a la derecha, mientras que al multiplicar por 10^{-n} el punto decimal se desplaza n lugares a la izquierda, (sección 4.9.1, página 50). De esta manera, se obtiene el resultado 0.00264 al desplazar el punto decimal 5 lugares a la izquierda de la cantidad 000264.

5.5. La división

En la sección 4.7 de la página 39, se definió la división de dos enteros $\frac{D}{d}$ como encontrar los enteros cociente c y residuo r ($0 \leq r < d$), de manera que se cumple la siguiente igualdad:

$$\frac{D}{d} = c + \frac{r}{d} \tag{5.1}$$

El caso mas sencillo es cuando el divisor d es un dígito y el dividendo D es un número entre 0 y 81 (aprovechando la tabla de multiplicar5.3 de la página 62). Si despejamos el residuo de la ecuación anterior, tenemos que:

$$r = D - c * d \tag{5.2}$$

5.5.1. Ejemplo: $5/3$

Veamos el siguiente ejemplo:

$$
\begin{aligned}
\frac{5}{3} &= 1 + \frac{5 - 1 * 3}{3} \\
\frac{5}{3} &= 1 + \frac{2}{3}
\end{aligned}
$$

En este caso el cociente es $c = 1$ y el residuo es $r = 2$. En efecto 1 es el mayor valor que puede tomar el cociente c, de manera que el residuo $r = 5 - 1 * 3$ toma el valor de 2 (un número entero entre 0 y 2). Recuerde que la fracción $\frac{r}{d}$ es una fracción menor que la unidad.

En forma simplificada, la operación de división de 5 entre 3 la podemos representar de la siguiente manera:

$$\begin{array}{r|l} & \\ \hline 3 & 5 \end{array}$$

Decimos que el 5 contiene a una vez al 3 y por lo tanto el cociente es 1, lo cual se refleja en el siguiente cambio:

$$\begin{array}{r|l} & 1 \\ \hline 3 & 5 \end{array}$$

Enseguida hacemos el producto del cociente por el divisor y el producto lo vamos a restar del dividendo. Esto es:

$$\begin{array}{r|c} & 1 \\ \hline 3 & 5 \\ & -\ (1 * 3) \end{array}$$

Al realizar el producto de $1 * 3$, el resultado es el siguiente:

$$\begin{array}{r|l} & \ 1 \\ \hline 3 & \ 5 \\ & -3 \end{array}$$

Falta el paso de efectuar la resta $(5 - 3)$, lo cual se representa de la siguiente forma:

$$\begin{array}{r|l} & \ 1 \\ \hline 3 & \ 5 \\ & -3 \\ & \overline{\ \ 2} \end{array}$$

El procedimiento termina cuando el residuo, 2 en este caso, es menor que el divisor, el 3.

5.5.2. Ejemplo: $44/3$

Ahora veamos un caso un poco más complicado, aprovechando la notación decimal desarrollada del dividendo:

$$\begin{aligned}
\frac{44}{3} &= \frac{4 * 10^1 + 4 * 10^0}{3} \\
\frac{44}{3} &= \frac{4 * 10^1}{3} + \frac{4 * 10^0}{3} \\
\frac{44}{3} &= \frac{4}{3} * 10^1 + \frac{4}{3} * 10^0
\end{aligned}$$

Es decir, tenemos que efectuar dos divisiones, una para las decenas y otra para las unidades. Efectuemos primera la división de las decenas:

$$\begin{aligned}
\frac{44}{3} &= (1 + \frac{4 - 1 * 3}{3}) * 10^1 + \frac{4}{3} * 10^0 \\
\frac{44}{3} &= (1 + \frac{4 - 3}{3}) * 10^1 + \frac{4}{3} * 10^0 \\
\frac{44}{3} &= (1 + \frac{1}{3}) * 10^1 + \frac{4}{3} * 10^0
\end{aligned}$$

Ahora bien, el residuo de las decenas se puede pasar a las unidades:

$$\begin{aligned}
\frac{44}{3} &= 1*10^1 + \frac{1}{3}*10^1 + \frac{4}{3}*10^0 \\
\frac{44}{3} &= 1*10^1 + \frac{1}{3}*10 + \frac{4}{3}*10^0 \\
\frac{44}{3} &= 1*10^1 + \frac{10}{3}*10^0 + \frac{4}{3}*10^0 \\
\frac{44}{3} &= 1*10^1 + \frac{10+4}{3}*10^0 \\
\frac{44}{3} &= 1*10^1 + \frac{14}{3}*10^0
\end{aligned}$$

Ahora si podemos efectuar la división de las unidades:

$$\begin{aligned}
\frac{44}{3} &= 1*10^1 + 4 + \frac{14-4*3}{3}*10^0 \\
\frac{44}{3} &= 1*10^1 + 4 + \frac{14-12}{3}*10^0 \\
\frac{44}{3} &= 1*10^1 + 4 + \frac{2}{3}*10^0 \\
\frac{44}{3} &= (1*10^1 + 4) + \frac{2}{3}*10^0 \\
\frac{44}{3} &= (14) + \frac{2}{3}
\end{aligned}$$

De manera que el cociente es 14 y el residuo es 2. En forma simplificada, la primera división, para calcular el cociente que representa las decenas, también la podemos representar en forma simplificada como sigue:

$$\begin{array}{c|cc}
 & 1 & \\
\hline
3 & 4 & 4 \\
 & \text{-}3 & \\
 & \text{—} & \\
 & 1 &
\end{array}$$

Finalmente la segunda división para calcular las unidades:

$$\begin{array}{c|cc}
 & 1 & 4 \\
\hline
3 & 4 & 4 \\
 & \text{-}3 & \\
 & \text{—} & \\
 & 1 & 4 \\
 & \text{-}1 & 2 \\
 & & \text{—} \\
 & & 2
\end{array}$$

5.5.3. Ejemplo: $24/3$

En el siguiente ejemplo la división de la decena tiene como cociente a 0, por lo cual el residuo de la división de las decenas se suma a las unidades. Veamos:

$$\begin{aligned}
\frac{24}{3} &= \frac{2*10^1+4*10^0}{3} \\
\frac{24}{3} &= \frac{2*10^1}{3}+\frac{4*10^0}{3} \\
\frac{24}{3} &= \frac{2}{3}*10^1+\frac{4}{3}*10^0 \\
\frac{24}{3} &= (0+\frac{2}{3})*10^1+\frac{4}{3}*10^0 \\
\frac{24}{3} &= \frac{2}{3}*10^1+\frac{4}{3}*10^0 \\
\frac{24}{3} &= \frac{2}{3}*10+\frac{4}{3}*10^0 \\
\frac{24}{3} &= \frac{20}{3}*10^0+\frac{4}{3}*10^0 \\
\frac{24}{3} &= \frac{20+4}{3}*10^0 \\
\frac{24}{3} &= \frac{24}{3}*10^0
\end{aligned}$$

Ahora podemos efectuar la división de las unidades:

$$\begin{aligned}
\frac{24}{3} &= 8+\frac{24-8*3}{3}*10^0 \\
\frac{24}{3} &= 8+\frac{24-24}{3}*10^0 \\
\frac{24}{3} &= 8+\frac{0}{3}*10^0 \\
\frac{24}{3} &= 8
\end{aligned}$$

De manera que el cociente es 8 y el residuo es 0. En forma simplificada tenemos:

$$\begin{array}{r|rr}
 & 0 & 8 \\
\hline
3 & 2 & 4 \\
 & -0 & \\
 & \overline{} & \\
 & 2 & 4 \\
 & -2 & 4 \\
 & & \overline{} \\
 & & 0
\end{array}$$

Sin embargo, es muy frecuente omitir el 0 como cociente en el lugar de las decenas y proceder directamente con la división de $\frac{24}{4}$. Esto es:

$$
\begin{array}{c|cc}
 & & 8 \\
\hline
3 & 2 & 4 \\
 & -2 & 4 \\
 & & \text{---} \\
 & & 0
\end{array}
$$

5.5.4. Ejemplo: $2424/3$

Veamos ahora un ejemplo donde el dividendo contiene más dígitos.

$$
\begin{array}{c|cccc}
 & & 8 & 0 & 8 \\
\hline
3 & 2 & 4 & 2 & 4 \\
 & -2 & 4 & & \\
 & & \text{---} & & \\
 & & 0 & 2 & \\
 & & 0 & -0 & \\
 & & & \text{---} & \\
 & & & 2 & 4 \\
 & & & -2 & 4 \\
 & & & & \text{---} \\
 & & & & 0
\end{array}
$$

Observe que los 2 millares se convirtieron en 20 centenas que sumadas a las 4 dan un total de 24 centenas. El cociente de $\frac{24}{3}$ es 8 con un residuo de 0. Enseguida la división $\frac{2}{3}$ da un cociente de 0 y un residuo de 2. Estas 2 decenas se convierten en 20 unidades que sumadas a las otras 4 dan un total de 24 unidades. El cociente de $\frac{24}{3}$ es 8 con un residuo de 0. El resultado final es 808 como cociente y un residuo de 0.

5.5.5. Ejemplo: $8765/12$

Consideremos ahora la división $\frac{8765}{12}$. En este caso el divisor es mayor que 9 y no podemos utilizar la tabla 5.3. En su lugar podemos calcular los resultados de la multiplicación del 12 por un dígito, como se muestra en la tabla 5.4.

número	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
12	0	12	24	36	48	60	72	84	96	108

Tabla 5.4: Tabla del producto de 12 por un dígito.

Procedemos a realizar la división:

$$
\begin{aligned}
\frac{8765}{12} &= \frac{8*10^3+7*10^2+6*10^1+5*10^0}{12} \\
\frac{8765}{12} &= \frac{8*10^3}{12}+\frac{7*10^2}{12}+\frac{6*10^1}{12}+\frac{5*10^0}{12} \\
\frac{8765}{12} &= \frac{8}{12}*10^3+\frac{7}{12}*10^2+\frac{6}{12}*10^1+\frac{5}{12}*10^0
\end{aligned}
$$

El resultado de la división de los millares $\frac{8}{12}$ es 0 con residuo de 8. Por lo tanto, su residuo de 8 millares se suma como 80 centenas. Es decir:

$$\begin{aligned}
\frac{8765}{12} &= \frac{8}{12} * 10 * 10^2 + \frac{7}{12} * 10^2 + \frac{6}{12} * 10^1 + \frac{5}{12} * 10^0 \\
\frac{8765}{12} &= \frac{80}{12} * 10^2 + \frac{7}{12} * 10^2 + \frac{6}{12} * 10^1 + \frac{5}{12} * 10^0 \\
\frac{8765}{12} &= \frac{80+7}{12} * 10^2 + \frac{6}{12} * 10^1 + \frac{5}{12} * 10^0 \\
\frac{8765}{12} &= \frac{87}{12} * 10^2 + \frac{6}{12} * 10^1 + \frac{5}{12} * 10^0
\end{aligned}$$

Ahora bien para realizar la división de las centenas $\frac{87}{12}$, nos apoyamos de la tabla 5.4 para ver que el cociente es 7 (el mayor entero cuyo producto con 12 sea menor o igual que 87) y tenemos un residuo $r = 87-7*12 = 87-84 = 3$. Este residuo se suma a las decenas. Es decir,

$$\begin{aligned}
\frac{8765}{12} &= (7 + \frac{87 - 7 * 12}{12}) * 10^2 + \frac{6}{12} * 10^1 + \frac{5}{12} * 10^0 \\
\frac{8765}{12} &= (7 + \frac{87 - 84}{12}) * 10^2 + \frac{6}{12} * 10^1 + \frac{5}{12} * 10^0 \\
\frac{8765}{12} &= (7 + \frac{3}{12}) * 10^2 + \frac{6}{12} * 10^1 + \frac{5}{12} * 10^0 \\
\frac{8765}{12} &= 7 * 10^2 + \frac{3}{12} * 10^2 + \frac{6}{12} * 10^1 + \frac{5}{12} * 10^0 \\
\frac{8765}{12} &= 7 * 10^2 + \frac{3}{12} * 10 * 10^1 + \frac{6}{12} * 10^1 + \frac{5}{12} * 10^0 \\
\frac{8765}{12} &= 7 * 10^2 + \frac{30}{12} * 10^1 + \frac{6}{12} * 10^1 + \frac{5}{12} * 10^0 \\
\frac{8765}{12} &= 7 * 10^2 + \frac{30+6}{12} * 10^1 + \frac{5}{12} * 10^0 \\
\frac{8765}{12} &= 7 * 10^2 + \frac{36}{12} * 10^1 + \frac{5}{12} * 10^0
\end{aligned}$$

De la tabla 5.4 podemos ver que el cociente de la división $\frac{36}{12}$ es 3 con un residuo de 0. Es decir,

$$\begin{aligned}
\frac{8765}{12} &= 7 * 10^2 + 3 * 10^1 + \frac{5}{12} \\
\frac{8765}{12} &= 730 + \frac{5}{12}
\end{aligned}$$

El resultado es un cociente de 730 y un residuo de 5. Podemos comprobar fácilmente que $8765 = 730 * 12 + 5$.

En forma simplificada, podemos calcular los resultados como sigue:

$$
\begin{array}{r|rrrr}
 & & 7 & 3 & 0 \\
\hline
12 & 8 & 7 & 6 & 5 \\
 & -8 & 4 & & \\
 & & \text{—} & & \\
 & & 3 & 6 & \\
 & & -3 & 6 & \\
 & & & \text{—} & \\
 & & & 0 & 5 \\
 & & & & -0 \\
 & & & & \text{—} \\
 & & & & 5
\end{array}
$$

5.5.6. División con números decimales

En forma similar a como se hizo en la multiplicación con números decimales, una forma sencilla para dividir números que incluyen decimales es convertirlos a números enteros, multiplicando por potencias positivas de 10. Al final, la fracción se multiplica por las potencias negativas de 10. Por ejemplo:

$$
\begin{aligned}
\frac{1.32}{0.002} &= \frac{1.32 * 10^2 * 10^{-2}}{0.002 * 10^3 * 10^{-3}} \\
\frac{1.32}{0.002} &= \frac{1.32 * 10^2}{0.002 * 10^3} \; \frac{10^{-2}}{10^{-3}} \\
\frac{1.32}{0.002} &= \frac{132}{2} \; * 10^{-2-(-3)} \\
\frac{1.32}{0.002} &= \frac{132}{2} \; * 10^{-2+3} \\
\frac{1.32}{0.002} &= 66 \; * 10 \\
\frac{1.32}{0.002} &= 660
\end{aligned}
$$

Observe que el numerador se multiplicó por $10^2 * 10^{-2} = 1$ y el denominador se multiplicó por $10^3 * 10^{-3} = 1$. Es decir, la fracción no se alteró porque se multiplicó por la unidad. Sin embargo, de esta manera sacamos como provecho que la división se realiza utilizando números enteros.

5.6. Ejercicios propuestos.

Se recomienda que los siguientes ejercicios se realicen **sin calculadora**. Se puede utilizar la calculadora para comprobar que el resultado obtenido haya sido el correcto.

Efectúa las siguientes operaciones para calcular el valor de a.

1. $a = 128 + 12$
2. $a = 123 + 25$

3. $a = 128 + 27$
4. $a = 987 + 2707$
5. $a = 12,345 + 1,234$
6. $a = 12,345 + 998$
7. $a = 1987 + 2707 + 3589$
8. $a = 1987 - 1239$
9. $a = 9001 - 93$
10. $a = 1234 - 9458$
11. $a = 2,521 - 311$
12. $a = 100,001 - 57$
13. $a = 123 * 123$
14. $a = 9,898 * 589$
15. $a = 2590 * 1001$
16. $a = 2599 * 378$
17. $a = (-101) * 192$
18. $a = 9,892 * 100$
19. $a = 9,892 * 0$
20. $a = 11000 * 359.5$

Efectúa las siguientes operaciones para calcular el valor de a como un entero (el cociente) más la fracción correspondiente al residuo.

21. $a = \frac{10}{3}$
22. $a = \frac{100}{7}$
23. $a == \frac{1234}{12}$
24. $a = \frac{87654}{13}$
25. $a = \frac{87654}{25}$
26. $a = \frac{87654}{100}$
27. $a = \frac{-1290}{-3}$
28. $a = \frac{0.15}{0.03}$

29. El factorial de un número n, denotado como $n!$, se define como el producto de todos números enteros comprendidos entre 1 y n. Es decir $n! = 1 * 2 * 3 * \cdots * (n-1)(n)$. Calcule los factoriales de 5, 8 y 10.

30. La suma S_n de todos los números enteros comprendidos entre 1 y n se puede calcular directamente como: $S_n = 1 + 2 + 3 + \cdots + (n-1) + (n)$, o bien de una forma más rápida como $S_n = \frac{n*(n+1)}{2}$. Verifique el resultado obtenido utilizando ambas formas de cálculo para S_6 y S_{10}.

31. En un almacén se tienen 7 cajas con jabones. Si cada caja tiene 120 jabones, ¿Cuántos jabones tiene el almacén?

32. En un Laboratorio se tiene disponible 1.3 litros de cierta vacuna. Si se deben aplicar dosis de 0.002 litros por persona, ¿Cuántas dosis podrán obtenerse con la vacuna disponible?

Capítulo 6

Evaluación 1

Resuelva los ejercicios propuestos, anotando clara y ordenadamente la secuencia de pasos que le lleva a la solución, sin utilizar calculadora. Indique claramente los resultados obtenidos.

1. Una compañía obtiene de ganancias noventa y cinco mil cinco pesos el primer mes, pierde ciento noventa mil trece pesos el segundo mes y nuevamente tiene una ganancia de setecientos cincuenta mil noventa pesos el tercer mes. ¿Cuánto obtuvo de ganancias en los tres primeros meses?

2. A un centro de adiestramiento llegan 89 camiones de soldados. Considere que cada camión lleva 38 soldados. Si el total de soldados, se reparten equitativamente a 13 poblados, ¿Cuántos soldados se envían a cada poblado? ¿Cuántos soldados permanecen en el centro?

3. En un laboratorio se tienen dos frascos de cierta vacuna, el primero de 2.385 litros y el segundo de 9.880 litros. Si se reparte esa cantidad en dosis de 0.005 litros, ¿Cuántas dosis de esa vacuna se tendrán disponibles?

4. Calcule el valor de a en los siguientes ejercicios y exprese el resultado como una fracción simple. Recuerde que en una fracción simple el numerador y denominador no tienen factores en común, es decir, tiene los números enteros más pequeños en el numerador y denominador.

   a) $a = 2^3 * 2^4$

   b) $a = \frac{3}{4} + \frac{7}{8} * 2^3 - \frac{2}{-4}$

   c) $a = \frac{11}{3} + 8 * 10^{-1} + \frac{2}{6} - 0.8$

   d) $a = \frac{1+2*3*2^2}{\frac{1}{10}-\frac{6}{10}+0.4}$

   e) $a = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4}$

   f) $a = 2^8 - 2^5$

   g) $a = (2^2 * 2^3)^2$

Capítulo 7

Conceptos geométricos básicos

En este capítulo revisaremos los conceptos geométricos básicos tales como: puntos, líneas, segmentos de línea, cuadrados, triángulos, polígonos regulares y círculos. También se introducen los conceptos de perímetro, área y volumen.

7.1. El plano cartesiano

En la sección 4.10, de la página 52, se presentó anteriormente la recta numérica, donde un número estaba representado por un punto en dicha recta. Ahora utilicemos dos rectas numéricas: una horizontal, llamada **eje** x; y otra vertical, llamada **eje** y, como se muestra en la figura 7.1. A esta representación se le conoce como **plano cartesiano**.

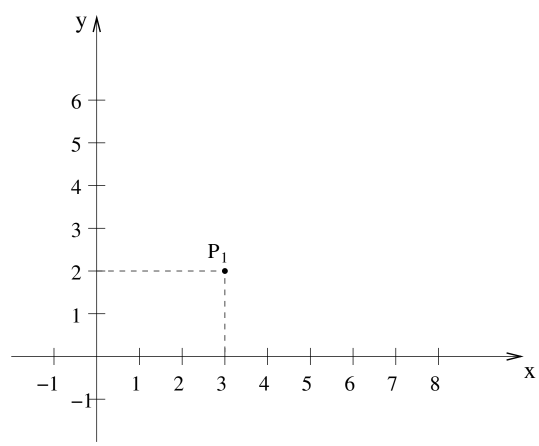


Figura 7.1: Plano cartesiano.

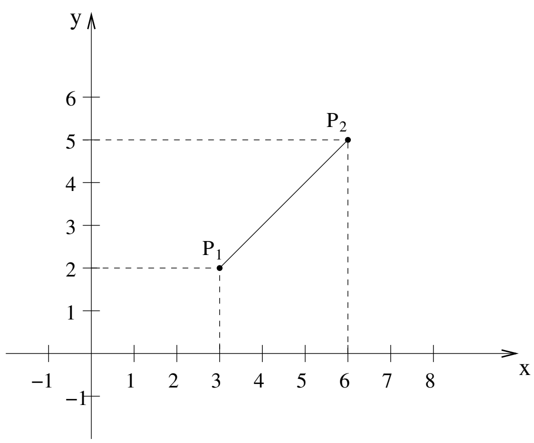
7.2. Puntos en el plano

En la figura 7.1 se ha representado, como un pequeño círculo negro, un **punto en el plano** con **coordenadas**: $x = 3$ y $y = 2$. En la figura este punto tiene la etiqueta P_1 y lo podemos representar por una pareja de números, donde el primer número corresponde al valor en el eje x y el segundo número corresponde al valor en el eje y. Es decir:

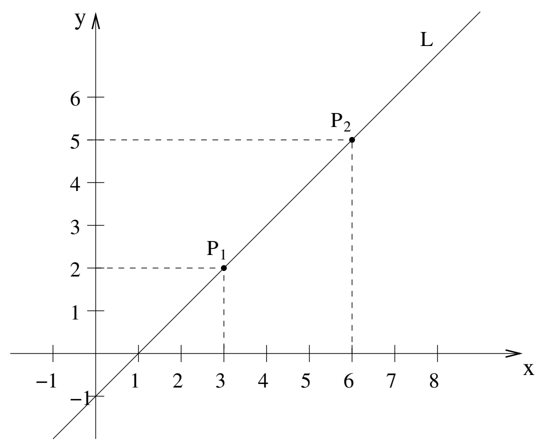
$$P_1 = (x, y) \tag{7.1}$$

En nuestro caso, $P_1 = (3, 2)$. De esta forma podemos representar cualquier punto en el plano cartesiano, lo cual es muy útil. Por ejemplo el punto con coordenadas $(0, 0)$ corresponde al punto donde se cruzan el eje x y el eje y.

7.3. Segmentos de recta y líneas rectas



(a) Segmento de recta



(b) Recta

Figura 7.2: Un segmento de recta y una recta definida por dos puntos.

Sean P_1 y P_2 dos puntos en el plano. Decimos que el **segmento de recta**, representado como $\overline{P_1P_2}$ está compuesto de todos los puntos que definen la trayectoria más corta para ir de un punto al otro. La figura 7.2(a) muestra el segmento de recta que tiene como puntos extremos a $P_1 = (3, 2)$ y $P_2 = (6, 5)$.

7.3.1. Líneas rectas

Si el segmento de recta se extiende más allá de los puntos extremos del segmento de recta, como se muestra en la figura 7.2(b) tenemos una **recta** o también llamada **línea recta**. En la figura esta línea recta tiene la etiqueta L. En adelante, a menos que se especifique lo contrario, una línea será sinónimo de una línea recta.

7.4. Ángulo entre dos segmentos de recta

Sean A, B y C tres puntos en el plano y los segmentos de rectas $\overline{AB}$ y $\overline{AC}$, como se muestran en la figura 7.3. Decimos que el segmento $\overline{AB}$ debe girar el **ángulo** a, manteniendo el punto A fijo, para que algunos (o todos) los puntos de $\overline{AB}$ estén contenidos en el segmento de recta $\overline{AC}$.

Si el giro se realiza en el sentido contrario a las manecillas del reloj (como se ilustra con la punta de flecha que representa el giro en la figura 7.3) se dice que se efectuó un giro con un **ángulo positivo**. Por el contrario, si el

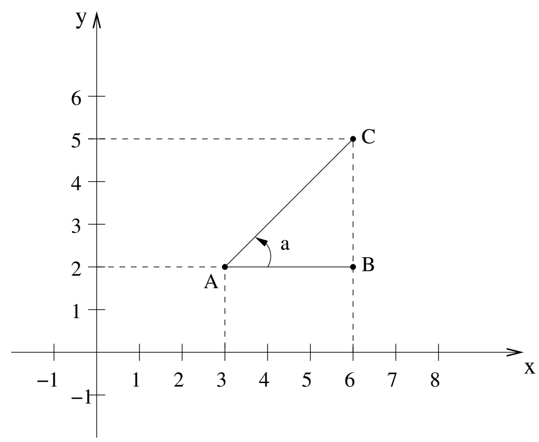


Figura 7.3: Ángulo entre dos segmentos de recta.

giro se realiza en el sentido de las manecillas del reloj, se dice que se realizó un giro con un **ángulo negativo**. Por ejemplo, si el segmento $\overline{AC}$ de la figura 7.3 gira hacia abajo (en el sentido de las manecillas del reloj), para coincidir con el segmento $\overline{AB}$, habrá efectuado un giro con un ángulo negativo.

Sin embargo, si no estamos interesados en precisar cual segmento giró para coincidir con el otro, podemos decir simplemente que los segmentos de recta $\overline{AB}$ y $\overline{AC}$, con el punto A común, tienen un ángulo a (positivo).

Los ángulos se miden en **grados sexagesimales** o simplemente **grados**. Un giro de una vuelta completa, de manera que el segmento quede en la misma ubicación, equivale a un giro de 360 grados, también representado como 360 g o 360°. En la figura 7.4 se presentan varios ejemplos de ángulos: de 45, 90, 180, 270, -45 y -90 grados. Observe que un ángulo positivo también se corresponde con un ángulo negativo, dependiendo de que dirección gire el segmento de recta. Por ejemplo, un ángulo de 270 grados tiene el mismo efecto que un ángulo negativo de 90 grados.

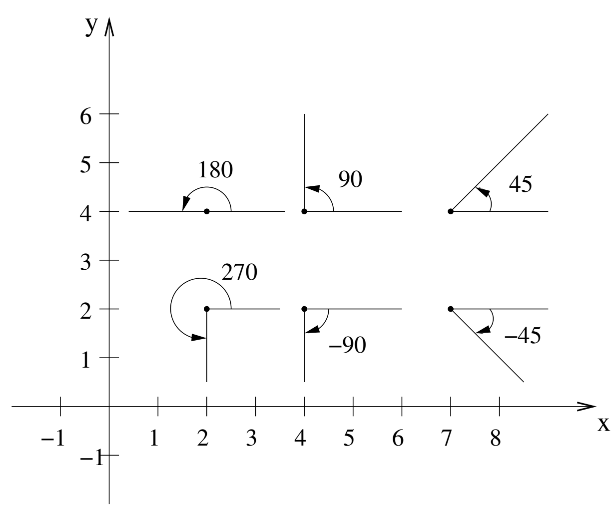
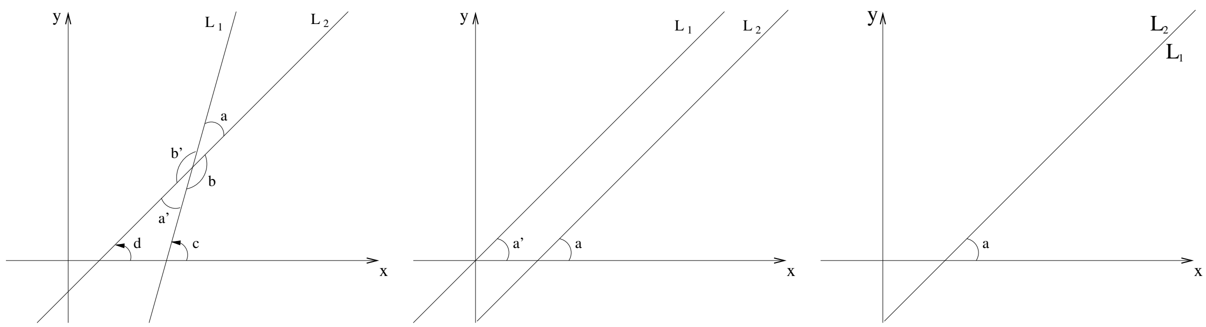


Figura 7.4: Ángulos positivos y negativos expresados en unidades de grado.

Si el ángulo es menor que 90 grados, se le conoce como un **ángulo agudo**. Si el ángulo es de 90 grados, se le conoce como un **ángulo recto**. Si mide más de 90 y menos de 180 grados, se le conoce como un **ángulo obtuso**. Si mide 180 grados, se le conoce como un **ángulo llano**.

7.5. Dos rectas en el plano

Cuando dibujamos dos rectas en el plano, se pueden tener tres casos, como se ilustran en la figura 7.5.



(a) Rectas secantes (b) Rectas paralelas (c) Rectas coincidentes

Figura 7.5: Posibles casos de rectas en el plano.

7.5.1. Rectas secantes

En la figura 7.5(a) se presenta el caso de que las rectas, llamadas en este caso **rectas secantes**, sucede cuando las rectas se cruzan sólo en un punto.

El ángulo c que forma la recta L_1 con eje x se conoce como **ángulo de inclinación de la recta**. Como veremos más tarde, podemos obtener la ecuación de los puntos que forman una recta a partir de dos puntos (sección 8.8.2, o bien a partir del ángulo de inclinación y un punto de la recta (sección 9.2.1).

Para que dos rectas sean secantes, es suficiente que los ángulos de inclinación de las rectas sean diferentes. En la figura 7.5(a) los ángulos c y d son diferentes.

Observe que en este caso también se cumple que los ángulos, que se forman alrededor del punto de intersección de las rectas, a y a' son iguales, y b con b' también son iguales. Un caso especial de rectas secantes ocurre cuando los ángulos a y b son ángulos rectos. A este tipo de rectas se les conoce como **rectas perpendiculares**.

7.5.2. Rectas paralelas

En la figura 7.5(b) se presenta el caso de que las rectas no tiene puntos de intersección, no se cruzan. Para que se de este caso basta que los ángulos de inclinación de las rectas sean iguales (es decir, los ángulos a y a' de la figura son iguales). El concepto de rectas paralelas también se puede extender a segmentos de recta que sean paralelos, cuando los segmentos forman parte de líneas paralelas.

7.5.3. Rectas coincidentes

En la figura 7.5(c) se presenta el caso de que las rectas, además de ser paralelas, también coinciden en todos sus puntos, es decir se trata de la misma recta. Este tipo de rectas se conocen como **rectas coincidentes**.

7.6. El cuadrado

Pasemos ahora a una figura plana que tiene 4 lados iguales y cuatro ángulos interiores rectos (de 90 grados), como se muestra en la figura 7.6. Es decir, los 4 segmentos de recta (llamados **lados del cuadrado**) que conectan los puntos esquina (también llamados **vértices**) son iguales, y los 4 ángulos de los lados que comparten un vértice son ángulos rectos. Se puede ver en la figura que el lado a tiene un valor de 4 ($a = 6 - 2$).

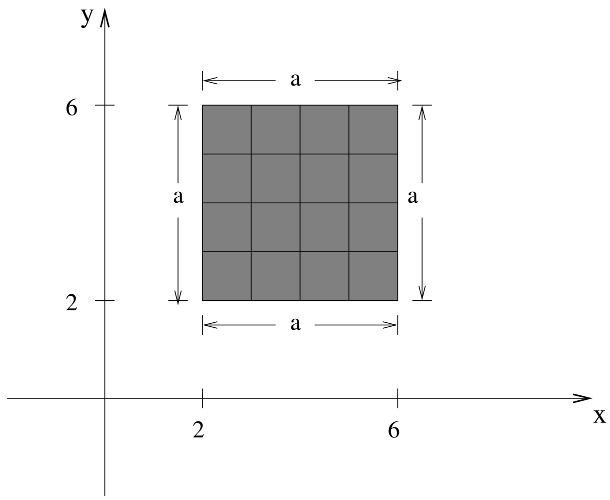


Figura 7.6: El cuadrado.

El **perímetro de una figura** se define como la suma de las longitudes de los lados. En otras palabras, el perímetro define la longitud total requerida para rodear la figura. En el caso del cuadrado de lado a, el perímetro P es:

$$P = 4a \tag{7.2}$$

En el caso del cuadrado de la figura 7.6, el perímetro es $P = 4 * 4 = 16$. Si las unidades del eje x y del eje y fueran **metros** (abreviado como m), el perímetro del cuadrado sería:

$$\begin{aligned} P &= 4 * (4\text{m}) \\ P &= (4 * 4)\text{m} \\ P &= 16\text{m} \end{aligned}$$

El cuadrado es una figura que tiene superficie o área, la cual se muestra en en forma sombreada en la figura 7.6. Si el lado $a = 4$m, se puede observar que se tienen $4 * 4 = 16$ pequeños cuadrados de un metro por lado. Si representamos el área de un cuadrado de un metro de lado, como 1m^2, tenemos que el **área del cuadrado** A se puede calcular como sigue:

$$A = a^2 \tag{7.3}$$

En el caso del cuadrado de la figura 7.6, el área del cuadrado de lado $a = 4$, es $A = 4 * 4 = 16$. Si las unidades de los ejes son metros, entonces tenemos:

$$\begin{aligned} A &= a * a \\ A &= (4\text{m}) * (4\text{m}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} A &= (4 * 4)(\mathrm{m} * \mathrm{m}) \\ A &= 16\mathrm{m}^2 \end{aligned}$$

Que también puede expresarse como $A = 16 * (1\mathrm{m}^2)$, es decir una superficie de 16 cuadrados de un metro de lado.

El perímetro P y área A de un **cuadrado** de lado a esta dado por:

$$P = 4a \tag{7.4}$$
$$A = a^2 \tag{7.5}$$

7.7. El rectángulo

Continuemos con una figura de 4 lados y la condición de 4 ángulos interiores rectos, pero las longitudes de los lados puede variar, como se muestra en la figura 7.7. Ahora los lados paralelos son de la misma longitud, los lados horizontales son de longitud a y los lados verticales son de longitud b. Esta figura con cuatro lados y cuatro angulos interiores rectos se conoce como **rectángulo**. Notemos que el cuadrado es un caso particular de un rectángulo.

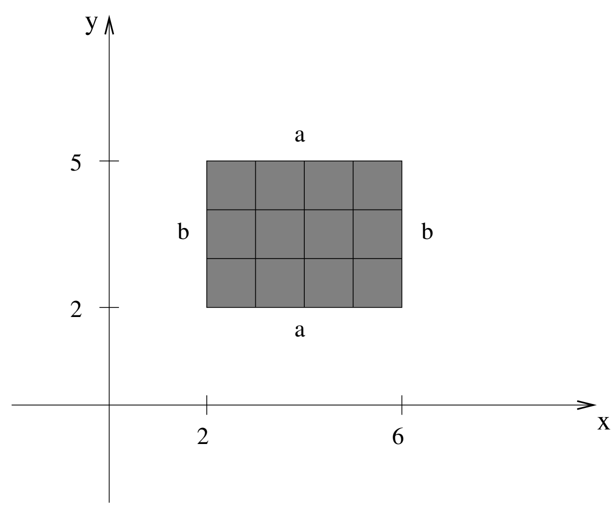


Figura 7.7: El rectángulo.

En el caso del rectángulo de lados a y b, el perímetro P está dado por:

$$P = 2a + 2b \tag{7.6}$$

En el caso del rectángulo de la figura 7.7, el perímetro es $P = 2 * 4 + 2 * 3 = 14$. El área del rectángulo se puede calcular como:

$$A = a * b \tag{7.7}$$

En el caso del rectángulo de la figura 7.7, el área es $A = 4 * 3 = 12$.

El perímetro P y área A de un **un rectángulo** de lados a y b esta dado por:

$$P = 2a + 2b \tag{7.8}$$
$$A = ab \tag{7.9}$$

7.8. El triángulo rectángulo

Si partimos de un rectángulo y trazamos un segmento de recta en forma diagonal, de la esquina inferior izquierda a la esquina superior derecha, como se muestra en la figura 7.8, se forman dos **triángulos rectángulos**. Así, un tríangulo rectángulo esta formado por 3 vértices, tres lados, y un ángulo interior recto. En la figura 7.8 se movió el triángulo inferior del rectángulo un poco a la derecha.

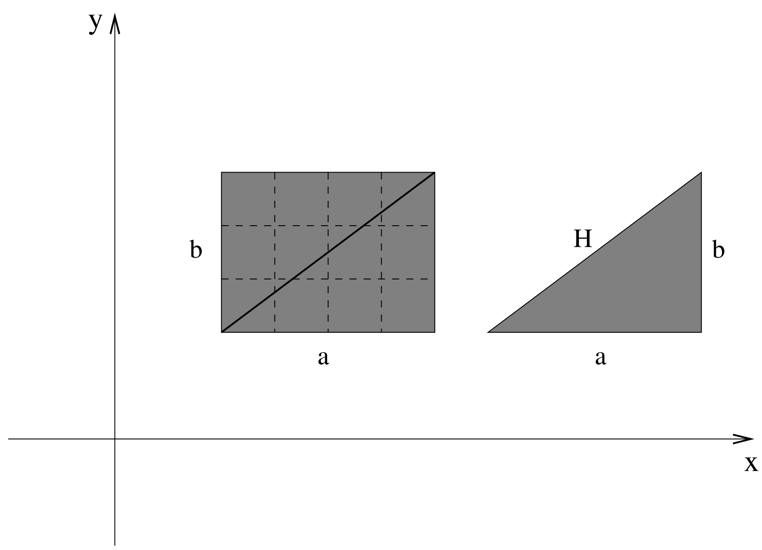


Figura 7.8: Formación de un triángulo rectángulo.

A los lados a y b, que forman el ángulo recto, se les conoce como **catetos del triángulo** y al otro lado H se le conoce como **hipotenusa**. Si conocemos los catetos es posible calcular la longitud de la hipotenusa mediante el famosos **Teorema de Pitágoras**, como se verá enseguida.

Si conocemos las longitudes de los lados del triángulo, su perímetro esta dado por:

$$P = a + b + H \tag{7.10}$$

Si observamos la figura 7.8, podemos notar que el área del triángulo rectángulo de catetos a y b es la mitad del área del rectángulo de lados a y b. Así, el área del triángulo se puede calcular fácilmente como:

$$A = \frac{1}{2}\, a * b \tag{7.11}$$

7.8.1. Teorema de Pitágoras

La relación entre los catetos (a y b) y la hipotenusa (H) de un triángulo rectángulo está definida por el famoso **Teorema de Pitágoras** que nos dice:

$$H^2 = a^2 + b^2 \tag{7.12}$$
$$H = \sqrt{a^2 + b^2} \tag{7.13}$$

La figura 7.9 ilustra este teorema. Se presentan dos cuadrados de lado $a + b$. El área total, A_t, del cuadrado del lado izquierdo se compone de las siguientes áreas:

$$A_t = a^2 + b^2 + 4T$$

donde a^2 corresponde al cuadrado sombreado superior, b^2 al cuadrado sombreado inferior y T corresponde al área del triángulo rectángulo con catetos a y b. Los 4 triángulos rectángulos están etiquetados como $T1$, $T2$, $T3$ y $T4$.

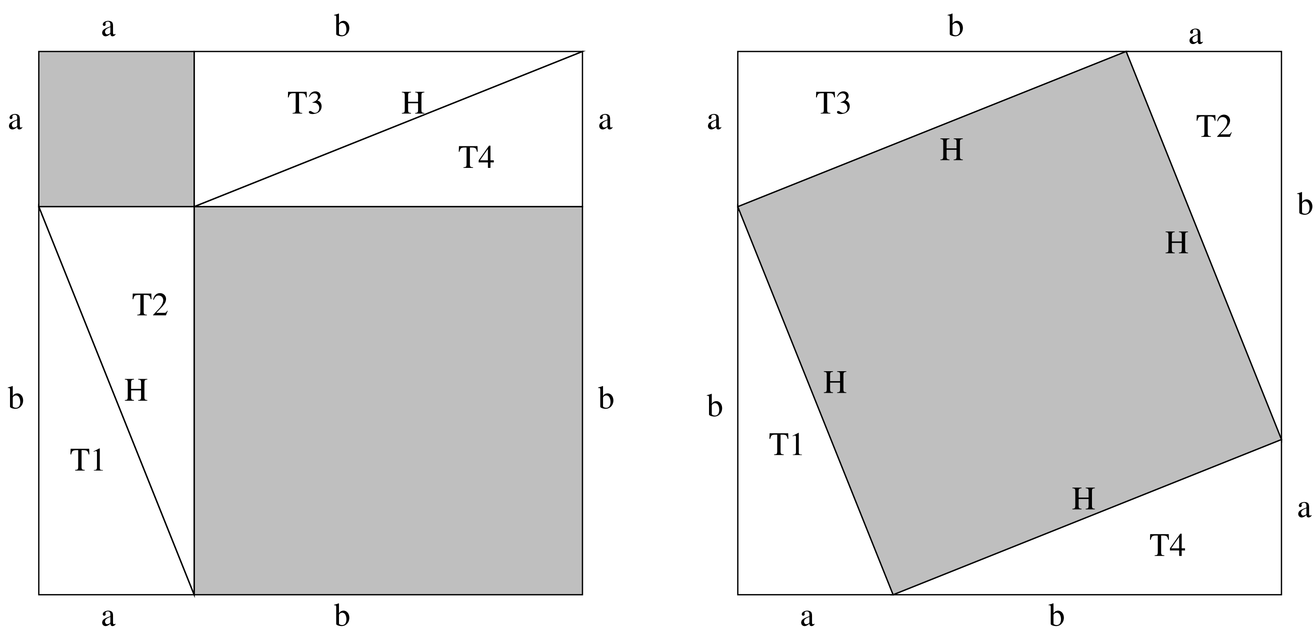


Figura 7.9: Demostración geométrica del Teorema de Pitágoras.

Ahora observemos el cuadrado del lado derecho de la figura 7.9, también de lado $a + b$. Los cuatro triángulos cambiaron de lugar, de manera que se forma un cuadrado en el centro, de lado H. En este caso el área total está dada por:

$$A_t = H^2 + 4T$$

Igualando esta ecuación con la anterior, tenemos:

$$\begin{aligned} H^2 + 4T &= a^2 + b^2 + 4T \\ H^2 + 4T - 4T &= a^2 + b^2 + 4T - 4T \\ H^2 &= a^2 + b^2 \end{aligned}$$

¡Que es precisamente el Teorema de Pitágoras! En el desarrollo de la última igualdad se utilizó una propiedad que veremos más adelante (en la sección 8.2): si se suma o resta la misma cantidad a los miembros izquierdo y derecho de la igualdad, la igualdad se conserva.

Teorema de Pitágoras. En un triángulo rectángulo el cuadrado de la hipotenusa es igual a la suma de los cuadrados de los catetos. Si H es la hipotenusa y a, b son los catetos, se cumple lo siguiente:

$$H^2 = a^2 + b^2$$

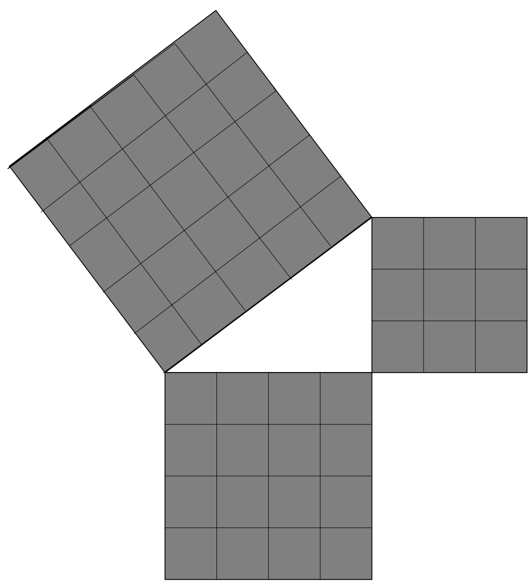


Figura 7.10: Triángulo rectángulo de lados 3, 4, 5, para ilustrar el Teorema de Pitágoras.

El siguiente ejemplo numérico también permite apreciar claramente el Teorema de Pitágoras (ilustrado en la figura 7.10). Sea un triángulo rectángulo con catetos de 3 y 4 unidades. La hipotenusa se puede calcular como sigue:

$$\begin{aligned} H &= \sqrt{a^2 + b^2} \\ H &= \sqrt{3^2 + 4^2} \\ H &= \sqrt{9 + 16} \\ H &= \sqrt{25} \\ H &= 5 \end{aligned}$$

Es decir, los 9 cuadrados de a^2 más los 16 cuadrados del b^2 corresponden exáctamente a los 25 cuadrados de H^2.

El perímetro P y área A de **un triángulo rectángulo** con catetos a y b esta dado por:

$$P = a + b + H \tag{7.14}$$
$$H = \sqrt{a^2 + b^2} \tag{7.15}$$
$$A = \frac{ab}{2} \tag{7.16}$$

Con el teorema de Pitágoras podemos resolver muchos problemas, como el que sigue a continuación.

7.8.2. Distancia entre dos puntos

La **distancia entre dos puntos**, se puede calcular fácilmente aplicando el Teorema de Pitágoras. La figura 7.11 muestra el punto P_1, con coordenadas (x_1, y_1) en el plano cartesiano y el puntos P_2, con coordenadas (x_2, y_2). Se puede observar que se forma un triángulo rectángulo con los catetos: $(y_2 - y1)$ y $(x_2 - x_1)$, siendo la hipotenusa la distancia buscada. Por el Teorema de Pitágoras, la distancia d entre ambos puntos está dada por:

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} \tag{7.17}$$

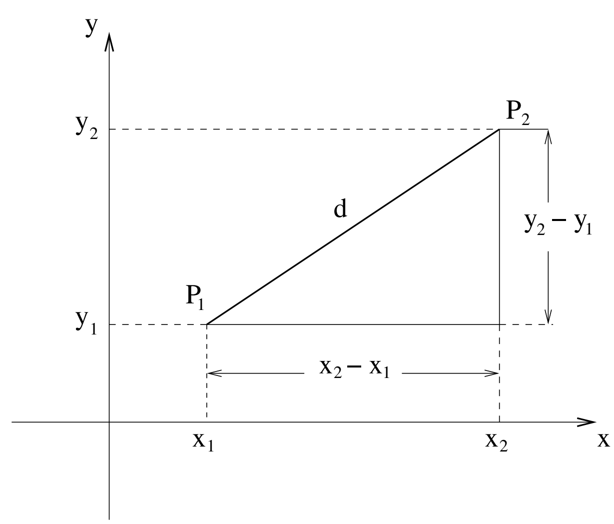


Figura 7.11: Distancia entre dos puntos $P1$ y $p2$.

Si los puntos P_1 y P_2 son los puntos que definen un segmento de recta, la distancia d entre ellos corresponde a la longitud de dicho segmento.

La distancia d entre dos puntos $P_1 = (x_1, y_1)$ y $P_2 = (x_2, y_2)$ se calcula como:

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} \tag{7.18}$$

7.9. Tipos de triángulos

Es conveniente recordar que un **triángulo** se forma uniendo con segmentos de rectas tres puntos no colineales (que no estén sobre la misma línea). La figura 7.12 ilustra tres tipos de triángulos, dependiendo de la longitud de sus lados.

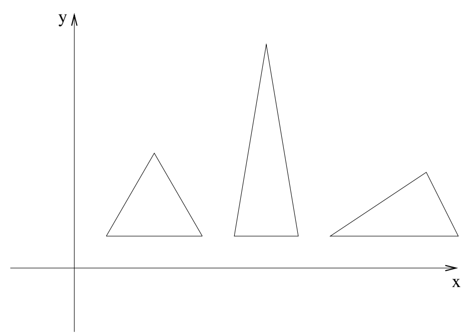


Figura 7.12: Tipos de triángulos: equilatero, isósceles y escaleno.

En el lado izquierdo se muestra un **triángulo equilátero**, aquel que tiene todos sus lados de la misma longitud y por lo tanto también sus ángulos interiores son iguales. En el centro se muestra un **triángulo isósceles**, aquel que tiene dos lados de la misma longitud y por lo tanto también dos ángulos interiores son iguales. En el lado derecho se muestra un **triángulo escaleno**, aquel que tiene todos sus lados de diferentes longitudes y también sus ángulos interiores son diferentes. Veamos enseguida como se relacionan los ángulos interiores de cualquier triángulo.

7.9.1. Suma de ángulos interiores de un triángulo

En la figura 7.13 se muestra el triángulo formado por los puntos A, B y C, como el área sombreada. Los ángulos interiores del triángulo están marcados con las letras a, b y c.

En la figura 7.13 la línea que pasa por los puntos A B' es paralela al segmento de recta que une los puntos A y B. De esta forma se puede observar que el ángulo a interior del triángulo es el mismo que el ángulo a situado junto al ángulo b. De igual forma, el ángulo c superior, es el mismo que el ángulo c situado junto al ángulo b. Podemos comprobar que $a + b + c = 180°$.

En cualquier triángulo la suma de los tres ángulos interiores es $180°$.

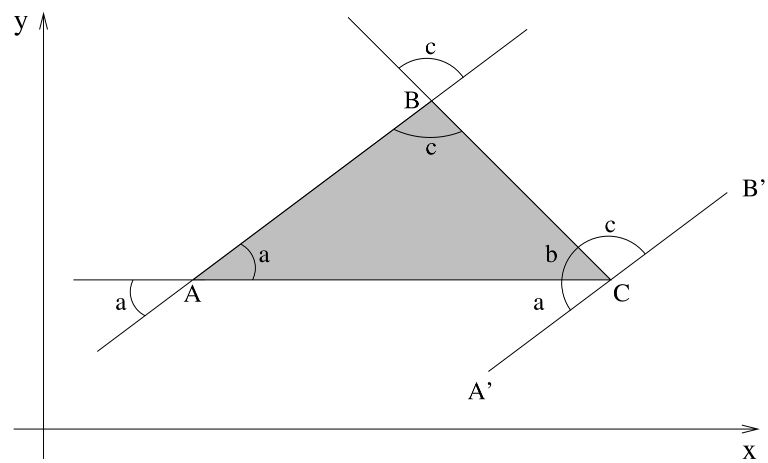


Figura 7.13: Un triángulo mostrando la suma de sus ángulos interiores.

7.9.2. Área de un triángulo

En la sección 7.8 vimos como calcular el área de un triángulo rectángulo, como la mitad del producto de los catetos. En esta sección vamos a calcular el área de cualquier triángulo.

En la figura 7.14 se muestra un triángulo con el lado b de mayor longitud paralelo al eje x. Se puede observar que si el lado b se descompone en dos segmentos: b_1 y b_2 ($b = b_1 + b_2$), se forman dos triángulos rectángulos, T_1 y T_2, con un cateto común h. Este cateto común se llamará **altura del triángulo**. Si sumamos el área de los triángulos T_1 y T_2 tenemos que el área A del triángulo original se puede calcular como sigue:

$$
\begin{aligned}
A &= \left(\frac{1}{2}\, b_1 * h\right) + \left(\frac{1}{2}\, b_2 * h\right) \\
A &= \frac{1}{2}\,(b_1 * h + b_2 * h) \\
A &= \frac{1}{2}\,(b_1 + b_2) * h \\
A &= \frac{1}{2}\, b * h
\end{aligned}
$$

El área A **de un triángulo** de base b y altura h es la mitad del producto de la base por la altura:

$$A = \frac{1}{2}\, bh \tag{7.19}$$

La figura 7.15 muestra un triángulo T_1 con base b_1 y altura h que tiene un ángulo mayor de 90 grados. Calculemos el área del triángulo T_1 agregando el triángulo T_2 de base b_2 para formar una triángulo rectángulo de base $b + b_2$

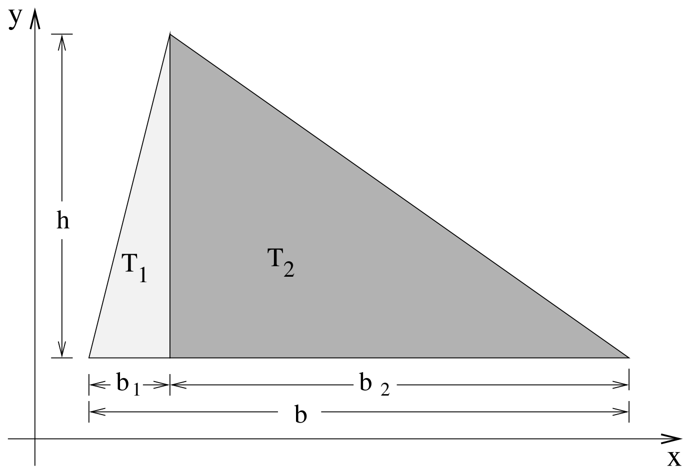


Figura 7.14: Un triángulo visto como dos triángulos rectángulos.

y altura h, de manera que el área deseada es igual al área del triángulo rectángulo menos el área del triángulo T_2:

$$
\begin{aligned}
A &= \left(\frac{1}{2}\,(b+b_2)*h\right) - \left(\frac{1}{2}\,b_2*h\right) \\
A &= \frac{1}{2}\,(b*h) + \frac{1}{2}\,(b_2*h) - \frac{1}{2}\,(b_2*h) \\
A &= \frac{1}{2}\,b*h
\end{aligned}
$$

Obteniendo el mismo resultado que antes.

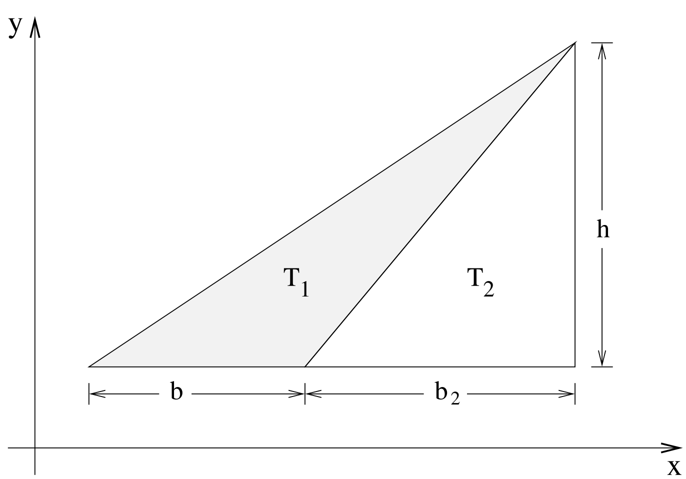


Figura 7.15: Área de un triangulo que tiene un ángulo mayor de 90 grados.

7.10. El paralelogramo

Volvamos ahora a una figura similar al rectángulo. Sus lados opuestos son paralelos y de igual longitud, pero ahora quitamos la restricción de los cuatro ángulos interiores de 90 grados. Esta figura se conoce como **paralelogramo** de lados a, b y altura h como se ilustra en la figura 7.16.

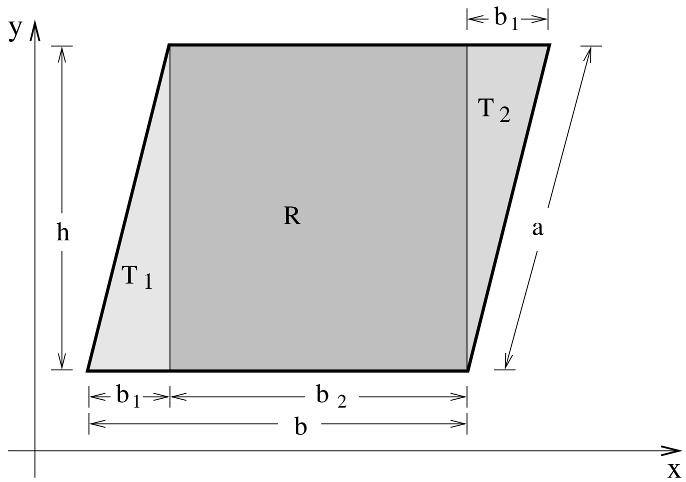


Figura 7.16: Un paralelogramo visto como un rectángulo y dos triángulos.

El perímetro sigue siendo el mismo que el del rectángulo: $P = 2a + 2b$. Para calcular el área del paralelogramo el lado b se descompone en dos segmentos: b_1 y b_2 ($b = b_1 + b_2$), de manera que se forma un rectángulo R y dos triángulos rectángulos: T_1 y T_2. Si sumamos el área de los triángulos T_1 y T_2 con el área del rectángulo, tenemos que el área A del paralelogramo se puede calcular como sigue:

$$\begin{aligned}
A &= \left(\frac{1}{2}\, b_1 * h\right) + \left(\frac{1}{2}\, b_1 * h\right) + (b_2 * h) \\
A &= \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\right)\, b_1 * h + b_2 * h \\
A &= b_1 * h + b_2 * h \\
A &= (b_1 + b_2) * h \\
A &= b * h
\end{aligned}$$

El área A de **un paralelogramo** de base b y altura h es el producto de la base por la altura:

$$A = bh \tag{7.20}$$

7.11. Polígonos regulares

Pasemos ahora a los **polígonos regulares**. Un polígono regular de n lados tiene todos sus lados iguales y también todos sus ángulos internos son iguales. Si $n = 3$ tenemos el triángulo equilátero y si $n = 4$ tenemos el cuadrado. Para polígonos de más lados se le añade el adjetivo regular al polígono. Por ejemplo: **pentágono regular** ($n = 5$), **hexágono regular** ($n = 6$), **heptágono regular** ($n = 7$), **octágono regular** ($n = 8$), etc. Por ejemplo, en la figura 7.17 se muestra un octágono que tiene 8 lados de longitud b. En la figura podemos ver claramente que el octágono

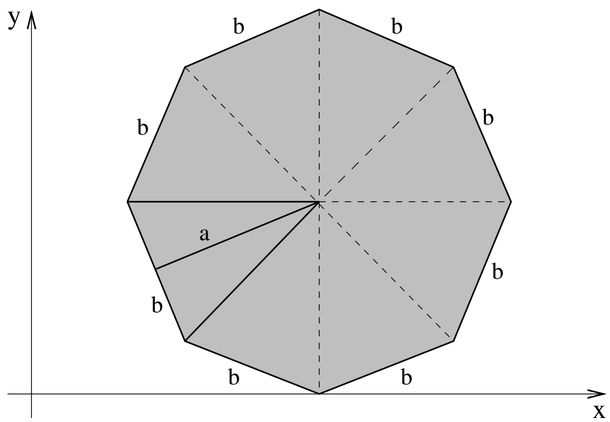


Figura 7.17: Un octágono.

regular se compone de 8 triángulos. A la altura de estos triángulo se le va a llamar **apotema**. La apotema es el segmento de recta que une el centro del polígono con el punto situado a la mitad de un lado. Observe que el lado y la apotema son perpendiculares.

El perímetro P del polígono regular de n lados de longitud b se puede calcular fácilmente como:

$$P = nb$$

Para calcular el área A del polígono regular simplemente se suman todas las áreas de los n triángulos de base b y altura a (la apotema):

$$\begin{aligned} A &= n * \left(\frac{1}{2}\, b * a\right) \\ A &= \frac{1}{2}\,(nb) * a \\ A &= \frac{1}{2}\, P * a \end{aligned}$$

El área A de **un polígono regular** de n lados de longitud b y apotema a es la mitad del producto de su perímetro P por la apotema:

$$P = nb \tag{7.21}$$

$$A = \frac{1}{2}\, Pa \tag{7.22}$$

A medida que el número de lados de un polígono crece, nos acercamos al círculo, tema de la siguiente sección.

7.12. El círculo

El **círculo** es una figura geométrica en el plano limitada por una **circunferencia**. Una circunferencia es una curva cerrada cuyos puntos mantienen una misma distancia de un punto llamado **centro de la circunferencia**. La figura 7.18 muestra un círculo como la figura con área sombreada y la circunferencia que lo limita. También se muestra el **radio** r que mide la distancia del centro a cualquier punto de su circunferencia y el **diámetro** D, el segmento de recta que une dos puntos de la circunferencia, pasando por el centro. De la figura se observa que el diámetro es dos veces la longitud del radio:

$$D = 2\,r \tag{7.23}$$

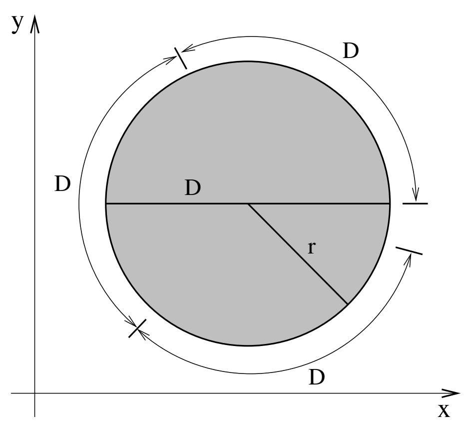


Figura 7.18: El círculo.

El perímetro del círculo corresponde a la longitud de la circunferencia que lo limita. La figura 7.18 ilustra que esta longitud corresponde a un poco más de tres veces el diámetro. El número exacto se llama número π (se leé número ”pi”) y corresponde a un número irracional:

$$\pi = 3.14159265358979323846\ldots \tag{7.24}$$

De manera que el perímetro P del círculo se puede calcular como sigue:

$$P = \pi\, D \tag{7.25}$$

Es decir, si tenemos una rueda de 1 metro de diámetro y medimos la circunferencia, nos daría una longitud aproximada de 3.14 metros.

Ahora bien, para calcular el área del círculo nos podemos imaginar que el círculo es un polígono que tiene n lados, cuando n tiene a **infinito** (cuando n crece sin límite). En forma visual un polígono de 1000 o 10^6 lados no sería muy diferente de un círculo, de manera que la apotema a corresponde al radio r. El área de este polígono sería (ecuación 7.22):

$$A \;=\; \frac{1}{2}\,Pr$$

$$
\begin{aligned}
A &= \frac{1}{2}(\pi\ D)r \\
A &= \frac{1}{2}(\pi\ 2r)r \\
A &= \pi\ r^2
\end{aligned}
$$

Nuevamente resulta que el área del círculo de radio r es un poco más de tres veces el área de un cuadrado de lado r (el cuadrado tiene una área r^2).

El Perímetro P y el área A de **un círculo** de radio r se pueden calcular como:

$$P = 2\pi\ r \tag{7.26}$$

$$A = \pi\ r^2 \tag{7.27}$$

7.13. Desplazamientos angulares en radianes y longitud de arco

Imaginemos la situación de un reloj con dos manecillas, como se muestra la figura 7.19. La manecilla horizontal, apuntando a la derecha, será la manecilla de referencia (en el plano cartesiano sería el eje x positivo partiendo del origen). Si ambas manecillas coinciden, decimos que el desplazamiento angular es de cero. Recordemos que si empieza a girar una manecilla en el sentido contrario a las manecillas del reloj, decimos que la manecilla ha efectuado un cierto desplazamiento angular o **ángulo** θ positivo (como el que se muestra en la figura 7.19). Por el contrario, si gira en el sentido de las manecillas del reloj, diremos que el ángulo es negativo.

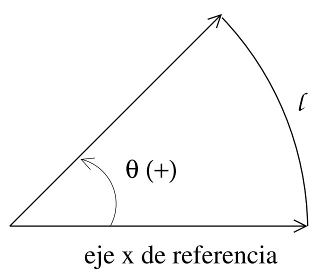


Figura 7.19: Concepto de desplazamiento angular.

Al observar con atención la figura 7.19, es interesante plantearnos la siguiente pregunta: ¿Cúal es el desplazamiento l que ha recorrido la punta de la flecha al recorrer el ángulo θ? Veamos. Si diéramos la vuelta completa, como se muestra en la figura 7.20, tenemos que l es el valor de la longitud de la circunferencia, considerando un radio r.

Como vimos en la sección anterior, la longitud de una circunferencia es π veces el diámetro de la circunferencia. Como el diámetro es dos veces el radio de la circunferencia, tenemos la ecuación siguiente:

$$l = 2\pi\ r \tag{7.28}$$

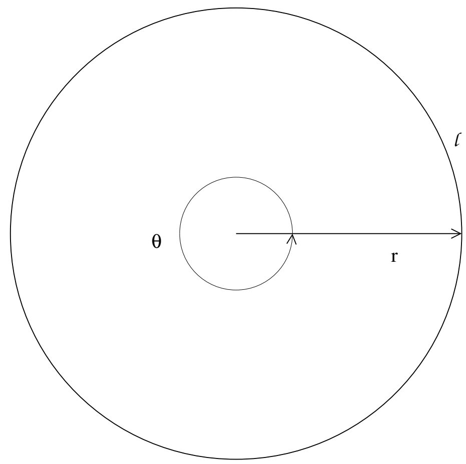


Figura 7.20: Ángulo de una vuelta completa.

Enseguida vamos a introducir una nueva unidad de medida de los ángulos, llamada **radián**. Decimos que una vuelta completa (360 grados) equivale a 2π radianes, de manera que la expresión 2π en la ecuación anterior representa un desplazamiento angular $\theta = 2\pi$ radianes.

Podemos generalizar la ecuación anterior para un ángulo θ, expresado en radianes, de manera que la longitud del arco l, que subtiende el desplazamiento angular θ, considerando un radio r, está dada por:

$$l = \theta r \tag{7.29}$$

Recuerde que el ángulo θ está expresado ahora en radianes. Si $\theta = 1$, tenemos que $l = r$, de manera que 1 radián equivale al desplazamiento angular cuyo arco l es de la misma longitud que el radio r. Si $\theta = 2\pi$, tenemos que l es la circunferencia completa ($l = 2\pi r$).

La longitud l del arco asociado a un desplazamiento angular θ (expresado en radianes) de radio r está dado por:

$$l = \theta r \tag{7.30}$$

De manera que $l = r$, cuando $\theta = 1$ radian.

7.13.1. Grados y radianes

En la sección anterior vimos que los desplazamientos angulares se pueden medir en **radianes** (abreviada como rad). Sin embargo, también es frecuente utilizar **grados sexagesimales** o simplemente **grados**. Decimos que una vuelta completa equivale a 360 grados, lo cual se escribe comúnmente como $360°$ ó $360\;$ g. Así tenemos las equivalencias:

$$2\,\pi \text{ rad} = 360 \text{ g} \tag{7.31}$$
$$\pi \text{ rad} = 180 \text{ g} \tag{7.32}$$

En estas equivalencias se ha utilizado rad para representar la unidad de medición angular en radianes, mientras que g se utiliza para representar la unidad de medición en grados. Es decir, no se indica el producto de las variables r, a, d o de g.

Si π es aproximado por el valor 3.1416 (denotado como $\pi \approx 3.1416$), decimos que 3.1416 radianes equivalen a 180 grados. De la última equivalencia podemos calcular el valor equivalente de un radian en grados:

$$\begin{aligned}
\pi(1 \text{ rad}) &= 180 \text{ g} \\
\frac{1}{\pi}\,\pi(1 \text{ rad}) &= \frac{1}{\pi}180 \text{ g} \\
1 \text{ rad} &= \frac{180}{\pi} \text{ g} \qquad (7.33)
\end{aligned}$$

Si utilizamos la aproximación $\pi \approx 3.1416$, obtenemos que un radián equivale aproximadamente a 57.2956 grados.

De una manera similar, a partir de la ecuación 7.32, podemos calcular la equivalencia de un grado en radianes:

$$\begin{aligned}
180(1 \text{ g}) &= \pi \text{ rad} \\
\frac{1}{180}\,180(1 \text{ g}) &= \frac{1}{180}\,\pi \text{ rad} \\
1 \text{ g} &= \frac{\pi}{180} \text{ rad} \qquad (7.34)
\end{aligned}$$

Como ejercicio, vamos a calcular el equivalente de 90 grados en radianes, utilizando la equivalencia anterior:

$$\begin{aligned}
90 \text{ g} &= 90(1 \text{ g}) \\
90 \text{ g} &= 90\left(\frac{\pi}{180} \text{ rad}\right) \\
90 \text{ g} &= \frac{90 * \pi}{180} \text{ rad} \\
90 \text{ g} &= \frac{\pi}{2} \text{ rad}
\end{aligned}$$

El origen del grado sexagesimal es muy antiguo. Hace muchos años, antes de Cristo, en Babilonia se dividió la circunferencia en 360 partes iguales. A cada una de esas partes le asignaron el nombre de grado.
El uso del radian inició en 1873 y actualmente es la unidad de medición angular en el Sistema Internacional de Unidades.

7.14. Figuras en tres dimensiones

Hasta este momento hemos visto figuras planas, pasemos ahora a una figura geométrica que tiene volumen.

7.14.1. El cubo

El **cubo** o **hexaedro regular** es un objeto tridimensional limitado por 6 caras cuadradas del mismo tamaño, como se ilustra en la figura 7.21. Observe que se ha añadido el eje z formando un ángulo recto con el eje x y también formando un ángulo recto con el eje y.

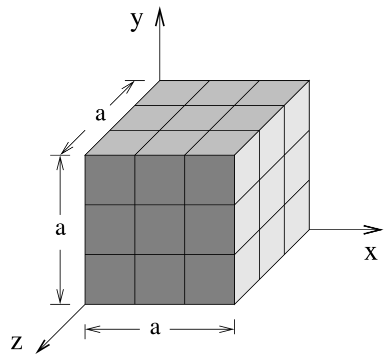


Figura 7.21: El cubo.

Se puede ver en la figura que el lado a tiene un valor de 3. La superficie o **área del cubo** está dada por el área de sus caras cuadradas. Ya sabemos que el área de una cara A_c de lado a la podemos calcular como:

$$A_c = a^2 \tag{7.35}$$

De modo que el área A del cubo esta dado por la suma de áreas de sus 6 caras:

$$A = 6\ a^2 \tag{7.36}$$

Si las unidades de los ejes x, y y z fueran metros, la superficie de cada cara, A_c, es:

$$\begin{aligned} A_c &= a^2 \\ A_c &= (3\ \mathrm{m})^2 \\ A_c &= 9\ \mathrm{m}^2 \end{aligned}$$

De la figura 7.21 podemos observar que el volumen del cubo será de 27 ($27 = 9 * 3$) cubos de un metro por lado. Es decir, el **volumen** V **del cubo** de lado a se puede calcular como sigue:

$$\begin{aligned} V &= A_c * a \\ V &= a^2 * a \\ V &= a^3 \end{aligned} \tag{7.37}$$

En el caso del cubo de lado $a = 3$ m, de la figura 7.21, el volumen será de:

$$\begin{aligned} V &= a^3 \\ V &= (3\ \mathrm{m})^3 \\ V &= (3\ \mathrm{m}) * (3\ \mathrm{m}) * (3\ \mathrm{m}) \\ V &= (3 * 3 * 3) * (\mathrm{m} * \mathrm{m} * \mathrm{m}) \\ V &= 27\ \mathrm{m}^3 \end{aligned}$$

Que también puede expresarse como $A = 27 * (1 \text{ m}^3)$, es decir el volumen de 27 cubos de un metro de lado.

El área A y el volumen V de **un cubo** de lado a están dados por:

$$A = 6a^2 \tag{7.38}$$
$$V = a^3 \tag{7.39}$$

Veamos ahora que pasa cuando permitimos que las caras cuadradas puedan ser caras rectangulares.

7.14.2. El ortoedro

El **ortoedro**, también llamado **prisma rectangular ortogonal**, está formado por caras opuestas rectangulares del mismo tamaño, como se muestra en la figura 7.22. Este prisma tiene caras rectangulares. Los pares de caras opuestas son del mismo tamaño: las caras superior e inferior, la cara frontal y trasera, y las caras laterales. De esta manera, el área A de un ortoedro de lados a, b y c, esta dada por :

$$A = 2ab + 2ac + 2bc$$

Sea $A_b = a * c$, el área de la cara inferior o base. De la figura se puede inferir que el volumen del ortoedro está dado por:

$$\begin{aligned} V &= A_b * b \\ V &= (a * c) * b \\ V &= abc \end{aligned} \tag{7.40}$$

Es decir, el volumen se calcula simplemente como el producto del área de la base por su altura.

Sea $a = 4$ el largo del ortoedro, $b = 2$ el alto y $c = 3$ el ancho, como se muestra en la figura 7.22. Como ejemplo, calculemos su área y volumen:

$$\begin{aligned} A &= 2ab + 2ac + 2bc \\ A &= 2(4)(2) + 2(4)(3) + 2(2)(3) \\ A &= 52 \\ V &= abc \\ V &= (4)(2)(3) \\ V &= 24 \end{aligned}$$

El área A y el volumen V de **un ortoedro** de lados a, b y c están dados por:

$$A = 2ab + 2ac + 2bc \tag{7.41}$$
$$V = abc \tag{7.42}$$

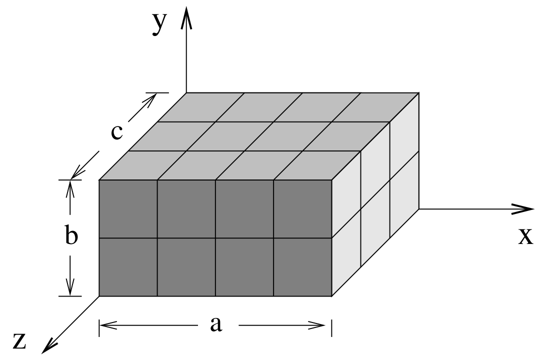


Figura 7.22: El ortoedro, un prisma rectangular ortogonal.

7.14.3. El cilindro

Ahora bien, si la cara de la base se permite que sea circular, tenemos el **cilindro**, como se ilustra en la figura 7.23. El cilindro tiene como base un círculo de radio r y una altura h.

En la parte derecha de la figura 7.23 se puede observar que el área del cilindro será 2 veces el área de la base, A_b, más el área lateral dada por la circunferencia de las base superior e inferior y la altura h. Imaginemos que el cilindro es una lata, quitamos las tapas superior e inferior y la cortamos de arriba hacia abajo. El área rectangular, A_r, será del largo de la circunferencia y de alto h. Es decir, el área del cilindro será:

$$\begin{aligned} A &= 2A_b + A_r \\ A &= 2(\pi r^2) + (\pi(2r)) * h \\ A &= 2\pi r^2 + 2\pi r h \end{aligned} \tag{7.43}$$

El volumen se puede calcular como en el caso del ortoedro, simplemente como el producto del área de la base del cilindro por su altura. Es decir:

$$\begin{aligned} V &= A_b * h \\ V &= \pi r^2 h \end{aligned} \tag{7.44}$$

El área A y el volumen V de **un cilindro** de radio r y altura h están dados por:

$$A = 2\pi r^2 + 2\pi r h \tag{7.45}$$
$$V = \pi r^2 h \tag{7.46}$$

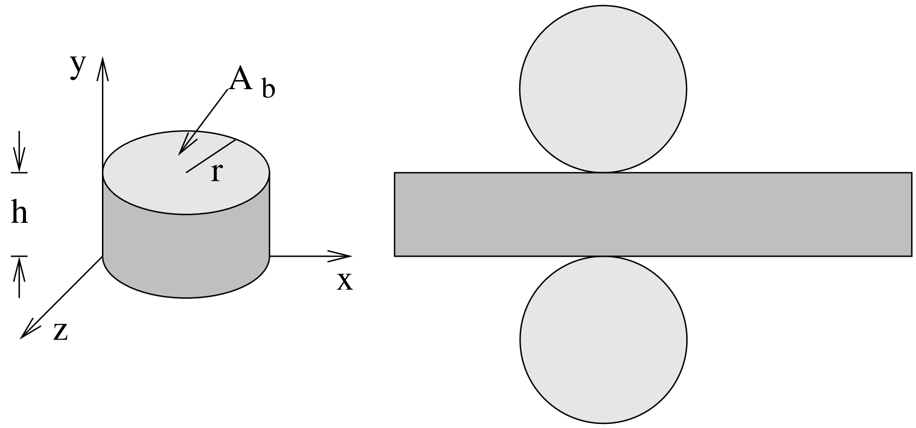


Figura 7.23: El cilindro.

7.15. Los números representan muchas cosas

Además de poder representar la cantidad de personas, bacterias, camiones, etc. También se pueden utilizar los números para medir longitudes, áreas, volúmenes, masa, tiempo, temperatura, etc.

7.15.1. Los números representan longitudes, áreas y volúmenes

El metro, múltiplos y submúltiplos

En el **Sistema Internacional de Unidades** la unidad de longitud es el **metro** (abreviado como m), definido como la longitud del trayecto recorrido por la luz en el vacío en un intervalo de tiempo de $1/299,792,458$ segundos.

Un múltiplo muy utilizado es el **kilómetro** (abreviado como km), el cual equivale a 1000 metros:

$$1 \text{ km} = 1000 \text{ m} \tag{7.47}$$

Submúltiplos del metro muy utilizados son: el **decímetro** (abreviado como dm), equivalente a una décima parte de un metro; el **centímetro** (abreviado como cm), equivalente a una centésima parte de un metro; y el **milímetro** (abreviado como mm), equivalente a una milésima parte de un metro. Es decir:

$$1 \text{ dm} = \frac{1}{10}\,(1 \text{ m}) \tag{7.48}$$

$$1 \text{ cm} = \frac{1}{100}\,(1 \text{ m}) \tag{7.49}$$

$$1 \text{ mm} = \frac{1}{1000}\,(1 \text{ m}) \tag{7.50}$$

Midiendo áreas

Dependiendo de la unidad de longitud utilizada, tenemos que las áreas se pueden medir en m^2, km^2, dm^2, cm^2, mm^2, etc.

Midiendo volúmenes

Dependiendo de la unidad de longitud utilizada, tenemos que las volúmenes se pueden medir en m^3, km^3, dm^3, cm^3, mm^3, etc.

Sin embargo, una medida de volumen muy utilizada es el **litro**. Un litro (abreviado como L) se define como el volumen de un cubo de 10 cm de lado. Es decir un litro equivale a:

$$\begin{aligned} 1 \text{ L} &= (10 \text{ cm}) * (10 \text{ cm}) * (10 \text{ cm}) \\ 1 \text{ L} &= 1000 \text{ cm}^3 \end{aligned} \tag{7.51}$$

La milésima parte de un litro se llama **mililitro** (abreviado como mL) y es equivalente a un centímetro cúbico:

$$\begin{aligned} 1 \text{ mL} &= \frac{1}{1000} \text{ L} \\ 1 \text{ mL} &= \frac{1}{1000} (1000\text{cm}^3) \\ 1 \text{ mL} &= 1 \text{ cm}^3 \end{aligned} \tag{7.52}$$

7.15.2. Los números representan tiempo

En el Sistema Internacional de Unidades la unidad de tiempo es el **segundo** (abreviado como s). Múltiplos del segundo son: el minuto (abreviado como min), equivalente a 60 segundos; la hora (abreviada como h), equivalente a 60 minutos; el día (abreviado como d), equivalente a 24 horas; el mes, normalmente equivalente a 30 días; y el año es equivalente a 365 días. Es decir:

$$1 \text{ min} = 60 \text{ s} \tag{7.53}$$

$$1 \text{ h} = 60 \text{ min} \tag{7.54}$$

$$1 \text{ d} = 24 \text{ h} \tag{7.55}$$

Submúltiplos comunes son: el **milisegundo** (abreviado como ms), el **microsegundo** (abreviado como μs) y el **nanosegundo** (abreviado como ns), definidos como sigue:

$$1 \text{ ms} = 1 * 10^{-3} \text{ s} \tag{7.56}$$

$$1 \ \mu\text{s} = 1 * 10^{-6} \text{ s} \tag{7.57}$$

$$1 \text{ ns} = 1 * 10^{-9} \text{ s} \tag{7.58}$$

7.15.3. Los números representan cantidad de masa

En el Sistema Internacional de Unidades la unidad de masa es el **kilogramo** (abreviado como kg). Un múltiplo del kilogramo es la **tonelada**, equivalente a 1000 kilogramos.

Submúltiplos comunes del kilogramo son: el **gramo** (abreviado como g), el **miligramo** (abreviado como mg) y el **microgramo** (abreviado como μg), definidos como sigue:

$$1 \text{ g} = 1 * 10^{-3} \text{ kg} \tag{7.59}$$

$$1 \text{ mg} = 1 * 10^{-3} \text{ g} \tag{7.60}$$

$$1 \ \mu\text{g} = 1 * 10^{-6} \text{ g} \tag{7.61}$$

7.15.4. Conversiones de unidades

Veamos algunos ejemplos de conversión de unidades, que aprovechan **la propiedad de sustitución de la igualdad** que se presenta en la sección 8.2 y una técnica conocida como **factores de conversión**.

Una persona camina 10,000 pasos un domingo por la mañana. Si asumimos que cada paso tiene una longitud de 80 cm, ¿Cuántos kilómetros habrá recorrido?

La distancia recorrida, D, es simplemente el producto de la cantidad de pasos por la longitud de cada paso:

$$\begin{aligned} D &= 10,000 * 80 \text{ cm} \\ D &= 800,000 \text{ cm} \end{aligned} \tag{7.62}$$

Ahora bien, para convertir los centímetros a kilómetros sabemos que:

$$\begin{aligned} 1 \text{ m} &= 100 \text{ cm} \\ 1 \text{ km} &= 1000 \text{ m} \end{aligned}$$

Si multiplicamos la primera equivalencia por $\frac{1}{100}$ y la segunda por $\frac{1}{1000}$, tenemos:

$$\frac{1}{100} \text{ m} = 1 \text{ cm} \tag{7.63}$$

$$\frac{1}{1000} \text{ km} = 1 \text{ m} \tag{7.64}$$

Aprovechando estas equivalencias, podemos sustituirlas en la ecuación 7.62:

$$\begin{aligned} D &= 800,000 \text{ cm} \\ D &= 800,000 * (1 \text{ cm}) \\ D &= 800,000 * (\frac{1}{100} \text{ m}) \\ D &= \frac{800,000}{100} \text{ m} \\ D &= 8,000 \text{ m} \\ D &= 8,000 * (1 \text{ m}) \\ D &= 8,000 * (\frac{1}{1000} \text{ km}) \\ D &= \frac{8,000}{1000} \text{ km} \\ D &= 8 \text{ km} \end{aligned}$$

Técnica de los factores de conversión

Veamos nuevamente la ecuación 7.32 que relaciona radianes con grados:

$$\pi \text{ rad} = 180 \text{ g}$$

A partir de ella podemos obtener dos **factores de conversión** que representan la unidad y que pueden ser utilizados para convertir una valor angular de grados a radianes o de radianes a grados. Si multiplicamos los dos miembros de la igualdad anterior por el inverso multiplicativo de 180 g, es decir por $\frac{1}{180\text{ g}}$, tenemos:

$$\begin{aligned}
\pi\text{ rad}\left(\frac{1}{180\text{ g}}\right) &= 180\text{ g}\left(\frac{1}{180\text{ g}}\right)\\
\frac{\pi\text{ rad}}{1}\left(\frac{1}{180\text{ g}}\right) &= 1\\
\frac{\pi\text{ rad}}{180\text{ g}} &= 1
\end{aligned}$$

En el lado derecho de la igualdad se puede observar que se aplicó la propiedad de que un número multiplicado por su inverso multiplicativo da como resultado la unidad.

Ahora bien, si multiplicamos en esta ocasión por el inverso multiplicado de π rad, es decir por $\frac{1}{\pi\text{ rad}}$, tenemos:

$$\begin{aligned}
\pi\text{ rad}\left(\frac{1}{\pi\text{ rad}}\right) &= 180\text{ g}\left(\frac{1}{\pi\text{ rad}}\right)\\
1 &= \frac{180\text{ g}}{1}\left(\frac{1}{\pi\text{ rad}}\right)\\
1 &= \frac{180\text{ g}}{\pi\text{ rad}}
\end{aligned}$$

De esta manera, hemos obtenido dos factores de conversión:

$$1 = \frac{\pi\text{ rad}}{180\text{ g}} \tag{7.65}$$

$$1 = \frac{180\text{ g}}{\pi\text{ rad}} \tag{7.66}$$

Estos factores, que representan la unidad, se pueden aprovechar para convertir, por ejemplo, 1 (rad) a grados:

$$\begin{aligned}
1\text{ rad} &= 1\text{ rad}\\
1\text{ rad} &= 1\text{ rad} * \left(\frac{180\text{ g}}{\pi\text{ rad}}\right)\\
1\text{ rad} &= \frac{180\,\cancel{\text{rad}}(g)}{\pi\,\cancel{\text{rad}}}\\
1\text{ rad} &= \frac{180}{3.1416}\text{ g}\\
1\text{ rad} &= 57.2956\text{ g}
\end{aligned}$$

El hecho de haber tachado rad en el numerador y denominador tiene su justificación debido a que $\frac{1\text{ rad}}{1\text{ rad}} = 1$. Recordemos que la división también se puede interpretar como cuántas veces es más grande el denominador, con respecto al numerador; y en este caso la respuesta es 1.

Si queremos convertir 90° a radianes, utilizamos el otro factor de conversión y hacemos lo siguiente:

$$\begin{aligned}
90 \text{ g} &= 90 \text{ g} \\
90 \text{ g} &= 90 \text{ g} * \left(\frac{\pi \text{ rad}}{180 \text{ g}}\right) \\
90 \text{ g} &= \frac{90\pi \cancel{\text{g}} \text{ rad}}{180 \cancel{\text{g}}} \\
90 \text{ g} &= \frac{90\pi}{180} \text{ rad} \\
90 \text{ g} &= \frac{\pi}{2} \text{ rad}
\end{aligned}$$

Finalmente hagamos el ejercicio de convertir la distancia $D = 800,000$ cm a kilómetros, aprovechando esta técnica de los factores de conversión, convirtiendo primero a metros y después a kilómetros:

$$\begin{aligned}
D &= 800,000 \text{ cm} \\
D &= 800,000 \text{ cm} * \left(\frac{1 \text{ m}}{100 \text{ cm}}\right) \\
D &= 800,000 \cancel{\text{cm}} * \left(\frac{1 \text{ m}}{100 \cancel{\text{cm}}}\right) \\
D &= 800,000 \cancel{\text{cm}} * \left(\frac{1 \text{ m}}{100 \cancel{\text{cm}}}\right) * \left(\frac{1 \text{ km}}{1000 \text{ m}}\right) \\
D &= 800,000 \cancel{\text{cm}} * \left(\frac{1 \cancel{\text{m}}}{100 \cancel{\text{cm}}}\right) * \left(\frac{1 \text{ km}}{1000 \cancel{\text{m}}}\right) \\
D &= \frac{800,000}{100 * 1000} \text{ km} \\
D &= 8 \text{ km}
\end{aligned}$$

7.16. Ejercicios propuestos

1. Decimos que una vuelta completa equivale a 360 grados sexagesimales, un grado (abreviado como °) está compuesto de 60 minutos sexagesimales (abreviado con un caracter ') y un minuto tiene 60 segundos sexagesimales (abreviado con el caracter "). Convierta las siguientes cantidades angulares a las unidades pedidas:

   a) 12°34'34" a radianes.

   b) 30°30'30" a radianes.

   c) 1 rad a unidades sexagesimales: grados, minutos y segundos.

   d) $\frac{\pi}{4}$ rad a unidades sexagesimales: grados, minutos y segundos.

2. Un triángulo está definido por los tres puntos siguientes: $P_1 = (2, 2)$, $P_2 = (6, 2)$ y $P_3 = (3, 5)$. Dibuje este triángulo en el plano y determine su perímetro y área.

3. Un triángulo tiene dos lados iguales de 5 cm y otro lado de 6 cm. Calcule su perímetro y su área.

4. Calcule el perímetro y área de un triángulo equilátero con lados de 7 cm.

5. Un terreno en forma rectangular mide 90 metros de largo y 30 metros de ancho. Determine su perímetro y su área.

6. Un cuadrilátero es un figura plana que tiene cuatro lados que conectan a cuatro vértices. Si los vértices están definidos por los puntos siguientes: $P_1 = (2, 2)$, $P_2 = (6, 2)$, $P_3 = (8, 5)$ y $P_4 = (3, 5)$. Dibuje en el plano este cuadrilátero y enseguida determine su perímetro y área.

7. Calcule el perímetro y el área de un círculo de 10 cm de radio.

8. Dibuje el pentágono regular limitado por una circunferencia de 5 cm de radio. Extienda el método utilizado para ahora dibujar un hexágono regular.

9. La bicicleta eléctrica de una persona tiene ruedas de 100 cm de diámetro. Si el motor eléctrico que impulsa la rueda trasera girá a 60 revoluciones o vueltas por minuto, ¿Cuál será la velocidad de la bicicleta en $\mathrm{km/h}$? Recuerde que la velocidad se calcula como la distancia recorrida entre el tiempo empleado en el recorrido.

10. Una compañía de productos lácteos va a sacar al mercado un nuevo producto de un litro de leche. Para la forma del recipiente considera utilizar un prisma rectangular ortogonal (de bases superior e inferior cuadradas) o un cilindro. En ambos casos, se desea que la altura del recipiente sea de 20 cm. Si se emplea lámina de aluminio para ambos recipientes, ¿Cuál forma del recipiente utilizará menor cantidad de aluminio?

Capítulo 8

Las ecuaciones

Consideremos la siguiente situación. Un granjero da un tercio de su herencia a su esposa y la mitad a su hijo. Si el resto lo dona a la escuela del lugar, ¿Qué parte de la herencia recibirá la escuela?

Para resolver este problema, consideremos el uso de la variable e para expresar la parte de la herencia que fue donada a la escuela. Con los datos del problema podemos formular la ecuación siguiente:

$$\frac{1}{3}+\frac{1}{2}+e=1$$

Una igualdad de este tipo que contiene una sóla variable a la primera potencia y sumas y restas de constantes se le conoce como **ecuación de primer grado con una variable**. Para encontrar el valor de la variable hacemos operaciones sobre la igualdad para tener al final la variable del lado izquierdo y su valor del lado derecho.

Podemos solucionar este problema de la forma siguiente:

$$\begin{array}{lcll}
\frac{1}{3}+\frac{1}{2}+e & = & 1 & \text{ecuación inicial} \\
(\frac{1}{3}+\frac{1}{2})+e & = & 1 & \text{utilizando la propiedad asociativa de la adición} \\
\frac{5}{6}+e & = & 1 & \text{realizando la suma de fracciones indicada} \\
-\frac{5}{6}+\frac{5}{6}+e & = & 1-\frac{5}{6} & \text{sumando } -\frac{5}{6} \text{ a ambos lados} \\
(-\frac{5}{6}+\frac{5}{6})+e & = & 1-\frac{5}{6} & \text{usando la propiedad asociativa de la adición} \\
0+e & = & 1-\frac{5}{6} & \text{realizando la operación de suma indicada} \\
e & = & \frac{1}{1}-\frac{5}{6} & \text{realizando la operación de suma indicada} \\
e & = & \frac{1}{6} & \text{realizando la operación de resta de fracciones}
\end{array}$$

De manera que la respuesta es $e=\frac{1}{6}$. Podemos comprobar que el resultado es el correcto, sustituimos la e por su valor en la ecuación original y verificamos que se mantiene la igualdad. Veamos

$$\begin{array}{lcll}
\frac{1}{3}+\frac{1}{2}+e & = & 1 & \text{ecuación inicial} \\
\frac{1}{3}+\frac{1}{2}+\frac{1}{6} & = & 1 & \text{sustituyendo el valor de } e \\
(\frac{1}{3}+\frac{1}{2})+\frac{1}{6} & = & 1 & \text{utilizando la propiedad asociativa de la adición} \\
\frac{5}{6}+\frac{1}{6} & = & 1 & \text{realizando la suma de fracciones indicada} \\
\frac{6}{6} & = & 1 & \text{realizando la suma de fracciones indicada} \\
1 & = & 1 & \text{simplificando la fracción del lado izquierdo}
\end{array}$$

Para resolver este ejercicio hemos aprovechado las propiedades de la igualdad que veremos en la siguiente sección.

8.1. Identidades y ecuaciones

Cuando una igualdad se satisface para todos los valores de las variables que contiene, se denomina **identidad**. Por ejemplo $2x = x + x$ es una identidad. Por otro lado, cuando la igualdad es cierta sólo para algunos valores de las variables involucradas, se denomina **ecuación**. Por ejemplo $x - 1 = y$ es cierta cuando las variables x y y toman sólo ciertos valores.

8.2. Propiedades de la igualdad

La igualdad tiene una importancia fundamental en las matemáticas y enseguida se revisan sus propiedades. Recordemos que una igualdad tiene dos miembros o partes: el miembro izquierdo y el miembro derecho, dependiendo de su ubicación con respecto al signo $=$. Recordemos también que ambos miembros representan números y si la igualdad es cierta, el número representado por el miembro izquierdo es igual al número representado por el miembro derecho de la igualdad. De esta forma la siguiente igualdad es cierta: $3 = 3$.

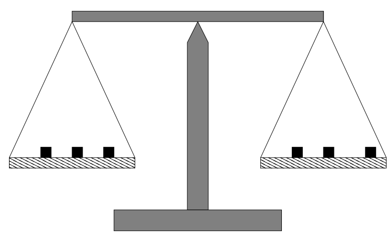


Figura 8.1: Visualización de la igualdad $3 = 3$ mediante una balanza.

La figura 8.1 presenta una visualización de esta igualdad como una balanza que contiene un tablero izquierdo con tres cilindros y otro tablero derecho también con tres cilindros. Evidentemente la barra superior de la balanza se mantendrá horizontal, indicando que la cantidad de cilindros del lado izquierdo y del lado derecho es la misma.

Si uno de los tableros tiene más cilindros que el otro, la barra superior de la balanza se inclinará hacia el tablero que tiene más cilindros y se puede afirmar que la igualdad correspondiente no es cierta.

Esta visualización de una igualdad como una balanza que mantiene su barra superior horizontal, es útil para apreciar las propiedades de la igualdad que se mencionan a continuación, asumiendo que a, b y c son expresiones que expresan números reales.

- **Reflexiva.** $a = a$.

  Todo número o expresión numérica es igual a si mismo. Por ejemplo: $2 = 2$, $2x = 2x$, $x + 3 = x + 3$, etc.

- **Simétrica.** Si $a = b$, entonces $b = a$.

  Podemos intercambiar los lados de la igualdad. Por ejemplo: si $2 = x$, entonces $x = 2$.

- **Transitiva.** Si $a = b$ y $b = c$, entonces $a = c$.

  Por ejemplo: si $2 = x$ y $x = z$, entonces podemos afirmar que $2 = z$.

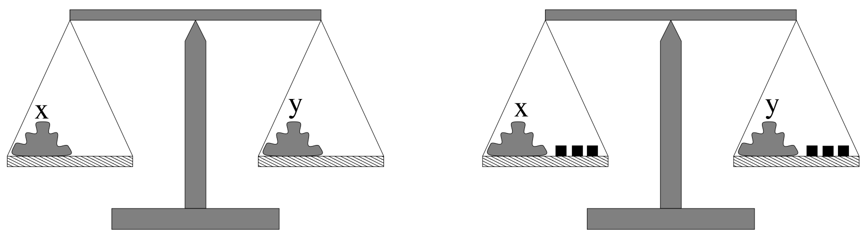
- **de Sustitución.** Si $a = b$, entonces a se puede sustituir por el valor b en cualquier otra igualdad.

Por ejemplo: si $x = 2$ y tenemos la igualdad $2 * x + 3 = y$, entonces sustituyendo el valor de x en la última igualdad tenemos: $2 * 2 + 3 = y$.

Ahora consideremos las propiedades de la igualdad considerando las operaciones que se pueden realizar al lado izquierdo y derecho de la igualdad. En esencia, decimos que la igualdad se mantiene si la operación que se le hace al miembro izquierdo de la igualdad, también se realiza al miembro derecho de la igualdad.

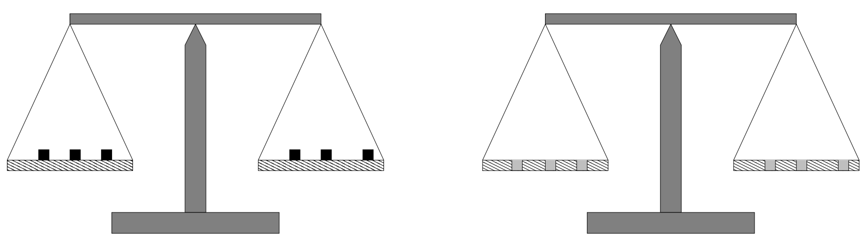
- **Suma.** Si $a = b$, entonces $a + c = b + c$.

  Esto significa que al sumar un número (positivo o negativo) a ambos miembros de la igualdad, la igualdad se mantiene. Por ejemplo: Si $x - 1 = 2$, entonces $x - 1 + 1 = 2 + 1$. Usando la analogía de la balanza, si se agrega el mismo número de cilindros al tablero izquierdo y al tablero derecho de la balanza, la barra superior de la balanza se sigue manteniendo horizontal. La figura 8.2 ilustra la situación cuando tenemos que si $x = y$, la igualdad se sigue cumpliendo al sumar 3 a ambos lados de la igualdad.



(a) $x = y$ (b) $x + 3 = y + 3$

Figura 8.2: Visualización de la igualdad $x = y$ al sumar 3 a cada lado.



(a) $3 = 3$ (b) $(-1) * 3 = (-1) * 3$

Figura 8.3: Visualización de la igualdad $3 = 3$ al multiplicar por (-1) a cada lado.

- **Producto.** Si $a = b$, entonces $a * c = b * c$.

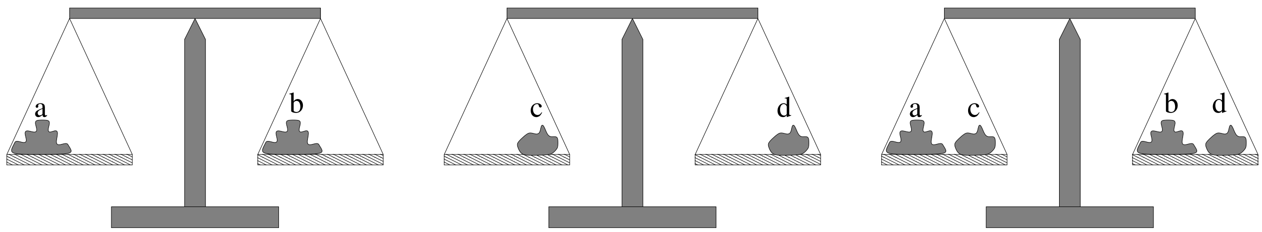
  Esto significa que al multiplicar por un número positivo o negativo a ambos miembros de la igualdad, la igualdad se mantiene. Recordando que dividir por un número es multiplicar por el inverso multiplicativo del número, tenemos que si se divide por un entero (diferente de 0) a ambos miembros de la igualdad, la igualdad se mantiene. Por ejemplo: Si $2x+1 = 3$, entonces $(2x+1)*2 = 3*2$ y también $(2x+1)*\frac{1}{2} = 3*\frac{1}{2}$. Usando la analogía de la balanza, si se duplica el número de cilindros del tablero izquierdo y también se duplica el número de cilindros del tablero derecho de la balanza, la barra superior de la balanza se sigue manteniendo horizontal. La figura 8.3 muestra del lado izquierdo la igualdad $3 = 3$ y del lado derecho la situación cuando se multiplican ambos miembros de la igualdad por (-1). El resultado es que los 3 cilindros en cada platillo se han convertido en 3 huecos y la barra superior de la balanza se mantiene horizontal.

- **Potencia.** Si $a = b$ y n es un número racional, entonces $a^n = b^n$.

  Por ejemplo: si $a = b + c$, entonces $a^2 = (b + c)^2$. En este caso quedan incluidas las operaciones de raíces.

- **Suma de igualdades.** Si $a = b$ y $c = d$, entonces $a + c = b + d$. La figura 8.4 ilustra esta propiedad.

- **Resta de igualdades.** Si $a = b$ y $c = d$, entonces $a - c = b - d$.



(a) $a = b$ (b) $c = d$ (c) $a + c = b + d$

Figura 8.4: Visualización de la suma de dos igualdades.

Cuando en una igualdad se aplica alguna de las propiedades de la igualdad, la igualdad se sigue manteniendo. Usando la analogía de la balanza, si antes de aplicar la propiedad la barra superior de la balanza estaba horizontal, después de aplicar la propiedad la barra continuará horizontal.

8.3. Resolviendo ecuaciones de primer grado

Como ejercicio, encontremos el valor de x en la ecuación $2x + 3 = 13$, aprovechando las propiedades de la igualdad y lo que hemos aprendido hasta ahora.

$$
\begin{array}{lcll}
2x+3 & = & 13 & \text{ecuación inicial} \\
2x+3-3 & = & 13-3 & \text{propiedad aditiva en la igualdad, se sumó } -3 \\
2x+(3-3) & = & 13-3 & \text{propiedad asociativa de la suma} \\
2x+0 & = & 10 & \text{sumas efectuadas} \\
2x & = & 10 & \text{suma efectuada del lado izquierdo} \\
2x*\frac{1}{2} & = & 10*\frac{1}{2} & \text{propiedad del producto en la igualdad, se multiplicó por } 1/2 \\
x*2*\frac{1}{2} & = & 10*\frac{1}{2} & \text{propiedad conmutativa del producto} \\
x*(2*\frac{1}{2}) & = & 10*\frac{1}{2} & \text{propiedad asociativa del producto} \\
x*(\frac{2}{1}*\frac{1}{2}) & = & \frac{10}{1}*\frac{1}{2} & \text{se expresan los enteros como fracciones} \\
x*\frac{2}{2} & = & \frac{10}{2} & \text{se efectuan los productos} \\
x*1 & = & 5 & \text{se efectuan las divisiones} \\
x & = & 5 & \text{se efectua el producto del lado izquierdo}
\end{array}
$$

Es bueno estar consiente de todas las operaciones que se requieren para resolver una ecuación, aún cuando en la práctica se abrevien mucho las operaciones. Por ejemplo, un estudiante avanzado podría escribir simplemente:

$$
\begin{array}{lcll}
2x+3 & = & 13 & \text{ecuación inicial} \\
2x+3-3 & = & 13-3 & \text{propiedad aditiva en la igualdad} \\
2x & = & 10 & \\
2x*\frac{1}{2} & = & 10*\frac{1}{2} & \text{propiedad del producto en la igualdad} \\
x & = & \frac{10}{2} & \\
x & = & 5 &
\end{array}
$$

8.4. Monomios y polinomios

En matemáticas se utiliza la siguiente convención para utilizar letras en expresiones numéricas. Las primeras letras del alfabeto se utilizan para representar cantidades numéricas que son conocidas y se les llama constantes. Por ejemplo, la a, b, c, 2, -3, π son constantes. Las últimas letras del alfabeto se utilizan para representar cantidades numéricas que no son conocidas y se les llama variables. Son ejemplos de variables: x, y, z, w, v, etc.

Un **monomio** es una expresión compuesta por una constante, una variable o producto de variables, donde las variables están elevadas a una potencia entera no negativa. Las siguientes expresiones contienen monomios:

- $2x^2$, 5, y, $-2xy$, son monomios.
- $x+1$, $a+b$, contienen dos monomios que se suman y se le llama **binomio**.
- x^2+2x+1, $a+b+c$, contienen tres monomios que se suman y se les llama **trinomio**.
- x^3+3x^2+3x+3, contiene 4 monomios que se suman.

En general, a la suma de monomios que contienen una única variable se le llama **polinomio** de grado n, donde n es la potencia más grande a la que se eleva la variable. Así x^3+3x^2+3x+3 es un polinomio de grado 3.

Cuando $n=1$, también se conoce como polinomio de primer orden o polinomio lineal; cuando $n=2$, se le llama polinomio de segundo grado o polinomio cuadrático; y cuando $n=3$, se le llama polinomio de tercer grado o polinomio cúbico.

8.5. Productos notables

Es muy útil conocer los productos que involucran binomios:

- **Binomio al cuadrado**. Aprovechando la propiedad distributiva generalizada descrita en la página 24, podemos ver fácilmente el resultado de un binomio al cuadrado:

$$
\begin{array}{lcl}
(a+b)^2 & = & (a+b)(a+b) \\
(a+b)^2 & = & a*a+b*a+a*b+b*b \\
(a+b)^2 & = & a*a+(1+1)(a*b)+b*b \\
(a+b)^2 & = & a^2+2ab+b^2
\end{array} \tag{8.1}
$$

  La figura 8.5 nos ayuda a ver un binomio al cuadrado como un cuadrado de lado $a+b$. Por ejemplo: $(x+1)^2 = x^2+2x+1$. Ahora bien, si tenemos la expresión x^2+2x+1 esta expresión la podemos **factorizar** como el producto de dos binomios. Es decir:

$$x^2+2x+1=(x+1)(x+1)$$

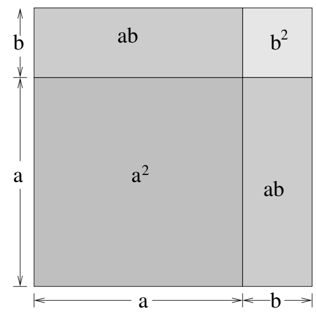


Figura 8.5: Visualización del binomio $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$.

Un trinomio que se puede factorizar de esta forma se conoce como un **trinomio cuadrado perfecto**.

- **Binomio conjugados**. Cuando tenemos binomios del tipo $(a+b)$ y $(a-b)$ se dice que son **binomios conjugados**. Su producto es el siguiente :

$$\begin{aligned}(a+b)(a-b) &= a*a+b*a-a*b-b*b\\(a+b)(a-b) &= a*a+0-b*b\\(a+b)(a-b) &= a^2-b^2 \qquad (8.2)\end{aligned}$$

Por ejemplo: $(x+1)(x-1) = x^2-1$. Ahora bien, si tenemos la expresión x^2-b^2 esta expresión la podemos **factorizar** como el producto de dos binomios conjugados. Es decir:

$$x^2-b^2 = (x+b)(x-b)$$

- **Binomios con un término común**. Cuando tenemos binomios del tipo $(a+b)$ y $(a+c)$, en los cuales hay un término común (la a), su producto es el siguiente :

$$\begin{aligned}(a+b)(a+c) &= a*a+b*a+a*c+b*c\\(a+b)(a+c) &= a*a+(b+c)a+b*c\\(a+b)(a+c) &= a^2+(b+c)a+b*c \qquad (8.3)\end{aligned}$$

Por ejemplo: $(x-5)(x+9) = x^2+4x-45$. Ahora bien, si tenemos la expresión x^2+Bx+C es posible que esta expresión la podamos **factorizar** como el producto de dos binomios con un término común. Solamente habrá que buscar dos números a y b que cumplan las siguientes condiciones: $a+b=B$ y $ab=C$.

Observe que en los tres productos el resultado es un polinomio de grado 2. En la sección 8.7 se analiza un procedimiento general para factorizar un polinomio de grado 2 como el producto de dos binomios de grado 1. Pero primero abordemos la solución de ecuaciones que involucran a un polinomio cuadrático.

Productos notables:

$(a+b)^2$	$= a^2+2ab+b^2$	binomio al cuadrado	(8.4)
$(a+b)(a-b)$	$= a^2-b^2$	binomios conjugados	(8.5)
$(a+b)(a+c)$	$= a^2+(b+c)a+b*c$	binomios con un termino común	(8.6)

8.6. Ecuaciones de segundo grado

Consideremos la siguiente situación. Necesitamos alfombrar una habitación cuadrada y nos cobran un total de $\$4,500.00$. Si el costo del metro cuadrado de alfombra ya colocado es de $\$100.00$ y en las paredes también utilizan un recubrimiento de $\$100.00$ el metro lineal, la pregunta es ¿Cúales son las dimensiones de la habitación?

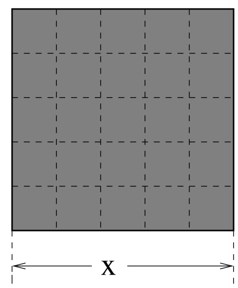


Figura 8.6: Alfombrando una habitación cuadrada.

La figura 8.6 ilustra la situación. Sea x la variable que expresa la longitud del lado de la habitación. Conocemos que el área A de un cuadrado se puede calcular como $A = x^2$ y el perímetro P de un cuadrado está dado por $P = 4x$. Si estas cantidades las multiplicamos por su costo, tenemos la siguiente ecuación:

$$100 * A + 100 * P = 4500$$

Sustituyendo A y P, tenemos:

$$100(x^2) + 100 * (4x) = 4500$$

Si multiplicamos a ambos miembros de la ecuación por $\frac{1}{100}$, tenemos una expresión más sencilla.

$$\begin{aligned} x^2 + 4x &= 45 \\ x^2 + 4x - 45 &= 0 \end{aligned}$$

Esta ecuación es una ecuación de segundo grado con una variable, una ecuación cuadrática. Esta ecuación la podemos expresar como:

$$ax^2 + bx + c = 0$$

Donde $a = 1$, $b = 4$ y $c = -45$. La solución, como se presenta en la sección 8.6.1, está dada por:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Sustituyendo los valores de a, b y c, tenemos:

$$\begin{aligned} x &= \frac{-4 \pm \sqrt{4^2 - 4(1)(-45)}}{2(1)} \\ x &= \frac{-4 \pm \sqrt{196}}{2} \\ x &= \frac{-4 \pm 14}{2} \end{aligned}$$

Los valores de x que satisfacen la ecuación cuadrática son los siguientes:

$$\begin{aligned}
x_1 &= \frac{-4+14}{2}\\
x_1 &= \frac{10}{2}\\
x_1 &= 5\\
x_2 &= \frac{-4-14}{2}\\
x_2 &= \frac{-18}{2}\\
x_2 &= -9
\end{aligned}$$

De estas ecuaciones, la que nos interesa es $x_1 = 5$ por ser positiva. La respuesta al problema planteado es una habitación de 5 metros por lado. Comprobemos este resultado en la ecuación cuadrática,

$$\begin{aligned}
x^2+4x-45 &= 0\\
5^2+4(5)-45 &= 0\\
25+20-45 &= 0\\
0 &= 0
\end{aligned}$$

8.6.1. Fórmula general para encontrar las raíces de una ecuación cuadrática

Un polinomio de grado 2 lo podemos igualar a 0, para formar una ecuación cuadrática,

$$ax^2+bx+c=0 \tag{8.7}$$

Si este trinomio lo podemos factorizar en la forma:

$$ax^2+bx+c=a(x-x_1)(x-x_2)$$

Cuando la variable x tome el valor x_1 o el valor x_2, uno de los factores se hará 0 y el producto será 0. Se dice que x_1 y x_2 son las raíces del polinomio; es decir, los valores de la variable x que hacen que el polinomio tenga un valor de 0. Cuando no es posible factorizar fácilmente un polinomio de grado 2, podemos utilizar la **fórmula general para encontrar las raíces de una ecuación cuadrática**, la cual se obtiene a continuación.

$$\begin{aligned}
ax^2+bx+c &= 0 && \text{ecuación cuadrática inicial}\\
(ax^2+bx+c)\tfrac{1}{a} &= 0*\tfrac{1}{a} && \text{multiplicando por } \tfrac{1}{a}\\
ax^2*\tfrac{1}{a}+bx*\tfrac{1}{a}+c*\tfrac{1}{a} &= 0 && \text{propiedad distributiva}\\
x^2+\tfrac{b}{a}x+\tfrac{c}{a} &= 0 && \text{simplicando productos}\\
x^2+\tfrac{b}{a}x+\tfrac{c}{a}-\tfrac{c}{a} &= 0-\tfrac{c}{a} && \text{sumando } -\tfrac{c}{a} \text{ a ambos lados}\\
x^2+\tfrac{b}{a}x &= -\tfrac{c}{a} && \text{simplificando}
\end{aligned}$$

$$
\begin{array}{lll}
x^2+\frac{b}{a}x+\frac{b^2}{4a^2} & = \frac{b^2}{4a^2}-\frac{c}{a} & \text{completanto el trinomio cuadrado perfecto} \\
(x+\frac{b}{2a})^2 & = \frac{b^2}{4a^2}-\frac{c}{a} & \text{sustituyendo por el binomio al cuadrado} \\
(x+\frac{b}{2a})^2 & = \frac{b^2}{4a^2}-\frac{c*(4a)}{a*(4a)} & \text{poniendo una fracción equivalente} \\
(x+\frac{b}{2a})^2 & = \frac{b^2}{4a^2}-\frac{4ac}{4a^2} & \text{simplificando} \\
(x+\frac{b}{2a})^2 & = \frac{b^2-4ac}{4a^2} & \text{haciendo la suma de fracciones} \\
x+\frac{b}{2a} & = \pm\sqrt{\frac{b^2-4ac}{4a^2}} & \text{realizando la raíz cuadrada a ambos lados} \\
x+\frac{b}{2a} & = \pm\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a} & \text{realizando la raíz cuadrada a la fracción} \\
x+\frac{b}{2a}-\frac{b}{2a} & = -\frac{b}{2a}\pm\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a} & \text{sumando } -\frac{b}{2a} \\
x & = -\frac{b}{2a}\pm\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a} & \text{simplificando} \\
x & = \frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a} &
\end{array}
$$

Esta fórmula fue la que aplicamos para resolver la ecuación cuadrática al inicio de este capítulo y es muy útil para factorizar polinomios de grado 2 en una variable, como veremos a continuación.

Fórmula general para resolver ecuaciones cuadráticas. Los valores de x que satisfacen la ecuación cuadrática $ax^2+bx+c=0$ se pueden calcular mediante:

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a} \tag{8.8}$$

Los dos valores que puede tener la variable x (una con el signo positivo de la raíz cuadrada y la otra con el signo negativo de la raíz) se denominan raíces de la ecuación cuadrática.

8.7. Factorización de un polinomio de segundo orden

Si tenemos el polinomio cuadrático: x^2+bx+c, donde b y c son constantes conocidas; el problema de factorizar este polinomio consiste en determinar las constantes x_1 y x_2 que satisfacen la siguiente ecuación:

$$x^2+bx+c=(x-x_1)(x-x_2)$$

Si realizamos el producto de binomios del lado derecho de la igualdad y simplificamos restando x^2 a los dos lados de la ecuación, tenemos lo siguiente:

$$\begin{aligned} x^2+bx+c &= (x-x_1)(x-x_2) \\ x^2+bx+c &= x^2+(-x_1-x_2)x+x_1x_2 \\ (x^2-x^2)+bx+c &= (x^2-x^2)+(-x_1-x_2)x+x_1x_2 \\ bx+c &= (-x_1-x_2)x+x_1x_2 \end{aligned}$$

Para que esta ecuación se cumpla el polinomio lineal del lado izquierdo debe ser el mismo que el polinomio del lado derecho. Esto es, las constantes que multiplican a la x deben ser iguales y también los términos independientes. Es decir, se requiere que se cumplan las siguientes condiciones:

$$b = -x_1-x_2 \tag{8.9}$$

$$c = x_1x_2 \tag{8.10}$$

De la ecuación 8.10 podemos despejar x_1:

$$x_1 = \frac{c}{x_2} \tag{8.11}$$

Si sustituimos esta ecuación en la ecuación 8.9 y simplificamos, tenemos lo siguiente:

$$\begin{aligned} b &= -x_1-x_2 \\ b &= -(\frac{c}{x_2})-x_2 \\ b &= -\frac{c}{x_2}-\frac{x_2^2}{x_2} \\ b &= \frac{-c-x_2^2}{x_2} \\ bx_2 &= -c-x_2^2 \\ x_2^2+bx_2+c &= 0 \end{aligned}$$

Puede observarse que si x_2 se cambia por x, ¡se obtiene el polinomio cuadrático original del lado izquierdo de la ecuación!

Por otro lado, si de la ecuación 8.10 despejamos x_2:

$$x_2 = \frac{c}{x_1} \tag{8.12}$$

y sustituimos esta ecuación en la ecuación 8.9, tenemos lo siguiente:

$$\begin{aligned} b &= -x_1-x_2 \\ b &= -x_1-(\frac{c}{x_1}) \\ b &= -\frac{x_1^2}{x_1}-\frac{c}{x_1} \\ b &= \frac{-x_1^2-c}{x_1} \\ bx_1 &= -x_1^2-c \\ x_1^2+bx_1+c &= 0 \end{aligned}$$

Nuevamente, puede observarse que si x_1 se cambia por x, ¡se obtiene el polinomio cuadrático original! Esto nos lleva a un resultado muy importante.

Factorización de un polinomio cuadrático. Para factorizar un polinomio cuadrático $x^2 + bx + c$ es suficiente igualarlo a cero y obtener las dos raíces de dicha ecuación cuadrática. Si x_1 y x_2 son las raíces de la ecuación cuadrática: $x^2 + bx + c = 0$, entonces se cumple que:

$$x^2 + bx + c = (x - x_1)(x - x_2)$$

Ahora bien, en el caso general del polinomio cuadrático $p(x) = ax^2+bx+c$, podemos factorizarlo de la siguiente forma:

$$\begin{aligned}
ax^2 + bx + c &= a(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}) \\
ax^2 + bx + c &= a(x^2 + b'x + c') \\
ax^2 + bx + c &= a(x - x_1)(x - x_2) \\
ax^2 + bx + c &= (ax - ax_1)(x - x_2) \\
ax^2 + bx + c &= (x - x_1)(ax - ax_2)
\end{aligned}$$

Donde x_1 y x_2 son las raíces del polinomio $p'(x) = x^2 + b'x + c'$, para $b' = \frac{b}{a}$ y $c' = \frac{c}{a}$. Es interesante observar que el polinomio original $p(x)$ y el nuevo polinomio $p'(x)$ tienen las mismas raíces: x_1 y x_2. Es decir, cuando $x = x_1$ o $x = x_2$, ambos polinomios se anulan. Esta situación ocurre debido a que en la deducción de la fórmula general para resolver ecuaciones de segundo grado (sección 4.7.5) el primer paso fue multiplicar a la ecuación cuadrática por $\frac{1}{a}$.

Factorización de un polinomio cuadrático. Para factorizar un polinomio cuadrático $ax^2 + bx + c$ es suficiente igualarlo a cero y obtener las dos raíces de dicha ecuación cuadrática. Si x_1 y x_2 son las raíces de la ecuación cuadrática: $ax^2 + bx + c = 0$, entonces se cumple que:

$$ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2) \tag{8.13}$$

$$ax^2 + bx + c = (ax - ax_1)(x - x_2) \tag{8.14}$$

$$ax^2 + bx + c = (x - x_1)(ax - ax_2) \tag{8.15}$$

8.7.1. Ejemplos de factorización de un polinomio cuadrático

El polinomio $p(x) = x^2 - 1$ tiene como raíces: $x_1 = 1$ y $x_2 = -1$, puesto que $p(1) = 1^2 - 1 = 0$ y $p(-1) = (-1)^2 - 1 = 0$. Por lo tanto, $p(x)$ se puede factorizar como:

$$x^2 - 1 = (x + 1)(x - 1)$$

El polinomio $p(x) = 2x^2 - 2$ también tiene como raíces a: $x_1 = 1$ y $x_2 = -1$. Por lo tanto, se puede factorizar como:

$$2x^2 - 2 = 2(x+1)(x-1)$$
$$2x^2 - 2 = (2x+2)(x-1)$$

Ahora consideremos el caso del polinomio $p(x) = x^2 + 2x + 1$. Al aplicar la formula general para resolver la ecuación cuadrática $x^2 + 2x + 1 = 0$ obtenemos las raíces : $x_1 = -1$ y $x_2 = -1$. Por lo tanto, $p(x)$ se puede factorizar como:

$$\begin{aligned} x^2 + 2x + 1 &= (x - (-1))(x - (-1)) \\ x^2 + 2x + 1 &= (x+1)(x+1) \end{aligned}$$

Finalmente consideremos el caso del polinomio $p(x) = 2x^2 - 2x - 4$. Al aplicar la formula general para resolver la ecuación cuadrática: $2x^2 - 2x - 4 = 0$ obtenemos las raíces : $x_1 = -1$ y $x_2 = 2$. Podemos comprobar fácilmente que $p(-1) = 0$ y que $p(2) = 0$. Por lo tanto, $p(x)$ se puede factorizar como:

$$\begin{aligned} 2x^2 - 2x + 4 &= 2(x - (-1))(x - 2)) \\ 2x^2 - 2x + 4 &= 2(x+1)(x-2) \\ 2x^2 - 2x + 4 &= (2x+2)(x-2) \end{aligned}$$

Note que se obtiene el mismo resultado si se trabaja con el polinomio $p'(x)$, por tener las mismas raíces:

$$\begin{aligned} 2x^2 - 2x + 4 &= 2(x^2 - x + 2) \\ 2x^2 - 2x + 4 &= 2(x - (-1))(x - 2)) \\ 2x^2 - 2x + 4 &= 2(x+1)(x-2) \end{aligned}$$

8.8. Ecuaciones de primer grado con dos variables

Para iniciar el estudio de las ecuaciones de primer grado con dos variables, iniciemos con su aplicación para resolver el problema del modelado de un sensor de distancia de un robot.

8.8.1. El sensor de un robot

Imaginemos la siguiente situación. En un robot, cierto sensor de distancia tiene una curva de operación como la mostrada en la figura 8.7. En la línea horizontal se registra el valor de voltaje x (en volts) entregado por el sensor. En la línea vertical se puede estimar la distancia y (en metros) al obstáculo detectado.

El sensor entrega un voltaje de 3 volts cuando la distancia es de 0 metros y de 0 volts cuando la distancia es de 3 metros. Los valores intermedios entre 0 y 3 volts siguen el comportamiento de la línea recta mostrada en la figura. Por ejemplo, en la figura se marcaron explícitamente 2 puntos sobre la línea. El punto con **coordenadas** $(2, 1)$ corresponde a un voltaje de 2 volts y una distancia de 1 metro (estos valores están indicados por las líneas discontinuas vertical y horizontal). De igual manera se muestra el punto de operación con coordenadas $(1, 2)$ que corresponde a un voltaje de 1 volt y una distancia de 2 metros. Se desea obtener una expresión matemática para determinar la distancia sensada teniendo como entrada el voltaje que entrega el sensor.

Veamos a continuación la expresión matemática que genera el comportamiento de una línea recta.

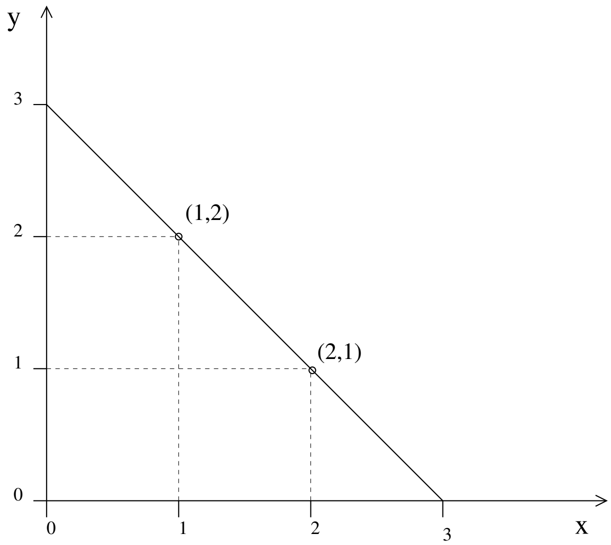


Figura 8.7: Operación de un sensor de distancia.

8.8.2. Ecuación de una línea recta

Lo que necesitamos obtener es una expresión matemática que relacione los valores de las variables x y y que sigan una línea recta. La **ecuación general de una línea recta** es la siguiente:

$$Ax + By + C = 0 \tag{8.16}$$

Donde A, B y C definen exáctamente de que recta se trata.

El plano donde el eje horizontal corresponde a los valores que toma la variable x y el eje vertical corresponde a los valores de la variable y, se le denomina plano cartesiano y se muestra en la figura 8.8. El plano contiene además los casos de rectas que se mencionan a continuación:

- **recta vertical (L1)** Si $A = 1$, $B = 0$ y $C = -1$, la ecuación de la recta es $x + 0y - 1 = 0$, o bien $x = 1$. En este caso se trata de una recta vertical que pasa por el punto $x = 1$, la variable y puede tomar cualquier valor. Algunos puntos sobre esta recta son los siguientes: $(1, -1)$, $(1, 0)$, $(1, 1)$,$(1, 2)$, etc.

- **recta horizontal (L2)** Si $A = 0$, $B = 1$ y $C = -1$, la ecuación de la recta es $0x + y - 1 = 0$, o bien $y = 1$. En este caso se trata de una recta horizontal que pasa por el punto $y = 1$, la variable x puede tomar cualquier valor. Algunos puntos sobre esta recta son los siguientes: $(-1, 1)$, $(0, 1)$, $(1, 1)$,$(2, 1)$, etc.

- **recta inclinada hacia arriba (L3)** Si $A = -1$, $B = 1$ y $C = 0$, la ecuación de la recta es $-x + y + 0 = 0$, o bien $y = x$. En este caso se trata de una recta inclinada que pasa por los puntos $(-1, -1)$, $(0, 0)$, $(1, 1)$, $(2, 2)$, $(3, 3)$, etc.

- **recta inclinada hacia abajo (L4)** Si $A = 1$, $B = 1$ y $C = 0$, la ecuación de la recta es $x + y + 0 = 0$, o bien $y = -x$. En este caso se trata de una recta inclinada que pasa por los puntos $(-1, 1)$, $(0, 0)$, $(1, -1)$, $(2, -2)$, $(3, -3)$, etc.

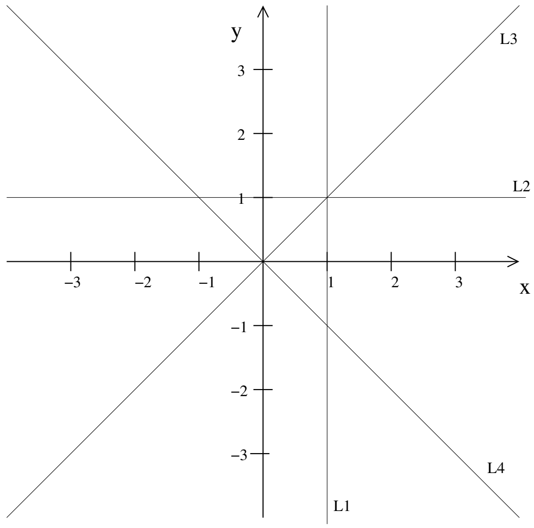


Figura 8.8: Líneas en el plano cartesiano.

Si excluimos el caso de rectas verticales, podemos llegar a una expresión más sencilla para las rectas:

$$\begin{array}{lcll}
Ax + By + C & = & 0 & \text{ecuación inicial} \\
Ax + By + C - Ax - C & = & 0 - Ax - C & \text{sumando } -Ax - C \text{ a ambos lados} \\
By & = & -Ax - C & \text{simplificando} \\
By * \frac{1}{B} & = & (-Ax - C) * \frac{1}{B} & \text{multiplicando por } \frac{1}{B} \\
y & = & \frac{-A}{B}x + \frac{-C}{B} & \text{simplificando} \\
y & = & mx + b & \text{introduciendo las variables nuevas } m \text{ y } b
\end{array}$$

Para obtener esta ecuación se han introducido las variables:

$$m = \frac{-A}{B} \tag{8.17}$$

$$b = \frac{-C}{B} \tag{8.18}$$

A esta ecuación,

$$y = mx + b \tag{8.19}$$

Se conoce como la **ecuación explícita de la recta**, y contiene sólo dos parámetros, la m y la b. Veamos el efecto de estos parámetros sobre la recta.

A la m se le conoce como **pendiente** y define el grado de inclinación de la recta. Si $m = 0$, entonces la recta se reduce a $y = b$, una recta horizontal que pasa por el valor de $y = b$. Si $m = 1$ tenemos una recta inclinada hacia arriba y si m crece mucho, la recta se va acercando a la línea vertical. Si $m = -1$ tenemos una recta inclinada hacia abajo.

Para ver el impacto del parámetro b en la línea, consideremos qué pasa cuando $x = 0$. En ese caso, el valor de $y = b$; es decir, el valor de y cuando la recta atraviesa el eje y en el punto $(0, b)$. Por esta razón a b se le conoce como **ordenada al origen** (el término ordenada se refiere a los valores que toma y y abscisa se refiere a los valores que toma x).

La ecuación 8.19 nos permite calcular el valor de y dependiendo del valor que tome la variable x. Decimos que la ecuación 8.19: $y = mx + b$, representa a todos los puntos (x, y) que componen una línea recta. Veamos algunos ejemplos de líneas usando esta notación:

- La línea horizontal L_2 de la figura 8.8 está representado por:

$$\begin{aligned} y &= (0)x + 1 \\ y &= 1 \end{aligned}$$

  Es decir, debido a que la pendiente es cero, la variable x puede tomar cualquier valor, y el valor de y es 1 en todos los casos.

- La línea L_3 de la figura 8.8 está representado por:

$$\begin{aligned} y &= (1)x + 0 \\ y &= x \end{aligned}$$

  Es decir, cuando x asume cierto valor, la variable y adquiere ese mismo valor.

- La línea L_4 de la figura 8.8 está representado por:

$$\begin{aligned} y &= (-1)x + 0 \\ y &= -x \end{aligned}$$

  Es decir, cuando x asume cierto valor, la variable y adquiere el inverso aditivo de x.

- Finalmente, la línea L_1 de la figura 8.8 no se puede representar en la forma $y = mx + b$. A medida que la pendiente m se haga más grande, la recta se irá acercando a la línea vertical, pero no es posible alcanzar la vertical, sin importar que tan grande sea m.

La ecuación general de una recta, con parámetros A, B y C, está dada por:

$$Ax + By + C = 0 \tag{8.20}$$

La ecuación explícita de una recta, con parámetros m y b, está dada por:

$$y = mx + b \tag{8.21}$$

En ambos casos, todos los puntos (x, y) que satisfacen dichas ecuaciones forman la recta. En la ecuación explícita de una recta no es posible representar rectas verticales.

8.8.3. Concepto de función

Una **función** f, calculada a partir de una variable de entrada x, se denota como $f(x)$. Conviene precisar que f no representa a una variable, de manera que $f(x)$ no significa que la variable f se multiplica por la variable x. Veamos un ejemplo:

$$f(x) = x + 1$$

Esta igualdad representa que la función f obtiene su valor sumando una unidad al valor que se le asigne a su variable de entrada x. Enseguida se muestran algunos valores que puede tener la función f, si la variable x toma algunos valores enteros:

$$\begin{aligned} f(0) &= 0+1 \\ f(0) &= 1 \\ \\ f(1) &= 1+1 \\ f(1) &= 2 \\ \\ f(2) &= 2+1 \\ f(2) &= 3 \end{aligned}$$

La figura 8.9 ilustra el concepto de una función. El bloque de procesamiento recibe a x como entrada y emite el valor $f(x)$ como salida. En la figura, $f(x)$ se asigna como valor de la variable de salida y. Dado un valor de entrada de x, la función $f(x)$ emite como salida un único valor. Es decir, f **es una función si** $f(x)$ **toma un único valor ante un determinado** x. Si f pudiera tomar dos o más valores, entonces decimos que f no es una función. La función f definida anteriormente como: $f(x) = x+1$, si cumple el requisito de ser una función, porque a cada valor de x le corresponde un único valor de $f(x)$.

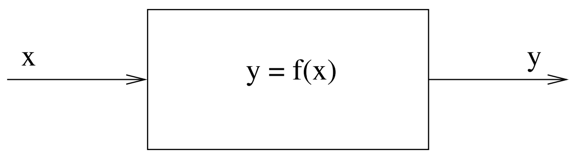


Figura 8.9: Una función vista como un bloque de procesamiento con una entrada y una salida.

La variable x se denomina **variable independiente** (o de entrada) y la variable y se denomina **variable dependiente** (o de salida), porque su valor depende del valor de x. El conjunto de posibles valores que puede tomar la variable de entrada x se conoce como **dominio de la función** y el conjunto de posibles valores que puede tomar la variable y se conoce como **rango de la función**.

Como se mencionó anteriormente, si se asignaran dos o más valores para un determinado x decimos que ya no se cumple con el requisito de ser función. Por ejemplo, $f(x)$ definida como $f(x) = \pm\sqrt{x}$ no es una función, porque para un determinado valor de x, existen dos posibles valores de $f(x)$. Por ejemplo, cuando $x = 4$, $f(4) = \pm\sqrt{4}$, puede tener el valor de $f(4) = 2$ y también de $f(4) = -2$, debido a que en ambos casos: $2^2 = 4$ y $(-2)^2 = 4$.

Sin embargo, si tomamos sólo la raíz cuadrada positiva, entonces $f(x) = \sqrt{x}$ si es una función; su dominio y su rango serían los valores reales positivos.

Una función puede recibir más de una variable de entrada y asignar un único valor de salida. La figura 8.10 ilustra una función con dos entradas. Ahora se reciben como entradas las variables x y y y se emite el valor $f(x, y)$ como salida. En la figura $f(x, y)$ se asigna como valor de la variable de salida z. Dado un par de valores de entrada (x, y), la función emite como salida un valor único para z.

Por ejemplo, la función siguiente recibe como entrada las variables x y y,

$$\begin{aligned} z &= f(x, y) \\ z &= x^2 + y^2 \end{aligned}$$

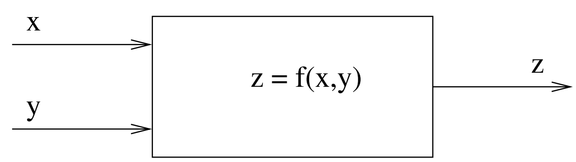


Figura 8.10: Una función de dos entradas.

Si consideramos como el dominio de la función los posibles pares de valores (x, y), donde $-1 < x < 1$, $-1 < y < 1$, la gráfica mostrada en la figura 8.11 muestra el comportamiento de la función.

Observe que ahora los ejes x y y definen el plano horizontal (como el piso de una habitación) y se agregó un nuevo eje z vertical, de manera que un punto en este espacio tridimensional queda representado por los valores (x, y, z). En este caso, la ecuación $z = x^2 + y^2$ representa a todos los puntos que forman la superficie en tonos de gris mostrada en la figura. Por ejemplo, los puntos $(-1, -1, 2)$, $(1, -1, 2)$, $(-1, 1, 2)$ y $(1, 1, 2)$, corresponden a las cuatro esquinas de la superficie, las cuales tienen un valor $z = 2$. El punto $(0, 0, 0)$ corresponde al fondo de la superficie (el cual no se alcanza a ver en la figura).

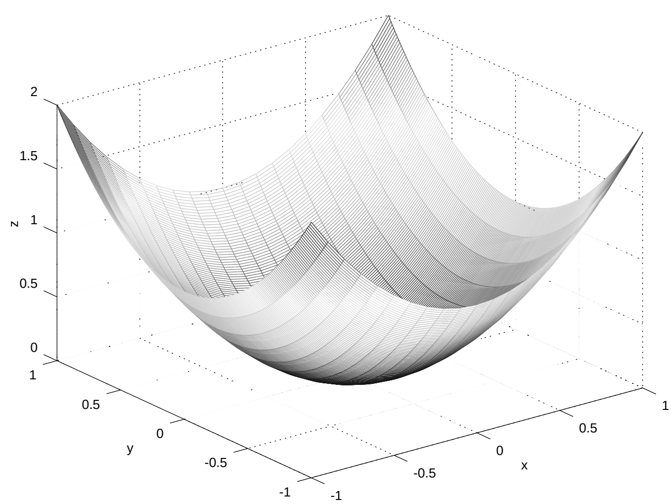


Figura 8.11: Gráfica de la función $z = x^2 + y^2$.

Concepto de función. Una función f sobre una variable de entrada x, denotada como $f(x)$, **asigna un único valor** a $f(x)$ para cada determinado valor que tome la variable de entrada x.

Más adelante, en la sección 12.7 profundizaremos en el tema de diferentes tipos de funciones.

8.8.4. Solución de un sistema de ecuaciones para obtener la línea

Con dos puntos situados sobre la línea es posible encontrar la ecuación de la línea. Sean P_1 un punto sobre la línea, con coordenadas (x_1, y_1); y P_2 otro punto, con coordenadas (x_2, y_2). Con esta información, el objetivo es encontrar la m y la b que definen la línea buscada.

Si P_1 y P_2 están sobre la línea, sus coordenadas deben cumplir la ecuación de la recta. Esto es, las dos ecuaciones siguientes deben cumplirse:

$$y_1 = mx_1 + b \tag{8.22}$$

$$y_2 = mx_2 + b \tag{8.23}$$

Tenemos un **sistema de dos ecuaciones de primer grado con dos incognitas**. Para encontrar los valores de las variables desconocidas, se pueden emplear varios métodos.

Si de una ecuación despejamos una variable, digamos la b, y la sustituimos en la otra ecuación; la nueva ecuación tiene sólo una variable desconocida y puede resolverse fácilmente. A este método se le conoce como **método de sustitución**.

Si de ambas ecuaciones despejamos una variable, digamos la b, y las igualamos, obtenemos otra ecuación; la nueva ecuación tiene sólo una variable desconocida y puede resolverse fácilmente. A este método se le conoce como **método de igualación**.

Si combinamos las dos ecuaciones sumando o restando los lados de las ecuaciones, el método se le conoce como **método de sumas y restas**. Para resolver las ecuaciones 8.22 y 8.23, este método de sumas y restas es fácilmente aplicable.

Si restamos el miembro izquierdo de la ecuación 8.22 del miembro izquierdo de la ecuación 8.23, y hacemos lo mismo con los lados derechos de las ecuaciones, tenemos:

$$\begin{aligned}
y_2 - y_1 &= (mx_2 + b) - (mx_1 + b) \\
y_2 - y_1 &= mx_2 - mx_1 + (b - b) \\
y_2 - y_1 &= m(x_2 - x_1) \\
(y_2 - y_1)\frac{1}{x_2 - x_1} &= m(x_2 - x_1)\frac{1}{x_2 - x_1} \\
\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} &= m
\end{aligned}$$

Es decir, la pendiente m de la recta la podemos calcular por medio de:

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \tag{8.24}$$

Conocida la pendiente, el valor de b se puede despejar de la ecuación 8.22 ó 8.23. Veamos:

$$\begin{aligned}
y_1 &= mx_1 + b \\
mx_1 + b &= y_1 \\
mx_1 + b - mx_1 &= y_1 - mx_1 \\
b &= y_1 - mx_1 \qquad (8.25)
\end{aligned}$$

Determinar una recta a partir de dos puntos. Dados dos puntos de una recta: $P_1 = (x_1, y_1)$ y $P_2 = (x_2, y_2)$, la recta que pasa por ellos se puede calcular como sigue:

$$y = mx + b \tag{8.26}$$
$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \tag{8.27}$$
$$b = y_1 - mx_1 \tag{8.28}$$

8.8.5. Solución del problema del sensor del robot

A partir de los puntos $(3, 0)$ y $(0, 3)$ de la recta podemos calcular m y b a partir de las fórmulas de la sección anterior. En este caso tenemos $x_1 = 3$, $y_1 = 0$, $x_2 = 0$, $y_2 = 3$,

$$\begin{aligned} m &= \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \\ m &= \frac{3 - 0}{0 - 3} \\ m &= \frac{3}{-3} \\ m &= -1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} b &= y_1 - mx_1 \\ b &= 0 - (-1)(3) \\ b &= 3 \end{aligned}$$

Finalmente la ecuación de la recta buscada es:

$$y = -x + 3$$

Podemos comprobar fácilmente que los puntos sobre la recta de la figura 8.7 satisfacen esta ecuación. Por ejemplo, probemos con los puntos $(2, 1)$ y $(1, 2)$.

$$\begin{aligned} y &= mx + b \\ 1 &= -1(2) + 3 \\ 1 &= 1 \end{aligned}$$

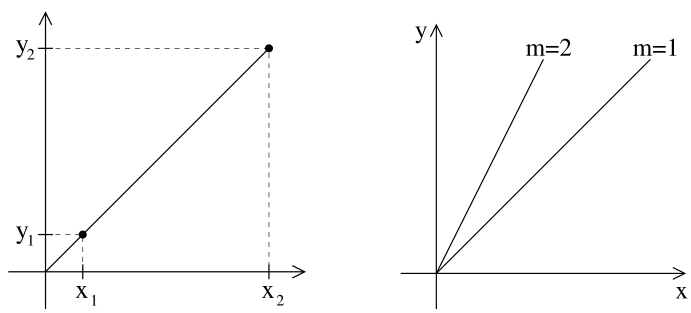
$$\begin{aligned} y &= mx + b \\ 2 &= -1(1) + 3 \\ 2 &= 2 \end{aligned}$$

8.9. Problemas de variación proporcional directa

Consideremos la siguiente situación. Voy a la tienda y compro 3 kilogramos de manzanas en 60 pesos, pero me doy cuenta de que son insuficientes y requiero 2 kilogramos más. ¿Cuanto dinero necesito para comprar los dos kilogramos adicionales?

Si la variable x representa la cantidad de kilogramos de manzanas y la variable y el costo de dicha cantidad de manzanas, sea $x_1 = 3$, $y_1 = 60$, $x_2 = 2$ y y_2 la cantidad que se desea encontrar. Analicemos este problema. Si compro 0 kilogramos de manzanas, el costo es de 0 pesos. Si compro 6 kilogramos de manzanas, deberé pagar el doble de dinero que por 3 kilogramos; es decir, 120 pesos. Si graficamos estos puntos: $(0, 0)$, $(3, 60)$, y $(6, 120)$, en un plano cartesiano, podemos observar que son puntos de una línea recta que pasa por el origen. Por esta razón, este tipo de problemas los podemos modelar como una función lineal que pasa por el origen:

$$y = mx \tag{8.29}$$



(a) $\frac{y_1}{x_1} = \frac{y_2}{x_2}$ (b) casos: $m = 1$ y $m = 2$

Figura 8.12: Variación proporcional directa. En (a) se observa que la fracción $\frac{y_1}{x_1}$ es igual a $\frac{y_2}{x_2}$. En (b) se presenta el caso de rectas con pendientes $m = 1$ y $m = 2$. Recuerde que la pendiente $m = \tan\theta$.

La figura 8.12 nos ayuda a visualizar este tipo de problemas. Veamos si se cumplen nuestras expectativas. Si $x_0 = 0$, es evidente que $y_0 = mx_0$ toma también el valor de 0. Ahora bien, asumamos que tenemos que para cierto valor x_1, tenemos otro valor $y_1 = mx_1$. Calculemos ahora que pasa para un valor x_2 que es seis veces más que x_1 (es decir, $x_2 = 6\ x_2$):

$$\begin{aligned} y_2 &= mx_2 \\ y_2 &= m(6\ x_1) \\ y_2 &= 6 * (mx_1) \\ y_2 &= 6\ y_1 \end{aligned}$$

Es decir, cuando la variable x_1 aumentó 6 veces, también aumentó 6 veces la variable y_1, como se deseaba. Esta situación se ilustra en la figura 8.12(a). Conviene resaltar que un aspecto fundamental de este comportamiento se puede apreciar de la ecuación 8.29: $y = mx$. Si $x = 0$, entonces $y = m * (0) = 0$. Es decir, la recta pasa por el origen. De esta manera sólo se requiere un punto para calcular la recta (definida sólo por la pendiente m), dado que la recta también pasa por el origen (el punto $(0, 0)$). La figura 8.12(b) ilustra dos casos de rectas con pendiente $m = 1$ y $m = 2$.

De esta manera comprobamos que la función lineal que pasa por el origen es una representación matemática adecuada para este tipo de problemas.

En la ecuación 8.29, la pendiente m se puede calcular como sigue:

$$m = \frac{y}{x}$$

El valor de m define el costo en pesos por cada kilogramo de manzana y asumimos que no cambia. Es decir:

$$\begin{aligned} m &= \frac{y_1}{x_1} \\ m &= \frac{y_2}{x_2} \\ \frac{y_1}{x_1} &= \frac{y_2}{x_2} \end{aligned} \tag{8.30}$$

Analicemos esta última ecuación. Para mantener la m con un valor constante, la fracción $\frac{y}{x}$ debe mantenerse constante. Como una fracción solo se mantiene igual si se multiplica o divide tanto el numerador como el denominador por la misma cantidad, si se duplica el numerador también se debe duplicar el denominador, si se reduce a la mitad el numerador, también se debe reducir a la mitad el denominador, etc. Cuando este comportamiento ocurre se dice que se tiene un caso de **variación proporcional directa**.

La anterior ecuación se puede escribir simplemente como sigue:

$$\frac{y_1}{x_1} = \frac{y_2}{x_2} \tag{8.31}$$

Si se desea conocer y_2 bastará despejar esa variable y sustituir los datos del problema planteado al inicio de esta sección:

$$\begin{aligned} y_2 &= \frac{y_1}{x_1} x_2 \\ y_2 &= \frac{(60)}{(3)}(2) \\ y_2 &= 40 \end{aligned}$$

El resultado del costo de dos kilos de manzanas es 40 pesos.

Al comportamiento de las variables involucradas en la ecuación 8.31 se le conoce como **regla de tres para variación proporcional directa**, aunque desafortunadamente se expresa comúnmente su comportamiento como una regla dogmática, sin hacer ninguna referencia a la función lineal que pasa por el origen. En ocasiones los estudiantes aplican la regla de tres incorrectamente a problemas lineales que no pasan por el origen.

Variación proporcional directa. En este tipo de problemas dos variables (x y y) están relacionadas entre si. Si una se duplica, la otra también se duplica; si una se triplica, la otra también se triplica; si una se hace cero, la otra también se hace cero, etc. El modelo matemático que representa este comportamiento está definido por la ecuación:

$$\frac{y_1}{x_1} = \frac{y_2}{x_2} \tag{8.32}$$

En esta expresión y_1 está relacionado con x_1 y y_2 está relacionado con x_2, manteniendo siempre constante la fracción $\frac{y}{x}$.

8.10. Problemas de variación proporcional inversa

Consideremos ahora la siguiente situación. Un camión tiene que ir de la ciudad A a la ciudad B utilizando la única carretera que comunica a ambas ciudades. Si la primera vez hizo el recorrido de A a B a una rapidez constante de 80 km/hora en 10 horas, ¿Cuánto tiempo tardará para llegar el camión de la ciudad A a la ciudad B si la segunda vez hace el recorrido con una rapidez constante de 100 km/hora?

Si la variable v representa la rapidez del camión en kilómetros por hora y la variable t representa el tiempo en horas empleado en el recorrido, sea $v_1 = 80$, $t_1 = 10$, $v_2 = 100$ y t_2 el tiempo (en horas) que se desea encontrar.

Este problema se puede modelar de la siguiente manera. Conocemos que la rapidez de un vehículo se puede calcular como:

$$v = \frac{D}{t} \tag{8.33}$$

donde D representa la distancia recorrida en el tiempo t. Si despejamos la variable D tenemos:

$$D = vt \tag{8.34}$$

En la situación planteada la distancia D va a ser fija, es la distancia entre las ciudades A y B. Por lo tanto la ecuación buscada que relaciona las variables de interés es:

$$D = v_1 t_1 = v_2 t_2 \tag{8.35}$$

Analicemos esta última ecuación. Para mantener la D con un valor constante el producto de v por t debe permanecer constante. Si la v se multiplica por un cierto número n, entonces la variable t debe multiplicarse por el inverso multiplicativo de n, es decir, $\frac{1}{n}$; de manera que $n * \frac{1}{n} = 1$. Es decir, si se duplica v, entonces t debe reducirse a la mitad; si se triplica v, entonces t debe reducirse a un tercio del valor original; si se reduce v a la mitad, entonces t debe aumentar al doble, etc. Cuando este comportamiento ocurre se dice que se tiene un caso de **variación proporcional inversa**.

La anterior ecuación se puede escribir simplemente como sigue:

$$v_1\ t_1 = v_2\ t_2 \tag{8.36}$$

Si se desea conocer t_2 bastará despejar esa variable:

$$\begin{aligned} t_2 &= \frac{v_1\ t_1}{v_2} \\ t_2 &= \frac{(80)(10)}{100} \\ t_2 &= 8 \end{aligned}$$

El tiempo buscado es de 8 horas. En este caso, la rapidez se aumentó a $\frac{5}{4}$ de 80 ($\frac{5}{4} * 80 = 100$), mientras que el tiempo disminuyó a $\frac{4}{5}$ de 10 ($\frac{4}{5} * 10 = 8$).

Al comportamiento de las variables involucradas en la ecuación 8.36 se le conoce como **regla de tres para variación proporcional inversa**, aunque desafortunadamente se expresa comúnmente su comportamiento como una regla dogmática, sin hacer ninguna referencia al modelo matemático que gobierna las variables involucradas.

Variación proporcional inversa. En este tipo de problemas dos variables (x y y) están relacionadas entre si. Si una se duplica, la otra se reduce a la mitad; si una se triplica, la otra se reduce a la tercera parte, etc. El modelo matemático que representa este comportamiento está definido por la ecuación:

$$x_1\ y_1 = x_2\ y_2 \tag{8.37}$$

En esta expresión y_1 está relacionado con x_1 y y_2 está relacionado con x_2, manteniendo siempre constante el producto xy.

8.11. Ejercicios propuestos

Además de los siguientes ejercicios, el lector interesado puede resolver los ejercicios propuestos en los libros (Edmiston, 1991) y (Aguilar-Márques et al., 2016).

1. El precio de un auto es $\$230,840.00$ incluyendo el $16\,\%$ del impuesto del IVA. ¿Cuál es el precio del vehículo antes de aplicar el IVA?
2. Las edades de Juan y su Papá suman 100 años. Si la diferencia de edades es de 50, ¿Cuáles son las edades de Juan y su Papá?
3. Encontrar dos números enteros consecutivos cuya diferencia de cuadrados sea 31.
4. La distancia entre dos ciudades A y B es de 100 kilometros en una carretera recta que las une. Si un auto parte de la ciudad A hacía B, a una velocidad constante de 100 $\frac{km}{hora}$; y, al mismo tiempo, un autobús sale de la ciudad B hacia A, a una velocidad de $95\frac{km}{hora}$. ¿En que tiempo y a que distancia de la ciudad A se cruzarán en la carretera?
5. Si un depósito de combustible de una gasolinera se llena con una válvula A, que suministra un flujo constante de combustible, en 4 horas; y si el mismo depósito se llena en 6 horas, utlizando una válvula B. ¿En cuanto tiempo se llena el depósito vacio si se abren las dos valvulas A y B al mismo tiempo? Sugerencia: El caudal, denotado por la letra Q, de un fluido que pasa por una válvula se define como $Q = \frac{V}{t}$, donde V es el volumen del fluido que pasa por la válvula en el tiempo t. Si Q_A y Q_B son los caudales de las válvulas A y B, respectivamente, entonces cuando se utilizan ambas válvulas, el nuevo caudal será $Q_A + Q_B$.
6. Encontrar dos números cuya suma sea 25 y cuya diferencia de cuadrados sea 125.
7. Se desea fabricar una lata de cerveza de 0.37 litros de forma cilíndrica con una altura de 13 cm. ¿Qué diámetro debe tener la base del envase?
8. Si un auto acelera en forma constante de 0 a 30 $\frac{metros}{segundo}$ en 10 segundos, determine el tiempo empleado para recorrer los primeros 100 metros si el auto parte del reposo y acelera en forma constante. Sugerencia: en un movimiento con aceleración a constante, la distancia d recorrida en un tiempo t está dado por $d = \frac{1}{2}at^2$.
9. Encuentre la ecuación de la recta que pasa por los puntos $(1, 3)$ y $(5, 1)$.
10. Encuentre la ecuación de una recta que cruza el eje x en $x = -10$ y cruza el eje y en $y = 5$.

11. Encuentre el punto donde se cruzan las rectas: $y = \frac{3}{4}x + 5$, $y = -\frac{1}{2}x - \frac{3}{2}$.

12. La ecuación de una circunferencia de radio r con centro en el punto (x_c, y_c) está dada por la ecuación $(x - x_c)^2 + (y - y_c)^2 = r^2$. Encuentre los puntos de cruce de una recta dada por la ecuación $y = 2x + 2$ con una circunferencia de radio de 10 con centro en $(1, 2)$.

13. Encuentre el área de un triángulo que tiene los siguientes lados en metros: 6, 7 y 10. Sugerencia: Resuelva primero el ejercicio anterior. Dibuje el triángulo tomando la base como el lado más grande: 10. A continuación dibuje dos círculos de radios 6 y 7 en ambos extremos de la base. Con las intersecciones puede determinar fácilmente la altura del triángulo. Se facilitan los cálculos si ubica un sistema de coordenadas cartesianas con el origen en el extremo izquierdo de la base del triángulo.

14. El número irracional llamado la razón dorada, proporción áurea o divina proporción, es un número con propiedades muy interesantes. La proporción que expresa este número se encuentra tanto en algunas figuras geométricas, en el arte, en la arquitectura, como en la naturaleza: en las nervaturas de las hojas de algunos árboles, en el grosor de las ramas, en el caparazón de un caracol, etc. Con referencia a los segmentos de recta dibujados en la figura 8.13, la razón dorada expresa la proporción de la suma de las longitudes $a + b$ con respecto al segmento mayor a. Esta proporción debe ser idéntica a la proporción del segmento mayor a con respecto al menor b.

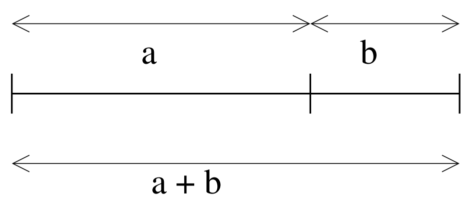


Figura 8.13: La proporción áurea o razón dorada.

Si nombramos a la razón dorada como el número ϕ, entonces se debe cumplir lo siguiente:

$$\begin{aligned}
\phi &= \frac{a+b}{a} \\
\phi &= \frac{a}{b} \\
\frac{a+b}{a} &= \frac{a}{b} \\
\frac{a}{a} + \frac{b}{a} &= \frac{a}{b} \\
1 + \frac{1}{\frac{a}{b}} &= \frac{a}{b} \\
1 + \frac{1}{\phi} &= \phi
\end{aligned}$$

A partir de esta última ecuación, determine el valor de ϕ.

Capítulo 9

Trigonometría

En este capítulo revisaremos los conceptos fundamentales de trigonometría, revisando las propiedades de los triángulos rectángulos.

9.1. Triángulos rectángulos

Es bueno recordar que en cualquier triángulo la suma de los tres ángulos interiores es $180°$, como vimos en la sección 7.9.1. Ahora bien, una clase especial de triángulos se tiene cuando uno de los ángulos interiores del triángulo es un **ángulo recto**, es decir, un ángulo de $90°$. A este triángulo especial se le conoce como **triángulo rectángulo**. En la sección 7.8 ya iniciamos el estudio de este tipo de triángulos, junto con la demostración del famoso Teorema de Pitágoras.

Si observamos el punto asociado a la punta de la flecha que realiza el desplazamiento angular θ, con respecto del eje x positivo, podemos ver que se puede formar un triángulo rectángulo, como se muestra en la figura 9.1.

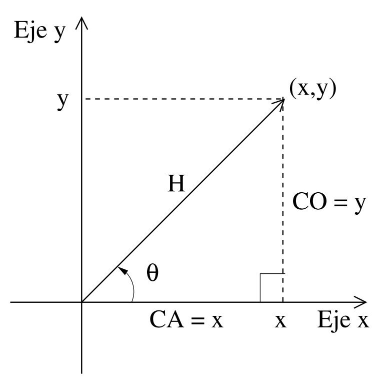


Figura 9.1: Triángulo rectángulo en el plano cartesiano. El triángulo se forma con la Hipotenusa (H), la coordenada y que forma el Cateto Opuesto (CO) y la coordenada x que forma el Cateto Adyacente (CA). El ángulo θ se forma entre el eje x y el lado H.

En la figura el triángulo se forma con los segmentos de línea etiquetados con H (llamada **hipotenusa**), la coordenada x del punto (lado del triángulo llamado **cateto adyacente** por estar adyacente al ángulo θ) y la coordenada y del punto (lado del triángulo llamado **cateto opuesto** por estar opuesto al ángulo θ).

La relación entre el cateto opuesto (CO), el cateto adyacente (CA) y la hipotenusa (H) de un triángulo rectángulo está definida por el famoso **Teorema de Pitágoras** (visto en la sección 7.8.1) que nos dice:

$$\begin{aligned} H^2 &= (CA)^2 + (CO)^2 \\ H^2 &= x^2 + y^2 \\ H &= \sqrt{x^2 + y^2} \end{aligned}$$

9.2. Funciones trigonométricas

Con referencia al ángulo θ de la figura 9.1, se definen las funciones trigonométricas básicas: seno (abreviada como $\sin$), coseno (abreviada como $\cos$) y tangente (abreviada como $\tan$), de la siguiente forma:

$$\sin(\theta) = \frac{y}{H} \quad , \quad \sin(\theta) = \frac{CO}{H} \tag{9.1}$$

$$\cos(\theta) = \frac{x}{H} \quad , \quad \cos(\theta) = \frac{CA}{H} \tag{9.2}$$

$$\tan(\theta) = \frac{y}{x} \quad , \quad \tan(\theta) = \frac{CO}{CA} \tag{9.3}$$

La enorme importancia de estas funciones, es que no dependen de que tan grande o que tan chico sea el triángulo. Si el ángulo θ se conserva, el valor de las funciones trigonométricas no cambia. Veamos el caso, por ejemplo, de la tangente. Para un cierto valor de θ, los puntos (x, y), que definen el triángulo, siguen una línea recta que pasa por el origen, es decir siguen la ecuación:

$$y = mx$$

Si calculamos la tangente de este ángulo, encontramos lo siguiente:

$$\begin{aligned} \tan(\theta) &= \frac{y}{x} \\ \tan(\theta) &= \frac{mx}{x} \\ \tan(\theta) &= m \end{aligned}$$

Es decir, el valor de $\tan(\theta)$ no depende de que tan cercano o alejado está el punto (x, y) del origen. Por esta razón, al parámetro m de la ecuación de la recta se le conoce como **pendiente** o **tangente** del ángulo de inclinación de la recta. Si hacemos un análisis semejante para las funciones seno y coseno, también encontramos que no dependen del punto (x, y).

9.2.1. Revisión de la pendiente de una recta

Como vimos anteriormente, en la página 122, mediante la ecuación 8.24 podemos calcular la pendiente m de la recta $y = mx + b$, a partir de las coordenadas de dos puntos (P_1 y P_2):

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

La figura 9.2 ayuda a visualizar un triángulo rectángulo que se forma con las coordenadas de los puntos. De esta manera la pendiente es la división del cateto opuesto entre el cateto adyacente, esto es, la función tangente del

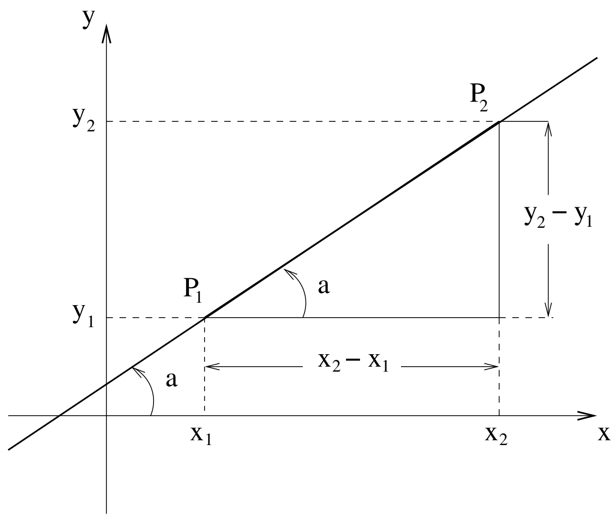


Figura 9.2: Relación de la pendiente con la tangente del ángulo de inclinación. Se muestra la recta que une los puntos $P_1 = (x_1, y_1)$ y $P_2 = (x_2, y_2)$. El segmento $\overline{P_1P_2}$ forma la hipotenusa, $y_2 - y_1$ el cateto opuesto y $x_2 - x_1$ el cateto adyacente. La recta tiene un ángulo de inclinación a con respecto al eje x.

ángulo a. Al ángulo a se le conoce como **ángulo de inclinación** de la recta y es el ángulo que forma la recta con el eje x. Esto es:

$$m = \tan(a) \tag{9.4}$$

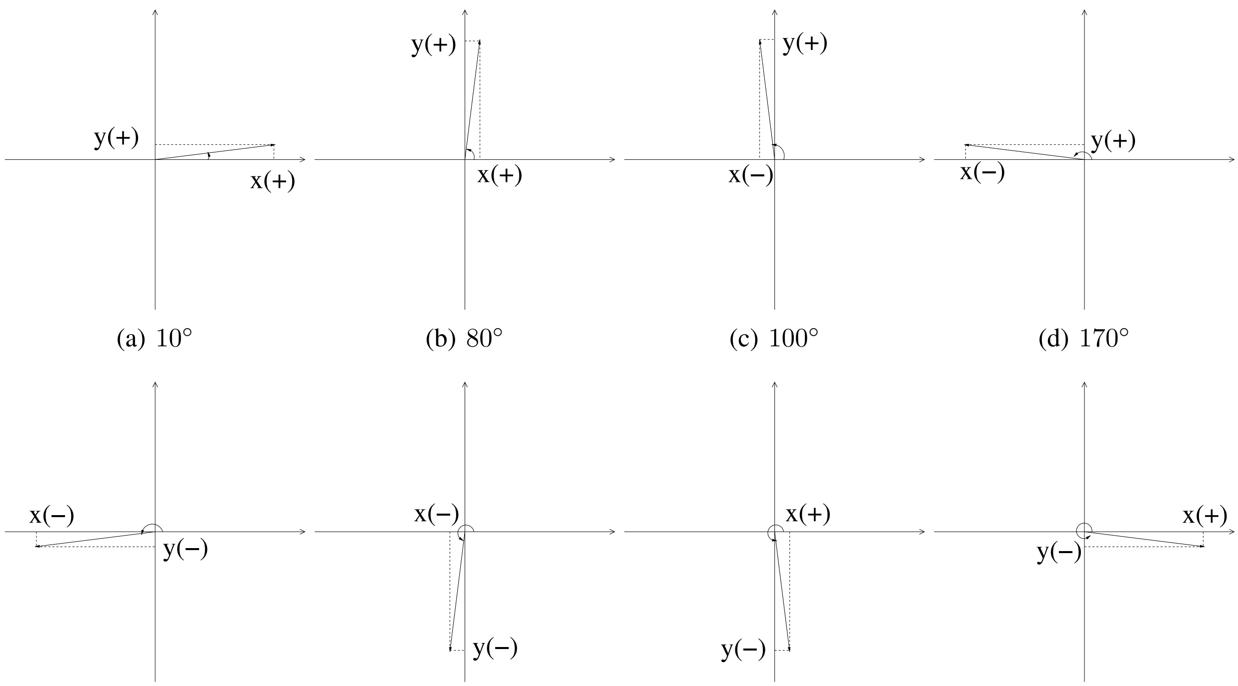
De esta manera, tenemos otra forma de calcular la recta, $y = mx + b$, a partir de conocer el ángulo de inclinación y un punto por donde pase la recta.

9.2.2. La función seno, coseno y tangente

La figura 9.3 nos ayuda a visualizar los valores de las coordenadas x, y, a medida que va creciendo el ángulo. Observe que para valores entre 0 y 90 grados, ambas coordenadas son positivas. Cuando el ángulo pasa de 90 grados, la coordenada x se vuelve negativa; cuando el ángulo pasa de 180 grados, ambas coordenadas son negativas; finalmente cuando el ángulo pasa de 270 grados, la coordenada x se vuelve positiva, mientras la coordenada y se mantiene negativa.

Consideremos los valores de la función $\sin(\theta)$ para algunos valores en el intervalo de 0 a 360 grados:

- Para $\theta = 0$, el valor de $y = 0$, por lo tanto $\sin(0) = \frac{y}{H} = \frac{0}{H} = 0$.
- Cuando θ va creciendo a partir de 0 y se acerca a 90 grados, el valor de y va creciendo, por lo tanto $\sin(\theta)$ va creciendo.
- Para $\theta = 90°$, el valor de $y = H$, por lo tanto $\sin(90°) = \frac{H}{H} = 1$.
- Cuando θ rebasa el valor 90 grados y se acerca a 180 grados, el valor de y empieza a disminuir, por lo tanto $\sin(\theta)$ va decreciendo.
- Para $\theta = 180°$, el valor de $y = 0$, por lo tanto $\sin(180°) = \frac{0}{H} = 0$.



(a) 10° (b) 80° (c) 100° (d) 170°

(e) 190° (f) 260° (g) 280° (h) 350°

Figura 9.3: Coordenadas x, y, para ángulos entre 10 y 350 grados.

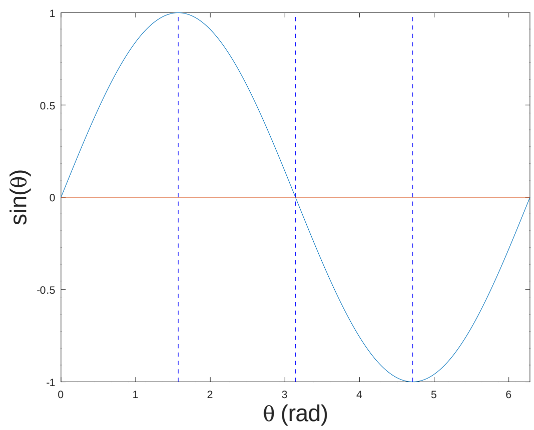
- Cuando θ rebasa el valor 180 grados y se acerca a 270 grados, el valor de y se vuelve negativo, por lo tanto $\sin(\theta)$ va decreciendo (de 0 hacia -1).
- Para $\theta = 270°$, el valor de $y = -H$, por lo tanto $\sin(270°) = \frac{-H}{H} = -1$.
- Cuando θ rebasa el valor $270°$ y se acerca a $360°$, el valor de y empieza a aumentar nuevamente, acercándose al 0.
- Para $\theta = 360°$, el valor de $y = 0$, y se tiene el mismo valor que para $0°$, $\sin(360°) = 0$.
- Si se sigue incrementando θ más allá de 360 el comportamiento de la función seno se repite nuevamente. Es decir $\sin(\theta) = \sin(\theta + 360° * n)$, siendo n cualquier entero.

El lector interesado en aprovechar la tecnología puede consultar el apéndice A para conocer y aprovechar el programa de computadora llamado Octave. Con Octave podemos fácilmente graficar la función $\sin(\theta)$ para valores del ángulo θ de 0 hasta 2π radianes, con los siguientes comandos:

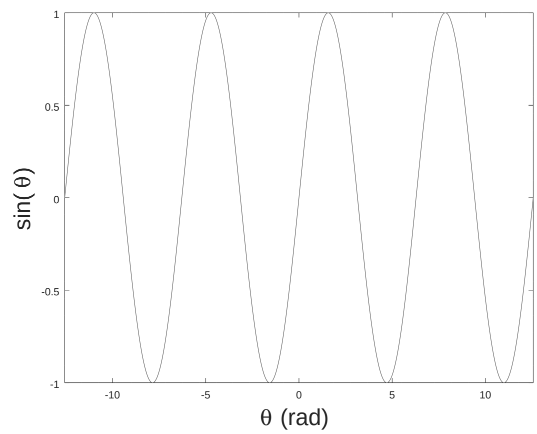
```
>> x=[0:0.01:2*pi];
>> y=sin(x);
>> plot(x,y);
>> axis([0, 2*pi, -1, 1]);
>> hold on
>> plot(x,0*x);
>> plot([pi/2 pi/2],[-1 1],'linestyle','--', 'color', 'blue');
>> plot([pi pi],[-1 1],'linestyle','--', 'color', 'blue');
```

```
>> plot([3*pi/2 3*pi/2],[-1 1],'linestyle','--', 'color', 'blue');
>> xlabel ('\theta (rad)','fontsize',22);
>> ylabel ('sin(\theta)','fontsize',22);
```

El resultado se muestra en la figura 9.4(a). En la figura 9.4(b) se puede apreciar la función cuando el ángulo varia de $-2*(2\pi)$ a $2*2\pi$ (rad). Esta forma de onda, ocurre frecuentemente en muchas situaciones.



(a) de 0 a 2π (rad)



(b) de $-2*(2\pi)$ a $2*2\pi$ (rad)

Figura 9.4: Gráfica de la función seno. En (a) se han insertado líneas verticales cada $\frac{\pi}{2}\mathrm{rad} = 90°$, para apreciar mejor el comportamiento.

Veamos un ejemplo relacionado con la energía eléctrica. Las baterías que utilizan los automóviles al igual que las baterías que se utilizan en muchos dispositivos electrónicos, tienen dos terminales, llamadas terminal positiva (+) y terminal negativa (-). Las baterías AA suministran un voltaje de 1.5 volts, mientras que las baterías de los automóviles suministran un voltaje de 12 volts. Podemos imaginar el nivel de voltaje como la fuerza de la batería para hacer fluir una corrient En (a) se han insertado líneas verticales cada $\frac{\pi}{2}\mathrm{rad} = 90°$, para apreciar mejor el comportamiento.e eléctrica (en realidad una corriente de electrones que fluyen por los átomos del material conductor) que hace funcionar motores, lámparas, radios, etc.

De forma similar, cuando conectamos un dispositivo a un contacto eléctrico de nuestras casas, se tienen también dos terminales, por donde fluye la corriente eléctrica. Sin embargo, no hay una terminal positiva y otra negativa, como en el caso de las baterías; en su lugar el voltaje entre las terminales cambia conforme transcurre el tiempo, siguiendo una forma de onda idéntica a la función seno (onda senoidal). Por esta razón a la corriente que fluye por los contactos se le llama **corriente alterna**, en oposición a la **corriente constante** suministrada por las baterías.

El voltaje V entre las terminales de un contacto eléctrico de una casa en México está definido por la ecuación:

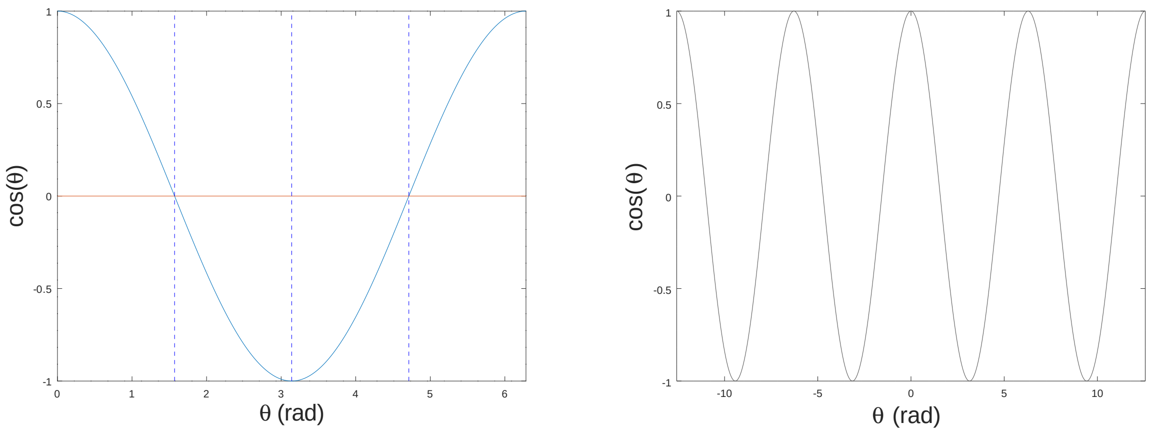
$$V = 156 * \sin(t * 2\pi * 60)$$

donde el tiempo t está en segundos. El valor de V repetirá 60 veces o ciclos [1] por segundo la forma de onda del seno de 0 a 2π(rad). En otras palabras, las terminales del contacto cambiarán de polaridad 120 veces por segundo. En un determinado $\frac{1}{120}$ de segundo, una terminal A será positiva y la otra terminal B será negativa; mientras que

[1]Dependiendo de cada país, se utiliza una frecuencia de 50 o 60 ciclos por segundo. En México y en algunos otros países se utilizan 60 ciclos por segundo.

en el siguiente $\frac{1}{120}$ de segundo cambiarán de polaridad, la terminal A será negativa y la terminal B será positiva; volviendo a cambiar en el siguiente $\frac{1}{120}$ de segundo.

Las gráficas de las funciones coseno para valores de 0 hasta 2π radianes y de $-2*(2\pi)$ a $2*2\pi$ (rad) se presentan en la figura 9.5.



(a) de 0 a 2π(rad) (b) de $-2*(2\pi)$ a $2*2\pi$ (rad)

Figura 9.5: Gráfica de la función coseno. En (a) se han insertado líneas verticales cada $\frac{\pi}{2}\text{rad} = 90°$, para apreciar mejor el comportamiento.

Finalmente la gráfica de la función tangente para valores de 0 hasta 2π(rad) se presenta en la figura 9.6. Podemos observar que $\tan(0) = 0$ y a medida que crece el ángulo, también crece la función tangente. Cuando se aproxima a $\frac{\pi}{2}$ (rad) la función $\tan(\theta)$ crece muy rápidamente, tiende a infinito. Cuando el ángulo pasa de $\frac{\pi}{2}$, el valor va disminuyendo de menos infinito a 0, ($\tan(\pi) = 0$). Para ángulos mayores de π, la forma se repite hasta alcanzar $\tan(2\pi) = 0$.

9.2.3. Funciones seno, coseno y tangente de 0, 30, 45, 60 y 90 grados

Primero veamos los casos cuando $\theta = 0$ y $\theta = 90°$.

- $\theta = 0$. De la figura 9.3(a) podemos apreciar que cuando $\theta = 0$, tenemos que $x = H$, $y = 0$. Por lo tanto:

$$\begin{aligned}
\sin(0) &= \frac{y}{H} = \frac{0}{H} = 0 \\
\cos(0) &= \frac{x}{H} = \frac{H}{H} = 1 \\
\tan(0) &= \frac{y}{x} = \frac{0}{H} = 0
\end{aligned}$$

- $\theta = 90°$. De la figura 9.3(b) podemos apreciar que cuando $\theta = 90°$, tenemos que $x = 0$, $y = H$. Por lo

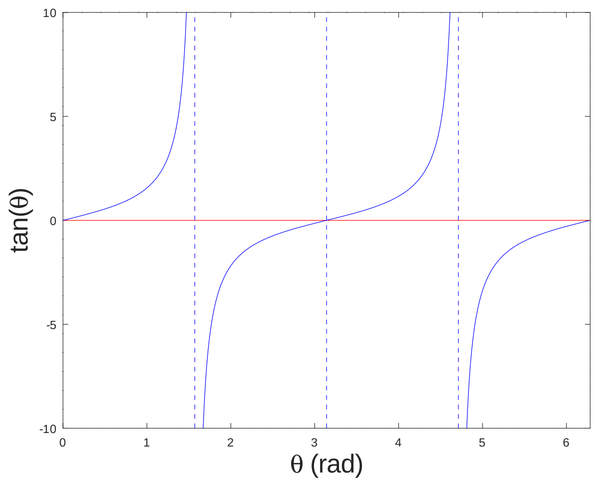


Figura 9.6: Gráfica de la función tangente. Se han insertado líneas verticales cada $\frac{\pi}{2}\text{rad} = 90°$, para apreciar mejor el comportamiento.

tanto:

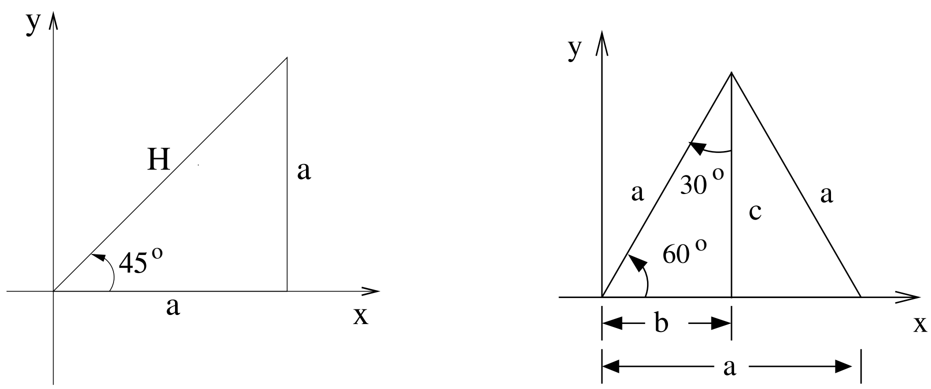
$$\begin{aligned} \sin(90°) &= \frac{y}{H} = \frac{H}{H} = 1 \\ \cos(90°) &= \frac{x}{H} = \frac{0}{H} = 0 \\ \tan(90°) &= \frac{y}{x} = \frac{H}{0} = \infty \end{aligned}$$

El símbolo ∞, llamado **infinito**, merece una atención especial. Si $x = 0.001$ y $H = 1$, entonces la tangente sería $\frac{1}{0.001} = 1000$. Si $x = 1 * 10^{-6}$, entonces la tangente sería $\frac{1}{1*10^{-6}} = 1 * 10^6$. Es decir, a medida que x tiende a 0, la fracción $\frac{1}{x}$ crece sin límite. Para representar que dicho número real positivo crece sin límite, se utiliza el símbolo ∞. El símbolo $-\infty$ denota un número que crece sin límite pero en sentido negativo. De manera que si queremos expresar que la variable x puede ser cualquier número real, podemos utilizar la notación: $-\infty < x < \infty$, que significa que $-\infty < x$ y también que $x < \infty$.

Para conocer los valores cuando los ángulos son de 30, 45 y 60 grados, la figura 9.7 muestra dos triángulos rectángulos muy importantes:

- Un triángulo rectángulo cuyos catetos son iguales y por lo tanto sus ángulos interiores son iguales a 45 grados, además del ángulo recto. Este triángulo corresponde a la escuadra de 45 grados que utilizamos en nuestras herramientas de geometría. Aplicando el Teorema de Pitágoras podemos calcular H:

$$\begin{aligned} H &= \sqrt{a^2 + a^2} \\ H &= \sqrt{2a^2} \\ H &= \sqrt{2}\, a \end{aligned}$$



(a) 45 grados

(b) 60 y 30 grados

Figura 9.7: Triángulos rectángulos de 45 grados y de 60 grados.

Con H calculado, ya podemos obtener los valores de las funciones para 45 grados:

$$
\begin{aligned}
\sin(45^\circ) &= \frac{CO}{H} = \frac{a}{\sqrt{2}\,a} = \frac{1}{\sqrt{2}} \\
\cos(45^\circ) &= \frac{CA}{H} = \frac{a}{\sqrt{2}\,a} = \frac{1}{\sqrt{2}} \\
\tan(45^\circ) &= \frac{CO}{CA} = \frac{a}{a} = 1
\end{aligned}
$$

- Un triángulo rectángulo que proviene de dividir un triángulo equilátero en dos triángulos rectángulos. Sus ángulos son ahora de 30 y 60 grados, como se muestra en la figura 9.7. Este triángulo corresponde a la escuadra de 30 grados que utilizamos en nuestras herramientas de geometría. De la figura tenemos que el lado $b = \frac{1}{2}a$ y el lado c lo podemos calcular nuevamente por el Teorema de Pitágoras, $b^2 + c^2 = a^2$,

$$
\begin{aligned}
c &= \sqrt{a^2 - b^2} \\
c &= \sqrt{a^2 - \left(\frac{1}{2}a\right)^2} \\
c &= \sqrt{a^2 - \frac{1}{4}a^2} \\
c &= \sqrt{\frac{3}{4}\,a^2} \\
c &= \sqrt{\frac{3}{4}}\,\sqrt{a^2} \\
c &= \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{4}}\,a \\
c &= \frac{\sqrt{3}}{2}\,a
\end{aligned}
$$

θ	$\sin(\theta)$	$\cos(\theta)$	$\tan(\theta)$
$0°$	0	1	0
$30°$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{3}}$
$45°$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	1
$60°$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\sqrt{3}$
$90°$	1	0	∞

Tabla 9.1: Funciones trigonométricas para algunos ángulos.

Con los lados b y c ya podemos obtener los valores de las funciones para 60 grados:

$$\begin{aligned}
\sin(60°) &= \frac{CO}{H} = \frac{c}{a} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}a}{a} = \frac{\sqrt{3}}{2} \\
\cos(60°) &= \frac{CA}{H} = \frac{b}{a} = \frac{\frac{1}{2}a}{a} = \frac{1}{2} \\
\tan(60°) &= \frac{CO}{CA} = \frac{c}{b} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}a}{\frac{1}{2}a} = \sqrt{3}
\end{aligned}$$

Finalmente, si observamos el triángulo con el lado de 30 grados, tenemos:

$$\begin{aligned}
\sin(30°) &= \frac{CO}{H} = \frac{b}{a} = \frac{\frac{1}{2}a}{a} = \frac{1}{2} \\
\cos(30°) &= \frac{CA}{H} = \frac{c}{a} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}a}{a} = \frac{\sqrt{3}}{2} \\
\tan(30°) &= \frac{CO}{CA} = \frac{b}{c} = \frac{\frac{1}{2}a}{\frac{\sqrt{3}}{2}a} = \frac{1}{\sqrt{3}}
\end{aligned}$$

Todos estos resultados se presentan en el tabla 9.1.

9.2.4. Las funciones cotangente, secante y cosecante

Con referencia al ángulo θ de la figura 9.1, se definen las funciones trigonométricas adicionales: cosecante (abreviada como $\csc$), secante (abreviada como $\sec$) y cotangente (abreviada como $\cot$), de la siguiente forma:

$$\csc(\theta) = \frac{1}{\sin(\theta)} \quad , \quad \csc(\theta) = \frac{H}{CO} \tag{9.5}$$

$$\sec(\theta) = \frac{1}{\cos(\theta)} \quad , \quad \sec(\theta) = \frac{H}{CA} \tag{9.6}$$

$$\cot(\theta) = \frac{1}{\tan(\theta)} \quad , \quad \cot(\theta) = \frac{CA}{CO} \tag{9.7}$$

9.2.5. Funciones trigonométricas inversas

Estas funciones inversas permiten obtener el ángulo θ a partir de los valores de las funciones trigonométricas.

- La función arcoseno se abrevia como $\arcsin(x)$. $\theta = \arcsin(x)$ recibe un valor entre -1 y 1 y regresa el valor del ángulo θ (entre los valores de -90 y 90 grados) tal que $\sin(\theta) = x$.
- La función arcocoseno se abrevia como $\mathrm{arc}\cos(x)$. $\theta = \mathrm{arc}\cos(x)$ recibe un valor entre -1 y 1 y regresa el valor del ángulo θ (entre los valores de 0 y 180 grados) tal que $\cos(\theta) = x$.
- La función arcotangente se abrevia como $\arctan(x)$. $\theta = \arctan(x)$ recibe un valor entre $-\infty$ y $+\infty$ y regresa el valor del ángulo θ (entre los valores de -90 y 90 grados) tal que $\tan(\theta) = x$.

9.3. Relaciones trigonométricas

9.3.1. Relaciones Pitagóricas

Del Teorema de Pitágoras: $x^2 + y^2 = H^2$, podemos obtener tres relaciones importantes, conocidas como **relaciones Pitagóricas**:

- Al dividir entre H^2, obtenemos:

$$\begin{aligned} \frac{1}{H^2} * (x^2 + y^2) &= \frac{1}{H^2} * H^2 \\ \frac{x^2}{H^2} + \frac{y^2}{H^2} &= 1 \\ \left(\frac{x}{H}\right)^2 + \left(\frac{y}{H}\right)^2 &= 1 \\ (\cos(\theta))^2 + (\sin(\theta))^2 &= 1 \\ \cos^2(\theta) + \sin^2(\theta) &= 1 \end{aligned} \tag{9.8}$$

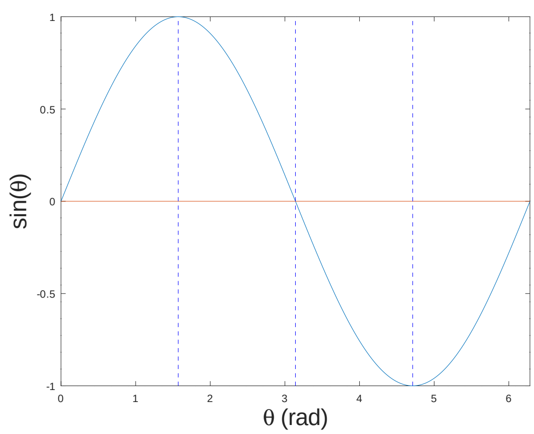
- Al dividir entre x^2, obtenemos:

$$\begin{aligned} \frac{1}{x^2} * (x^2 + y^2) &= \frac{1}{x^2} * H^2 \\ 1 + \frac{y^2}{x^2} &= \frac{H^2}{x^2} \\ 1 + \left(\frac{y}{x}\right)^2 &= \left(\frac{H}{x}\right)^2 \\ 1 + (\tan(\theta))^2 &= (\sec(\theta))^2 \\ 1 + \tan^2(\theta) &= \sec^2(\theta) \end{aligned} \tag{9.9}$$

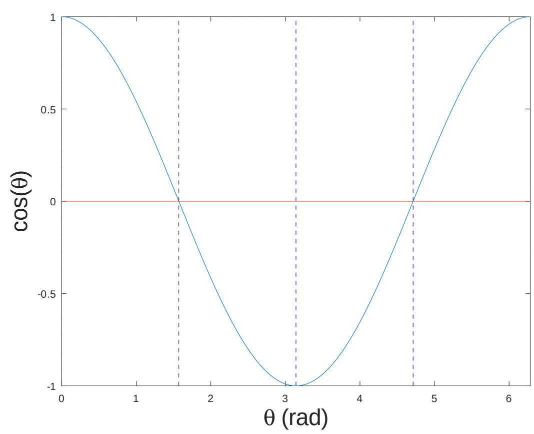
- Al dividir entre y^2, obtenemos:

$$\begin{aligned} \frac{1}{y^2} * (x^2 + y^2) &= \frac{1}{y^2} * H^2 \\ \frac{x^2}{y^2} + 1 &= \frac{H^2}{y^2} \\ \left(\frac{x}{y}\right)^2 + 1 &= \left(\frac{H}{y}\right)^2 \\ (\cot(\theta))^2 + 1 &= (\csc(\theta))^2 \\ \cot^2(\theta) + 1 &= \csc^2(\theta) \end{aligned} \tag{9.10}$$

9.3.2. Relaciones de las funciones seno y coseno



(a) seno



(b) coseno

Figura 9.8: Gráficas de la función seno y coseno de 0 a $2\pi(\text{rad})$. Se han insertado líneas verticales cada $\frac{\pi}{2}\text{rad} = 90°$, para apreciar mejor el comportamiento.

Las gráficas de las funciones seno y coseno para valores de 0 hasta 2π radianes se presentan en la figura 9.8. Al observar estas gráficas se puede apreciar que se cumple las siguientes relaciones:

$$\sin(\theta) = -sin(\theta + \pi) \tag{9.11}$$
$$\cos(\theta) = -cos(\theta + \pi) \tag{9.12}$$

Si consideramos las funciones seno y coseno para ángulos negativos, tenemos:

$$\sin(\theta) = -sin(-\theta) \tag{9.13}$$
$$\cos(\theta) = cos(-\theta) \tag{9.14}$$

Observe también que las gráficas del seno y coseno se parecen mucho, solamente están desplazadas $\frac{\pi}{2}$ (rad) (equivalente a 90 grados), una con respecto a la otra. El lector puede comprobar fácilmente que:

$$\sin(\theta + \frac{\pi}{2}) = \cos(\theta) \tag{9.15}$$
$$\cos(\theta + \frac{\pi}{2}) = -\sin(\theta) \tag{9.16}$$
$$\sin(\frac{\pi}{2} - \theta) = \cos(\theta) \tag{9.17}$$
$$\cos(\frac{\pi}{2} - \theta) = \sin(\theta) \tag{9.18}$$

De hecho, ya hemos comprobado en la anterior sección un ejemplo de estas últimas propiedades, cuando calculamos las funciones trigonométricas de 30°: $\sin(90° - 30°) = \cos(30°)$ y $\cos(90° - 30°) = \sin(30°)$.

9.3.3. Relaciones de la tangente

Veamos como podemos expresar la función tangente en términos de las otras funciones trigonométricas. Por definición, la tangente está dada por la ecuación:

$$\tan(\theta) = \frac{y}{x}$$

Sin embargo, si dividimos el numerador y denominador entre H tenemos:

$$\tan(\theta) = \frac{\frac{y}{H}}{\frac{x}{H}}$$

Podemos observar que en el numerador tenemos la función seno y en el denominador tenemos la función coseno. Es decir:

$$\tan(\theta) = \frac{\sin(\theta)}{\cos(\theta)} \tag{9.19}$$

Con esta relación, podemos calcular fácilmente $\tan(\theta + \frac{\pi}{2})$, aprovechando las equivalencias de $\sin(\theta + \frac{\pi}{2})$ y $\cos(\theta + \frac{\pi}{2})$ definidas por las ecuaciones 9.15 y 9.16 de la sección anterior.

$$\begin{aligned}
\tan(\theta + \frac{\pi}{2}) &= \frac{\sin(\theta + \frac{\pi}{2})}{\cos(\theta + \frac{\pi}{2})} \\
\tan(\theta + \frac{\pi}{2}) &= \frac{\cos(\theta)}{-\sin(\theta)} \\
\tan(\theta + \frac{\pi}{2}) &= -\frac{\cos(\theta)}{\sin(\theta)} \\
\tan(\theta + \frac{\pi}{2}) &= -\frac{1}{\frac{\sin(\theta)}{\cos(\theta)}} \\
\tan(\theta + \frac{\pi}{2}) &= -\frac{1}{\tan(\theta)} \qquad (9.20)
\end{aligned}$$

Esta última relación será especialmente útil para calcular rectas perpendiculares en la sección 9.4.2.

9.3.4. Funciones seno y coseno de una suma de ángulos

Ahora consideremos el problema de determinar los valores de las funciones: $\sin(\alpha + \beta)$ y $\cos(\alpha + \beta)$ cuando se conocen los ángulos α y β. La situación se ilustra en la figura 9.9, considerando una hipotenusa unitaria.

En la figura 9.9 el triángulo que une los puntos O, B y D es un triángulo rectángulo, de hipotenusa unitaria. En este caso, la hipotenusa es el segmento de recta que une los puntos O y D, denotado como $\overline{OD}$, y tiene una longitud unitaria ($\overline{OD} = 1$). El cateto adyacente al ángulo β es el segmento de recta $\overline{OB}$, y se puede calcular fácilmente como:

$$\begin{aligned}
\cos(\beta) &= \frac{\overline{OB}}{\overline{OD}} \\
\cos(\beta) &= \frac{\overline{OB}}{1} \\
\overline{OB} &= \cos(\beta) \qquad (9.21)
\end{aligned}$$

En este mismo triángulo, el cateto opuesto al ángulo β es el segmento $\overline{BD}$ y se puede calcular fácilmente como:

$$\begin{aligned}\sin(\beta) &= \frac{\overline{BD}}{\overline{OD}}\\ \sin(\beta) &= \frac{\overline{BD}}{1}\\ \overline{BD} &= \sin(\beta)\end{aligned} \tag{9.22}$$

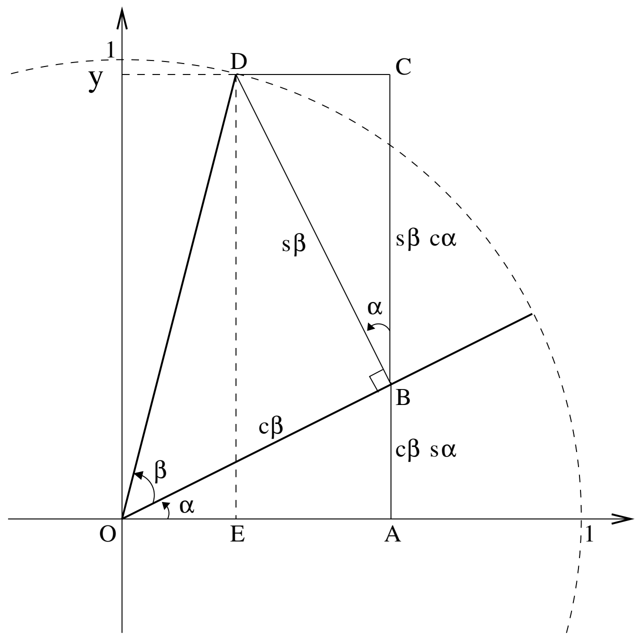


Figura 9.9: Cálculo de $\sin(\alpha+\beta) = \overline{ED}$. En la figura $s\alpha = \sin(\alpha)$, $c\alpha = \cos(\alpha)$, $s\beta = \sin(\beta)$ y $c\beta = \cos(\beta)$.

Ahora bien, en la parte superior también se forma el triángulo rectángulo que une los puntos B, C y D, con hipotenusa $\overline{BD} = \sin(\beta)$ y ángulo α. El cateto adyacente $\overline{BC}$ de este triángulo se puede calcular como:

$$\begin{aligned}\cos(\alpha) &= \frac{\overline{BC}}{\overline{BD}}\\ \cos(\alpha) &= \frac{\overline{BC}}{\sin(\beta)}\\ \overline{BC} &= \sin(\beta)\cos(\alpha)\end{aligned} \tag{9.23}$$

Finalmente analicemos el triángulo rectángulo que une los puntos O, A y B, con ángulo α e hipotenusa $\overline{OB} = \cos(\beta)$. El cateto opuesto de este triángulo se puede calcular como:

$$\begin{aligned}\sin(\alpha) &= \frac{\overline{AB}}{\overline{OB}}\\ \sin(\alpha) &= \frac{\overline{AB}}{\cos(\beta)}\\ \overline{AB} &= \cos(\beta)\sin(\alpha)\end{aligned} \tag{9.24}$$

Ya tenemos todos los elementos para calcular el $\sin(\alpha+\beta)$. Con referencia al triángulo rectángulo formado por los puntos O, E y D y considerando los dos resultados anteriores, tenemos:

$$\begin{aligned}
\sin(\alpha+\beta) &= \frac{\overline{ED}}{\overline{OD}} \\
\sin(\alpha+\beta) &= \frac{\overline{AC}}{1} \\
\sin(\alpha+\beta) &= \overline{AC} \\
\sin(\alpha+\beta) &= \overline{AB}+\overline{BC} \\
\sin(\alpha+\beta) &= \cos(\beta)\sin(\alpha)+\sin(\beta)\cos(\alpha) \qquad (9.25)
\end{aligned}$$

Resuelta la primera tarea, ahora abordemos el cálculo de $\cos(\alpha+\beta)$. En la figura 9.10 podemos apreciar que $\overline{EA}=\overline{DC}$. Observemos el triángulo rectángulo que une los puntos O, E y D, con hipotenusa $\overline{OD}=1$. En este triángulo tenemos:

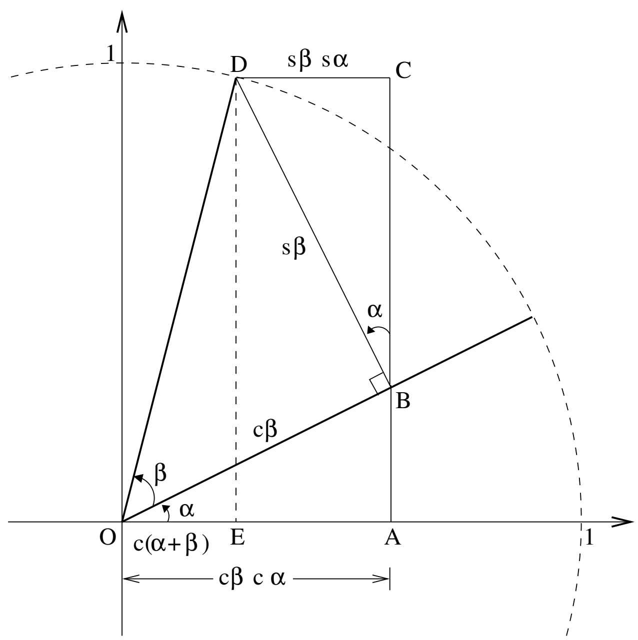


Figura 9.10: Cálculo de $\cos(\alpha+\beta)=\overline{OE}$. En la figura $s\alpha=\sin(\alpha)$, $c\alpha=\cos(\alpha)$, $s\beta=\sin(\beta)$ y $c\beta=\cos(\beta)$.

$$\begin{aligned}
\cos(\alpha+\beta) &= \frac{\overline{OE}}{\overline{OD}} \\
\cos(\alpha+\beta) &= \frac{\overline{OE}}{1} \\
\cos(\alpha+\beta) &= \overline{OE} \\
\cos(\alpha+\beta) &= \overline{OA}-\overline{EA} \\
\cos(\alpha+\beta) &= \overline{OA}-\overline{DC} \qquad (9.26)
\end{aligned}$$

El segmento $\overline{OA}$ es el cateto adyacente del triángulo rectángulo que une los puntos O, A y B, con hipotenusa

$\overline{OB} = \cos(\beta)$ y ángulo α. Por lo tanto tenemos que:

$$\begin{aligned} \cos(\alpha) &= \frac{\overline{OA}}{\overline{OB}} \\ \cos(\alpha) &= \frac{\overline{OA}}{\cos(\beta)} \\ \overline{OA} &= \cos(\beta)\cos(\alpha) \end{aligned} \tag{9.27}$$

El segmento $\overline{DC}$ es el cateto opuesto del triángulo rectángulo que une los puntos B, C y D, con hipotenusa $\overline{BD} = \sin(\beta)$ y ángulo α. Por lo tanto tenemos que:

$$\begin{aligned} \sin(\alpha) &= \frac{\overline{DC}}{\overline{BD}} \\ \sin(\alpha) &= \frac{\overline{DC}}{\sin(\beta)} \\ \overline{DC} &= \sin(\beta)\sin(\alpha) \end{aligned} \tag{9.28}$$

Sustituyendo estos dos resultados obtenidos en la ecuación 9.26, tenemos:

$$\begin{aligned} \cos(\alpha+\beta) &= \overline{OA} - \overline{DC} \\ \cos(\alpha+\beta) &= \cos(\beta)\cos(\alpha) - \sin(\beta)\sin(\alpha) \end{aligned} \tag{9.29}$$

Con este resultado, hemos completado la tarea. Estas identidades trigonométricas serán utilizadas al abordar el tema de números complejos en el capítulo 13.

9.4. Aplicando la trigonometría

Veamos ahora dos aplicaciones de la trigonometría: la primera plantea el problema de medir de forma indirecta la altura de un edificio y la segunda es una aplicación en geometría.

9.4.1. Determinar la altura de un edificio de forma indirecta

Consideremos la siguiente situación. En un día soleado, deseamos determinar la altura de un edificio y para ello observamos que su sombra tiene una distancia horizontal de 5.25 metros sobre el terreno plano. Si también observamos que un letrero de 2 metros de altura proyecta una sombra de 1.5 metros, deseamos calcular la altura del edificio y el ángulo (en grados) que forman los rayos del sol con respecto de la vertical. La figura 9.11 ilustra la situación descrita.

El letrero tiene una altura $h = 2$ m, con sombra $s = 1.5$ m. El edificio tiene una sombra $S = 5.25$ m. De la figura se puede observar que el ángulo pedido es el ángulo α, el cual es igual al ángulo θ.

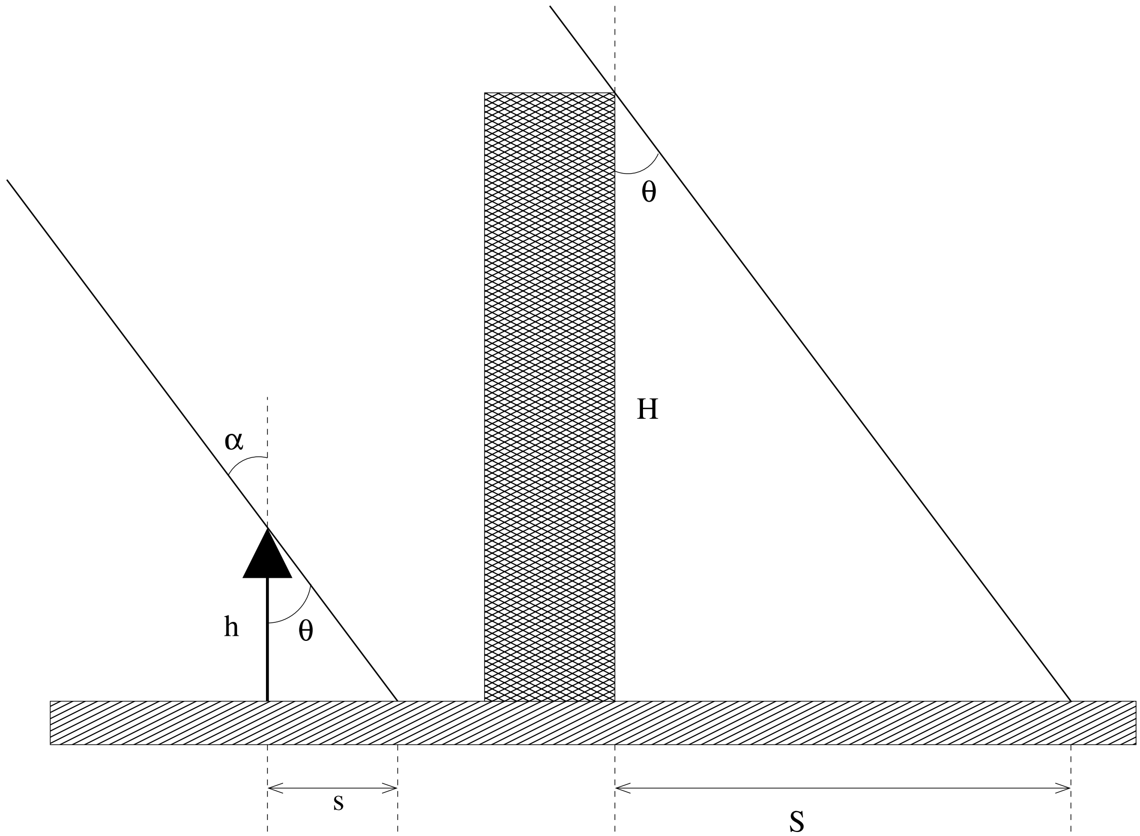


Figura 9.11: La altura de un edificio calculada por su sombra.

Del triángulo rectángulo del letrero tenemos:

$$
\begin{aligned}
\tan(\theta) &= \frac{s}{h} \\
\tan(\theta) &= \frac{1.5 \text{ m}}{2 \text{ m}} \\
\tan(\theta) &= 0.75 \\
\theta &= \arctan(0.75) \\
\theta &= 0.6435(\text{rad}) \\
\theta &= 0.6435(\text{rad}) * \frac{180 \text{ (g)}}{\pi(\text{rad})} \\
\theta &= \frac{0.6435 * 180}{\pi} \text{ g} \\
\theta &= 36.86 \text{ g}
\end{aligned}
$$

Ya tenemos la primera respuesta, el ángulo $\alpha = \theta = 36.86°$. Ahora determinemos la altura H, a partir de que conocemos que $\tan(\theta) = 0.75$. Del triángulo rectángulo del edificio, podemos encontrar la altura H:

$$\begin{aligned}
\tan(\theta) &= \frac{S}{H} \\
H * \tan(\theta) &= \frac{S}{H} * H \\
H * \tan(\theta) &= S \\
H * \tan(\theta) * \frac{1}{\tan(\theta)} &= S * \frac{1}{\tan(\theta)} \\
H &= \frac{S}{\tan(\theta)} \\
H &= \frac{5.25 \text{ m}}{0.75} \\
H &= 7 \text{ m}
\end{aligned}$$

9.4.2. Cálculo de una circunferencia que pasa por los vértices de un triángulo

Sea $P_1 = (2, 1)$, $P_2 = (7, 6)$ y $P_3 = (1, 6)$ los tres vértices de un triángulo. Se desea calcular la circunferencia que pase por los tres vértices, como se ilustra en la figura 9.12.

En la figura podemos observar que las rectas perpendiculares a los lados del triángulo (mostradas en la figura como líneas discontinuas), que pasan por los puntos medios de cada lado del triángulo, se cruzan en el punto P_c, el centro de la circunferencia. De manera que si conocemos P_c, podemos calcular el radio de la circunferencia calculando la distancia entre P_c y cualquiera de los vértices.

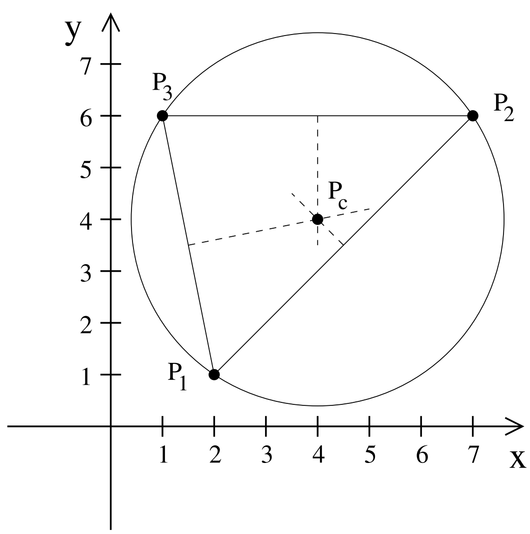


Figura 9.12: Circunferencia que toca los vértices de un triángulo. La circunferencia con centro en P_c pasa por los vértices del triángulo P_1, P_2 y P_3.

Para lograr el objetivo de encontrar el centro de la circunferencia, es necesario resolver primero dos problemas:

1. Calcular el punto medio de un segmento de recta, definido por dos puntos en el plano.

2. Calcular una recta perpendicular a otra recta.

Enseguida se presenta la solución de estos dos problemas.

Punto medio de un segmento de recta

La figura 9.13 presenta el segmento de recta $\overline{P_1P_2}$, definido por los puntos $P_1 = (x_1, y_1)$ y $P_2 = (x_2, y_2)$, y el punto medio de dicho segmento marcado como el punto P_m, de coordenadas (x_m, y_m). El objetivo es calcular x_m y y_m.

Podemos observar que x_m será la coordenada x_1 más la mitad de la distancia entre x_1 y x_2. Como la distancia entre x_1 y x_2 la podemos calcular como $x_2 - x_1$, tenemos que x_m está dado por:

$$\begin{aligned}
x_m &= x_1 + \frac{x_2 - x_1}{2} \\
x_m &= x_1 + \frac{x_2}{2} - \frac{x_1}{2} \\
x_m &= \left(x_1 - \frac{x_1}{2}\right) + \frac{x_2}{2} \\
x_m &= \frac{x_1}{2} + \frac{x_2}{2} \\
x_m &= \frac{x_1 + x_2}{2}
\end{aligned}$$

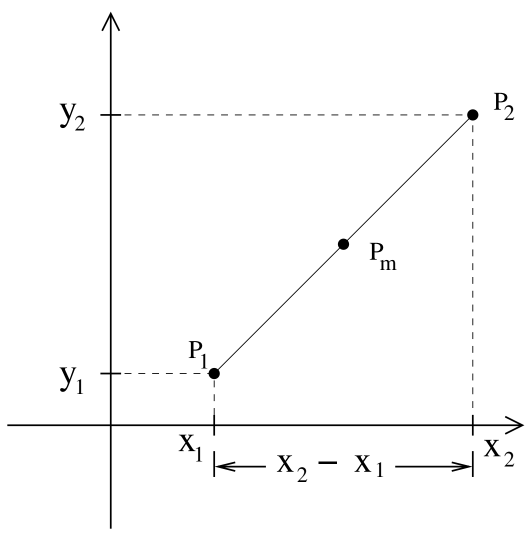


Figura 9.13: El punto medio P_m del segmento de recta $\overline{P_1P_2}$.

De forma similar podemos calcular el valor de y_m, el cual está dado por:

$$y_m = \frac{y_1 + y_2}{2}$$

De esta forma, ya tenemos el primer problema resuelto.

El punto medio $P_m = (x_m, y_m)$ entre los puntos $P_1 = (x_1, y1)$ y $P_2 = (x_2, y_2)$, se puede calcular como:

$$x_m = \frac{x_1 + x_2}{2} \tag{9.30}$$

$$y_m = \frac{y_1 + y_2}{2} \tag{9.31}$$

Es decir, las coordenadas son el promedio de las respectivas coordenadas.

Rectas perpendiculares

En la sección 9.2.1 vimos que una línea recta L_1 la podemos definir como:

$$y = m_1 x + b_1$$

Donde $m_1 = \tan(a_1)$ y b_1 son los parámetros que definen la recta. La pendiente m_1 está definida como la tangente del ángulo a_1 que forma la recta con respecto al eje x. La figura 9.14 muestra una línea L_1 y la línea L_2 que es perpendicular a L_1. Trazando una recta paralela a L_1 que pase por el mismo punto donde L_2 cruza el eje x, podemos observar que el ángulo de inclinación de L_2 es el ángulo a_1 (de la línea L_1) más 90 grados ($\frac{\pi}{2}$ radianes). Es decir:

$$a_2 = a_1 + \frac{\pi}{2} \tag{9.32}$$

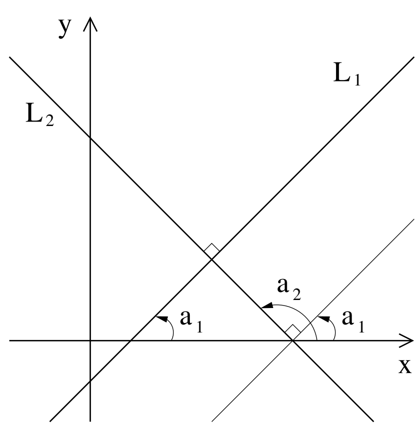


Figura 9.14: Líneas perpendiculares L_1 y L_2. La recta L_1 tiene un ángulo de inclinación a_1, mientras que la recta L_2 tiene un ángulo de inclinación $a_2 = a_1 + \frac{\pi}{2}$.

De manera que la pendiente m_2, de la recta L_2, la podemos calcular aprovechando la ecuación 9.20 que vimos en la sección 9.3.3,

$$\begin{aligned} m_2 &= \tan\left(a_1 + \frac{\pi}{2}\right) \\ m_2 &= -\frac{1}{\tan(a_1)} \\ m_2 &= -\frac{1}{m_1} \end{aligned} \tag{9.33}$$

El lector puede comprobar fácilmente que el producto de las pendientes de dos rectas que son perpendiculares una de la otra es -1. Es decir,

$$m_1 * m_2 = -1 \tag{9.34}$$

Las líneas definidas por las ecuaciones: $y = m_1x + b_1$ y $y = m_2x + b_2$ son perpendiculares si cumplen las condiciones:

$$m_2 = -\frac{1}{m_1} \tag{9.35}$$

$$m_1 * m_2 = -1 \tag{9.36}$$

El problema no está resuelto del todo. Si tenemos la recta L_1 horizontal definida por $y = 0x + b$ (una línea con pendiente 0), la pendiente de la recta perpendicular no está definida: $m_2 = -\frac{1}{0}$, porque involucra una división por cero.

Para solucionar este problema, veamos la línea L_1 expresada por la ecuación general de una línea recta:

$$A_1x + B_1y + C_1 = 0$$

En este caso la línea se expresa por tres parámetros: A_1, B_1 y C_1. Ya anteriormente derivamos una expresión para la pendiente m en términos de los parámetros A, B y C de la recta. Se trata de la ecuación 8.17 contenida en la página 118. La pendiente m_1 de la línea L_1 está dada por:

$$m_1 = \frac{-A_1}{B_1}$$

De manera que la pendiente $m_2 = \frac{-A_2}{B_2}$ de la recta L_2, perpendicular a L_1, se puede calcular como:

$$\begin{aligned} m_2 &= -\frac{1}{m_1} \\ m_2 &= -\frac{1}{\frac{-A_1}{B_1}} \\ m_2 &= \frac{B_1}{A_1} \\ m_2 &= \frac{-(-B_1)}{A_1} \\ \frac{-A_2}{B_2} &= \frac{-(-B_1)}{A_1} \end{aligned}$$

De la última ecuación podemos ver que $A_2 = -B_1$ y $B_2 = A_1$, para que las fracciones del lado izquierdo y del lado derecho sean iguales. De esta forma llegamos al resultado general.

Las líneas definidas por las ecuaciones: $A_1x+B_1y+C_1 = 0$ y $A_2x+B_2y+C_2 = 0$ son perpendiculares si cumplen las condiciones:

$$A_2 = -B_1 \quad (9.37)$$
$$B_2 = A_1 \quad (9.38)$$

Probemos si funciona para el caso de la recta horizontal $y = 0x + b_1$. La ecuación general de esta recta es:

$$0x - y + b_1 = 0$$

Aplicando el resultado anterior, una recta perpendicular está dada por:

$$x + 0y + b_2 = 0$$

Es decir, se trata de una recta vertical, lo cual es correcto.

Encontrando la circunferencia que toca los vértices del triángulo

Volviendo al problema original de determinar la circunferencia que pasa por los puntos: $P_1 = (2, 1)$, $P_2 = (7, 6)$ y $P_3 = (1, 6)$, tenemos que $x_1 = 2$, $y_1 = 1$, $x_2 = 7$, $y_2 = 6$, $x_3 = 1$, $y_3 = 6$.

Calculemos el punto medio, denotado como $P_{m12} = (x_{m12}, y_{m12})$, entre P_1 y P_2,

$$\begin{aligned} x_{m12} &= \frac{x_1 + x_2}{2} \\ x_{m12} &= \frac{2 + 7}{2} \\ x_{m12} &= 4.5 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} y_{m12} &= \frac{y_1 + y_2}{2} \\ y_{m12} &= \frac{1 + 6}{2} \\ y_{m12} &= 3.5 \end{aligned}$$

De manera que el punto medio $P_{m12} = (4.5, 3.5)$. De igual forma, calculemos $P_{m13} = (x_{m13}, y_{m13})$, el punto medio entre los puntos P_1 y P_3,

$$\begin{aligned} x_{m13} &= \frac{x_1 + x_3}{2} \\ x_{m13} &= \frac{2 + 1}{2} \\ x_{m13} &= 1.5 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} y_{m13} &= \frac{y_1 + y_3}{2} \\ y_{m13} &= \frac{1+6}{2} \\ y_{m13} &= 3.5 \end{aligned}$$

De manera que el punto medio $P_{m13} = (1.5, 3.5)$. Ahora calculemos la línea L_{12}, definida por la ecuación $y = m_{12}x + b_{12}$, que pasa por los puntos P_1 y P_2,

$$\begin{aligned} m_{12} &= \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \\ m_{12} &= \frac{6-1}{7-2} \\ m_{12} &= 1 \\ b_{12} &= y_1 - m_{12}x_1 \\ b_{12} &= 1 - (1)(2) \\ b_{12} &= -1 \end{aligned}$$

De manera que la línea L_{12} está definida por la ecuación $y = x - 1$. La línea perpendicular a L_{12}, denotada como $L_{12\perp}$ (definida por la ecuación $y = m_{12\perp}x + b_{12\perp}$), tiene pendiente $m_{12\perp} = -1$ y debe pasar por el punto $P_{m12} = (4.5, 3.5)$. Sólo falta calcular $b_{12\perp}$,

$$\begin{aligned} b_{12\perp} &= y_{m12} - m_{12\perp}x_{m12} \\ b_{12\perp} &= 3.5 - (-1)4.5 \\ b_{12\perp} &= 8 \end{aligned}$$

De manera que la línea perpendicular $L_{12\perp}$ tiene como ecuación:

$$y = -x + 8 \tag{9.39}$$

Ahora calculemos la línea L_{13}, definida por la ecuación $y = m_{13}x + b_{13}$, que pasa por los puntos P_1 y P_3,

$$\begin{aligned} m_{13} &= \frac{y_3 - y_1}{x_3 - x_1} \\ m_{13} &= \frac{6-1}{1-2} \\ m_{13} &= -5 \\ b_{13} &= y_1 - m_{12}x_1 \\ b_{13} &= 1 - (-5)(2) \\ b_{13} &= 11 \end{aligned}$$

De manera que la línea L_{13} está definida por la ecuación $y = -5x + 11$. La línea perpendicular a L_{13}, denotada como $L_{13\perp}$ (definida por la ecuación $y = m_{13\perp}x + b_{13\perp}$), tiene pendiente $m_{13\perp} = -\frac{1}{-5} = 0.2$ y debe pasar por el punto $P_{m13} = (1.5, 3.5)$. Sólo falta calcular $b_{13\perp}$,

$$\begin{aligned} b_{13\perp} &= y_{m13} - m_{13\perp}x_{m13} \\ b_{13\perp} &= 3.5 - (0.2)1.5 \\ b_{13\perp} &= 3.2 \end{aligned}$$

De manera que la línea perpendicular $L_{13\perp}$ tiene como ecuación:

$$y = 0.2x + 3.2 \tag{9.40}$$

Solo falta calcular la intersección de las líneas dadas por las ecuaciones 9.39 y 9.40. Si las igualamos se tiene:

$$\begin{aligned}
-x + 8 &= 0.2x + 3.2 \\
-x + 8 + x - 3.2 &= 0.2x + 3.2 + x - 3.2 \\
4.8 &= 1.2x \\
\frac{1}{1.25} * 4.8 &= 1.25x * \frac{1}{1.25} \\
4 &= x
\end{aligned}$$

De manera que podemos calcular la coordenada y con la ecuación 9.39:

$$\begin{aligned}
y &= -x + 8 \\
y &= -4 + 8 \\
y &= 4
\end{aligned}$$

Las coordenadas del centro de la circunferencia son $P_c = (4, 4)$. Observe que no fue necesario calcular la otra recta perpendicular, debido a que la intersección de dos rectas perpendiculares permite calcular el centro de la circunferencia. Al centro de la circunferencia también se le conoce como **circuncentro**.

Finalmente el radio r de la circunferencia se puede calcular como la distancia del circuncentro $Pc = (x_c, y_c)$ a cualquiera de los puntos. Por ejemplo con el punto P_1 se tiene:

$$\begin{aligned}
r &= \sqrt{(y_1 - y_c)^2 + (x_1 - x_c)^2} \\
r &= \sqrt{(1-4)^2 + (2-4)^2} \\
r &= 3.6056
\end{aligned}$$

Otra forma de solución

Si se utiliza la línea L_{32}, que une los puntos P_3 y P_2 en la figura 9.14, obtenemos que esta línea esta definida como $y = 6$. En la forma general de una línea tenemos:

$$0x + y - 6 = 0$$

Por otro lado, al calcular el punto medio $P_{m32} = (x_{m32}, y_{m32})$ del segmento de recta $\overline{P_3P_2}$ se obtiene $P_{m32} = (4, 6)$. Al calcular la línea $L_{32\perp}$ que es perpendicular L_{32} se obtiene la expresión:

$$-x + 0\,y + C = 0$$

Si esta línea tiene que pasar por el punto $P_{m32} = (4, 6)$, se debe cumplir:

$$\begin{aligned}
-x_{m32} + 0\,y_{m32} + C &= 0 \\
-4 + 0(6) + C &= 0 \\
C &= 4
\end{aligned}$$

Con este resultado, la ecuación de la línea $L_{32\perp}$ esta completamente definida:

$$\begin{aligned} -x + 0y + 4 &= 0 \\ x &= 4 \end{aligned}$$

Para calcular la coordenada y de la intersección de esta línea con alguna de las otras rectas perpendiculares basta sustituir este valor de $x = 4$ en la ecuación de la otra línea perpendicular. Por ejemplo, utilizando la línea $L_{12\perp}$ (ec. 9.39) obtenemos:

$$\begin{aligned} y &= -x + 8 \\ y &= -4 + 8 \\ y &= 4 \end{aligned}$$

El cual coincide con el resultado $P_c(4, 4)$ calculado anteriormente, como era de esperarse.

9.5. Funciones trigonométricas en Octave

En octave tenemos las siguientes funciones trigonométricas:

- $\sin(x)$. Las funciones de Octave `sin(x)` y `sind(x)` calculan la función $\sin(x)$ cuando el valor de x se expresa en radianes y en grados, respectivamente. Por ejemplo:

```
>> sin(pi/4)
ans =  0.70711
>> sind(45)
ans =  0.70711
```

  En Octave `pi` se refiere al valor de la constante π.

- $\cos(x)$. Las funciones de Octave: `cos(x)` y `cosd(x)` calculan la función $\cos(x)$ cuando el valor de x se expresa en radianes y en grados, respectivamente. Por ejemplo:

```
>> cos(pi/6)
ans =  0.86603
>> cosd(30)
ans =  0.86603
```

- $\tan(x)$. Las funciones de Octave: `tan(x)` y `tand(x)` calculan la función $\tan(x)$ cuando el valor de x se expresa en radianes y en grados, respectivamente. Por ejemplo:

```
>> tan(pi/4)
ans =  1.00000
>> tand(45)
ans =  1.00000
```

- $\arcsin(x)$. Las funciones de Octave: `asin(x)` y `asind(x)` calculan la función $\arcsin(x)$ y regresan su valor en radianes o en grados, respectivamente. Por ejemplo:

```
>> asin(1)
ans =  1.5708
>> asind(1)
ans =  90
```

- $\arccos(x)$. Las funciones de Octave: `acos(x)` y `acosd(x)` calculan la función $\arccos(x)$ y regresan su valor en radianes o en grados, respectivamente. Por ejemplo:

```
>> acos(0.5)
ans =  1.0472
>> acosd(0.5)
ans =  60.000
```

- $\arctan(x)$. Las funciones de Octave: `atan(x)` y `atand(x)` calculan la función $\arctan(x)$ y regresan su valor en radianes o en grados, respectivamente. Por ejemplo:

```
>> atan(1)
ans =  0.78540
>> atand(1)
ans =  45
```

  Adicionalmente Octave proporciona las funciones `atan2(y,x)` y `atan2d(y,x)` que reciben dos parámetros: la y seguida de la x, y calculan la función $\arctan(y, x)$. Estas funciones regresan el ángulo en un rango de $-\pi$ a π radianes (o de -180 a 180 grados). Por ejemplo:

```
>> atan2d(1,1)
ans =  45
>> atan2d(-1,1)
ans = -45
>> atan2d(1,-1)
ans =  135
>> atan2d(-1,-1)
ans = -135
```

  La función `atand(y/x)` no puede distinguir el primer caso del último, porque en ambas ocasiones $\frac{1}{1} = \frac{-1}{-1}$. De igual manera, no puede diferenciar del segundo y tercer caso debido a que $\frac{-1}{1} = \frac{1}{-1}$. Recuerde que `atan` regresa un valor entre $-\frac{\pi}{2}$ y $\frac{\pi}{2}$ radianes.

9.6. Ejercicios propuestos

1. Determine el área de un triángulo si su base mide 5 metros y los otros dos lados miden 4 y 3 metros.
2. Encuentre los ángulos interiores de un triángulo rectángulo si los catetos son iguales.
3. Encuentre los ángulos interiores de un triángulo rectángulo si la hipotenusa es el doble de uno de los catetos.
4. Encuentre el perímetro de un triángulo rectángulo si el ángulo más pequeño es de 30° y el lado más pequeño es de 10 metros.
5. Si una pirámide tiene forma de un triángulo equilatero (tres lados iguales), teniendo lados de 500 metros, ¿Cuál es la altura de la pirámide?
6. Si una pirámide forma un triángulo isósceles (dos lados iguales), y el lado más pequeño tiene una longitud de 400 metros sobre el suelo; y si sabemos que el lado más pequeño es la mitad del lado grande, ¿Cuál es la altura de la pirámide?

7. Demuestre que los valores de la función seno y coseno no dependen del tamaño del triángulo que se considere.

8. Determine la ecuación de una recta que pasa por el punto $(1, 1)$ y tiene una ángulo de inclinación de 30° con respecto al eje x positivo.

9. Determine la ecuación de una recta perpendicular a la recta del ejercicio anterior que pasa además por el origen.

10. Los puntos (x, y) que forman un circunferencia de radio r con centro en el origen, están definidos por las expresiones:

$$\begin{aligned} x &= r * \cos(t) \\ y_1 &= r * \sin(t) \\ y_2 &= -r * \sin(t) \end{aligned}$$

    Grafique en Octave los puntos de una circunferencia de radio $r = 5$, considerando valores de t en el intervalo: $0 \leq t \leq \pi$, utilizando incrementos de 0.01 unidades. Para ello, considere dibujar todos los puntos (x, y_1) y (x, y_2).

    Recuerde utilizar la opción `axis equal` para tener iguales unidades de distancia en los ejes de la gráfica. Después de llamar la primera vez a la función `plot`, ingrese el comando `hold on` para que la segunda llamada a la función plot se realice sobre la misma gráfica. Se deberá obtener una gráfica como la mostrada en la figura A.8 de la página 372.

Capítulo 10

Las funciones exponencial y logarítmica

Un número irracional muy importante en matemáticas, además del número π, es el número de Euler o **número** e. Veamos cómo puede obtenerse este número e.

10.1. El número e

Supongamos que un banco nos presta 1 peso con una tasa de interés del $100\,\%$ anual y nos cobra los intereses terminando el año. Al final del año le deberíamos al banco $1 + 1 = 2$ pesos. Pensemos ahora que nos cobra cada semestre el interés (del $50\,\%$) y ese interés se agrega a la deuda. En este caso la deuda total e sería:

$$e = \left(1 + \frac{1}{2}\right)^2 = 1.5 * 1.5 = 2.25$$

Si ahora nos cobra cada mes, el número e crece un poco:

$$e = \left(1 + \frac{1}{12}\right)^{12} = 2.6130$$

Si fuera cada día, entonces el número e crece un poco más:

$$e = \left(1 + \frac{1}{365}\right)^{365} = 2.7146$$

Si el intervalo de tiempo fuera más y más pequeño, tendríamos que el número n de la siguiente expresión sería cada vez más y más grande:

$$e = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n}$$

En el límite, cuando n tiende a infinito, el valor de e es un número irracional cuyos primeros dígitos son:

$$e = \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n} = 2.718281828459045\ldots \tag{10.1}$$

Otra forma de calcular el número e puede obtenerse de la siguiente suma infinita de términos:

$$e = 1 + \frac{1}{1} + \frac{1}{1*2} + \frac{1}{1*2*3} + \frac{1}{1*2*3*4} + \ldots$$

Por cierto, es conveniente mencionar que el denominador de las fracciones se le conoce como la función **factorial**, que abreviaremos como fact. Así fact$(1) = 1$, fact$(2) = 1*2 = 2$, fact$(3) = 1*2*3 = 6$, etc. En general, el factorial de un número n es el producto de todos los enteros positivos menores o iguales que n. Adicionalmente definimos que fact$(0) = 1$. El factorial de un número también se indica poniendo un signo de admiración enseguida del número. Por ejemplo: $0! = 1$, $1! = 1$, $2! = 2$ y $3! = 6$. Con esta notación del factorial, el número e se puede expresar de la siguiente manera:

$$e = \frac{1}{0!} + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \frac{1}{5!} + \ldots \tag{10.2}$$

Finalmente si utilizamos la notación compacta de una sumatoria ($\sum$), el número e se puede expresar como:

$$e = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{i!} \tag{10.3}$$

En esta expresión el primer elemento de la suma se obtiene al hacer $i = 0$ (es decir $\frac{1}{0!}$), enseguida se obtiene el segundo elemento con $i = 1$ (es decir $\frac{1}{1!}$), y así sucesivamente.

10.2. La función exponencial

Si elevamos el número e a una potencia x tenemos **la función exponencial**, denotada como $\exp(x)$, y definida como sigue:

$$\exp(x) = e^x \tag{10.4}$$

Si en lugar de e utilizamos otro número b como base, tenemos una función exponencial que se representa como $\mathrm{E_b}(x)$ y se define como:

$$\mathrm{E_b}(x) = b^x \tag{10.5}$$

La base b debe cumplir dos condiciones: $b > 0$ y $b \neq 1$.

De las propiedades de las potencias, podemos comprobar fácilmente las propiedades indicadas en las ecuaciones 10.6, 10.7, 10.8 y 10.9:

$$\begin{aligned}
\exp(x+y) &= e^{x+y} \\
\exp(x+y) &= e^x * e^y \\
\exp(x+y) &= \exp(x) * \exp(y) && (10.6) \\
\exp(x-y) &= e^{x-y} \\
\exp(x-y) &= \frac{e^x}{e^y} \\
\exp(x-y) &= \frac{\exp(x)}{\exp(y)} && (10.7)
\end{aligned}$$

$$\exp(-x) = \frac{1}{\exp(x)} \tag{10.8}$$

$$\exp(0) = 1 \tag{10.9}$$

La figura 10.1 muestra la gráfica del comportamiento de la función exponencial para valores de x entre -3 y 3. Podemos ver que crece rápidamente a medida que x se incrementa.

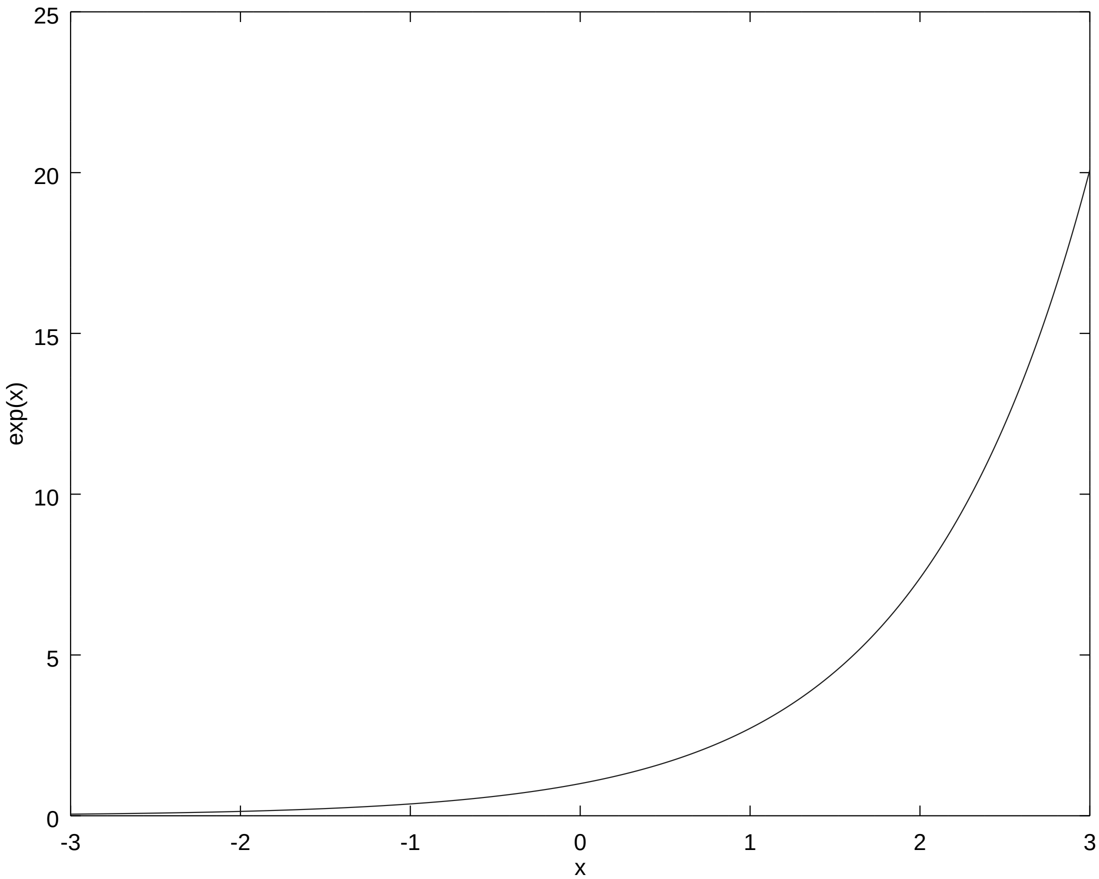


Figura 10.1: Gráfica de la función exponencial.

10.2.1. Aplicaciones de la función exponencial

Veamos como podemos utilizar la función exponencial para modelar el crecimiento de una población y también un ejemplo de su uso en la construcción de funciones más complejas.

Modelo del crecimiento de una población

Suponga que al inicio de un experimento se tiene una población de 3 bacterias. Si después de cada minuto cada bacteria se divide en dos, obtengamos una expresión para calcular la cantidad de bacterias en el tiempo t, expresado en minutos.

Sea $P(t)$ la función que nos permitirá calcular la población de bacterias en el tiempo t expresado en minutos. Veamos que sucede cuanto t parte de 0 y se va incrementando:

$$\begin{aligned}
P(0) &= 3 \\
P(1) &= 2P(0) = 2 * 3 = 2^1 * 3 \\
P(2) &= 2P(1) = 2 * (2^1 * 3) = 2^2 * 3 \\
P(3) &= 2P(2) = 2 * (2^2 * 3) = 2^3 * 3
\end{aligned}$$

Si tenemos en cuenta que $2^0 = 1$, ya tenemos la expresión buscada:

$$P(t) = (3)\ 2^t$$

Usando esta expresión podríamos calcular la población al cabo de 10 minutos:

$$\begin{aligned}
P(t) &= (3)\ 2^t \\
P(10) &= (3)\ 2^{10}
\end{aligned}$$

En Octave podemos calcular el valor deseado:

```
>> P = 3 * 2^10
P =  3072
```

Se alcanzan 3072 bacterias al cabo de 10 minutos.

Construyendo funciones más complejas

La función exponencial también se usa con frecuencia para calcular funciones más complejas. Por ejemplo, la densidad de probabilidad más ampliamente utilizada en probabilidad es la densidad de probabilidad Gaussiana o Normal, definida de la siguiente manera:

$$N(x, m, \sigma) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}\right) \tag{10.10}$$

Siendo m un parámetro llamado media, y σ un parámetro llamado desviación estándar. La figura 10.2 muestra la curva de la densidad de probabilidad Gaussiana para $m = 0$ y $\sigma = 1$, curva que tiene la forma de una campana. La media m controla el valor de x en donde se localiza el pico de la campana, mientras que el valor de la desviación estándar σ controla que tan abierta o cerrada es la campana.

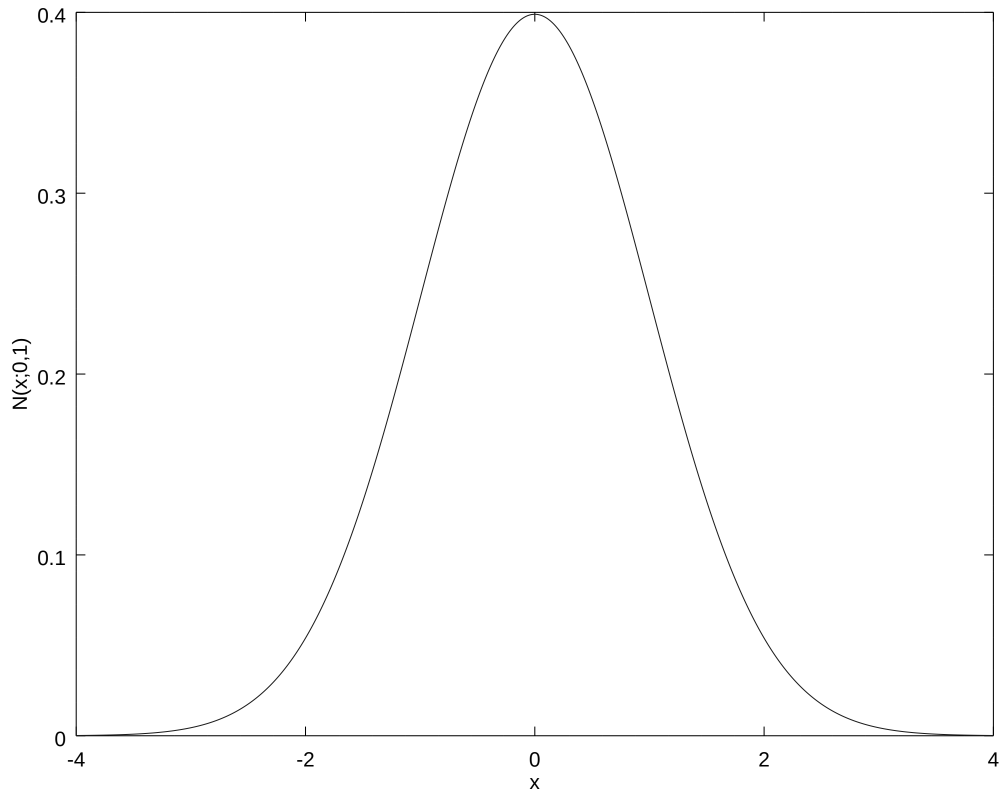


Figura 10.2: Densidad de probabilidad Gaussiana.

10.3. La función logaritmo

La función logaritmo en base b asigna al número x que recibe como entrada, el exponente n al que el número b se debe elevar para obtener el número x.

El logaritmo es la función inversa de la función exponencial E_b. El **logaritmo** de x, en base b, se denota como $\log_b(x)$ y está definido como sigue:

$$n = \log_b(x) \quad \text{si} \quad b^n = x \tag{10.11}$$

Para que el logaritmo esté definido, la base b debe ser positiva y distinta de 1, el argumento x debe ser un número positivo, $x > 0$. Si esto se cumple, n puede ser cualquier número real.

Si la base es el número e, el logaritmo se conoce como **logaritmo natural** y se abrevia simplemente como $\log$ o ln,

$$n = \log(x) \quad \text{si} \quad e^n = x \tag{10.12}$$

si la base es el número 10, el logaritmo se conoce como **logaritmo decimal o común**,

$$n = \log_{10}(x) \quad \text{si} \quad 10^n = x \tag{10.13}$$

si la base es el número 2, el logaritmo se conoce como **logaritmo binario**,

$$n = \log_2(x) \quad \text{si} \quad 2^n = x \tag{10.14}$$

Veamos algunos ejemplos de logaritmos:

- $\log(1) = 0$, porque $e^0 = 1$.
- $\log_{10}(100) = 2$, porque $10^2 = 100$.
- $\log_{10}(10^2) = 2$, porque $10^2 = 10^2$.
- $\log(e^3) = 3$, porque $e^3 = e^3$.
- $\log_2(16) = 4$, porque $2^4 = 16$.
- $\log_2(\frac{1}{2}) = -1$, porque $2^{-1} = \frac{1}{2}$.
- $\log_{10}(0.01) = -2$, porque $10^{-2} = 0.01$.

Teniendo en cuenta que el logaritmo es un exponente, al que se eleva la base b, se cumplen las siguientes propiedades siguientes:

$$\begin{aligned}
\log_b(xy) &= \log_b(x) + \log_b(y) && (10.15)\\
\log_b\left(\frac{x}{y}\right) &= \log_b(x) - \log_b(y) && (10.16)\\
\log_b(x^y) &= y\log_b(x) && (10.17)\\
\log_b(\sqrt[y]{x}) &= \frac{\log_b(x)}{y} && (10.18)\\
\log_b(b) &= 1 && (10.19)\\
\log_b(1) &= 0 && (10.20)
\end{aligned}$$

Para demostrar la primera propiedad tenemos que:

$$\begin{aligned}
x &= b^{n_x}\\
y &= b^{n_y}\\
xy &= b^{n_x}b^{n_y}\\
xy &= b^{n_x+n_y}\\
\log_b(xy) &= n_x + n_y\\
\log_b(xy) &= \log_b(x) + \log_b(y)
\end{aligned}$$

Para la segunda propiedad:

$$\begin{aligned}
x &= b^{n_x} \\
y &= b^{n_y} \\
\frac{x}{y} &= \frac{b^{n_x}}{b^{n_y}} \\
\frac{x}{y} &= b^{n_x - n_y} \\
\log_b\left(\frac{x}{y}\right) &= n_x - n_y \\
\log_b\left(\frac{x}{y}\right) &= \log_b(x) - \log_b(y)
\end{aligned}$$

Para la tercera propiedad:

$$\begin{aligned}
x &= b^{n_x} \\
x^y &= (b^{n_x})^y \\
x^y &= b^{n_x * y} \\
\log_b(x^y) &= y * n_x \\
\log_b(x^y) &= y * \log_b(x)
\end{aligned}$$

La cuarta propiedad se deduce de la tercera, considerando que $\sqrt[y]{x} = x^{1/y}$. La quinta y sexta propiedad se deducen directamente al considerar que $b^1 = b$ y $b^0 = 1$.

La figura 10.3 muestra la gráfica de la función logaritmo natural. Notemos que para el valor de $x = e$, el logaritmo es 1; para valores que se acercan a 0, el logaritmo decrece rápidamente a valores negativos; y para valores $x > e$, el logaritmo crece lentamente.

10.3.1. Convertir logaritmos de una base a otra

Imaginemos que tenemos a la mano una calculadora común con las operaciones de logaritmo natural (la tecla "ln") y logaritmo decimal (la tecla "log"). Ahora bien, si necesitamos calcular el logaritmo binario de un número, ¿lo podemos calcular usando la calculadora que tenemos a la mano?

Para contestar esta pregunta, abordaremos el problema más general de convertir un logaritmo en base k de un número x a un logaritmo en base b del mismo número x.

Sea $x_k = \log_k(x)$ el valor que tenemos inicialmente y considere que sólo disponemos de una calculadora para calcular logaritmos en base k.

Analicemos el siguiente procedimiento, donde se han agregado comentarios a la derecha, para facilitar la lectura.

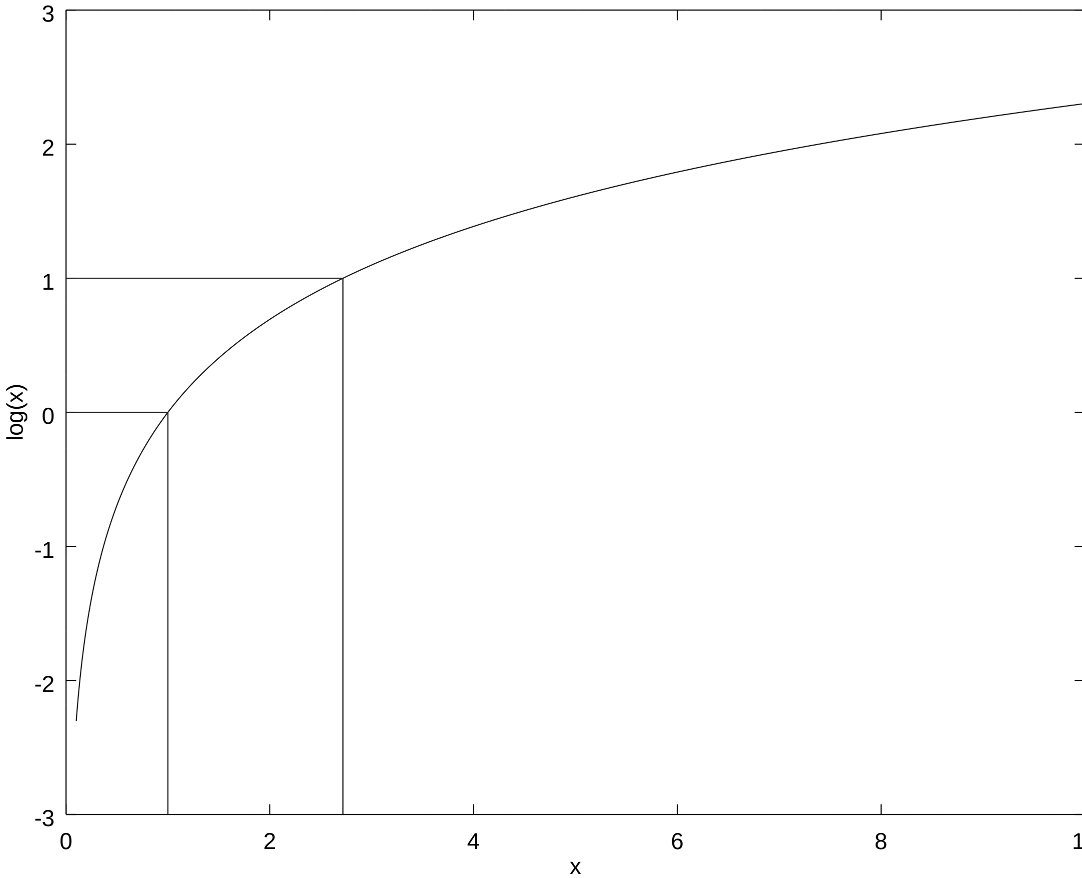


Figura 10.3: Gráfica de la función logaritmo natural.

$$
\begin{aligned}
k^{x_k} &= x && (x_k \text{ es el logaritmo de } x \text{ en la base } k)\\
b^{x_b} &= x && (x_b \text{ es el logaritmo de } x \text{ en la base } b)\\
b^{x_b} &= k^{x_k} && (\text{igualando las dos ecuaciones anteriores})\\
(k^{b_k})^{x_b} &= k^{x_k} && (b_k = \log_k(b), \text{ de manera que } b = k^{b_k}\ )\\
k^{b_k x_b} &= k^{x_k} && (\text{utilizando las propiedades de las potencias})\\
b_k x_b &= x_k && (\text{igualando los exponentes})\\
\frac{1}{b_k} b_k x_b &= \frac{1}{b_k} x_k && (\text{multiplicando por } \tfrac{1}{b_k})\\
x_b &= \frac{x_k}{b_k} && (\text{despejando } x_b)\\
\log_b(x) &= \frac{\log_k(x)}{\log_k(b)} && (\text{restableciendo la notación de logaritmos}) \qquad (10.21)
\end{aligned}
$$

Así, para convertir de logaritmo decimal a logaritmo binario, tenemos:

$$\log_2(x) = \frac{\log_{10}(x)}{\log_{10}(2)} \tag{10.22}$$

Por ejemplo, para calcular el logaritmo binario de 1024, usando logaritmos decimales, tenemos:

$$\begin{aligned} \log_2(1024) &= \frac{\log_{10}(1024)}{\log_{10}(2)} \\ \log_2(1024) &= \frac{3.0102999566}{0.3010299956} \\ \log_2(1024) &= 10 \end{aligned}$$

En efecto, el resultado es correcto, $2^{10} = 1024$.

10.4. Usando Octave

En Octave `e` se refiere al número e visto al inicio de este capítulo. De manera que si queremos calcular, por ejemplo, `exp(2)`, lo podemos hacer de dos maneras:

```
>> exp(2)
ans =  7.3891
>> e^2
ans =  7.3891
```

Octave también facilita el trabajo de cálculo de logaritmos al disponer de tres funciones:

- La función log calcula el logaritmo natural de un número. Por ejemplo:

```
>> log(e)
ans =  1
```

- La función log10 calcula el logaritmo en base 10 de un número. Por ejemplo:

```
>> log10(1000)
ans =  3
```

- La función log2 calcula el logaritmo en base 2 de un número. Por ejemplo:

```
>> log2(1024)
ans =  10
```

10.5. Aplicaciones de la función logaritmo

Los logaritmos juegan también un papel importante en las matemáticas. Veamos enseguida dos aplicaciones de la función logaritmo, la primera relacionada con el modelo del crecimiento de una población visto en la sección 10.2.1, y la segunda relacionada con acústica.

10.5.1. Aplicación en el crecimiento de una población

En el problema de crecimiento de una población presentado en la sección 10.2.1, obtuvimos una expresión para calcular la cantidad de bacterias $P(t)$ en el tiempo t, expresado en minutos:

$$P(t) = (3)\ 2^t$$

El problema ahora es determinar el tiempo t, en minutos, tal que la población de bacterias alcance 12288 bacterias.

Para resolver este problema tomemos logaritmos en base 2 a ambos miembros de la igualdad y apliquemos las propiedades de los logaritmos que ya conocemos:

$$\begin{aligned} \log_2(P(t)) &= \log_2((3)\ 2^t) \\ \log_2(P(t)) &= \log_2(3) + \log_2(2^t) \\ \log_2(P(t)) &= \log_2(3) + t \\ t &= \log_2(P(t)) - \log_2(3) \end{aligned}$$

Si $P(t) = 12288$, tenemos que t lo podemos calcular en Octave como:

```
>> t = log2(12288) - log2(3)
t =  12
```

En efecto, con este tiempo calculado podemos comprobar que efectivamente la población alcanza 12288 bacterias al cabo de ese tiempo:

```
>> P = 3 * 2^12
P =  12288
```

Sin embargo, si queremos calcular el tiempo requerido para alcanzar 10000 bacterias, tenemos:

```
>> t = log2(10000) - log2(3)
t =  11.703
```

Pero, ¿qué significa el tiempo $t = 11.703$ minutos, si las bacterias se duplican cada minuto? La respuesta se puede encontrar al observar la gráfica del crecimiento de la población que se muestra en la figura 10.4. Utilizando este modelo matemático se tiene que para $t = 11.703$ la población de bacterias alcanza las 10000 bacterias. Este comportamiento asume que cada bacteria va creciendo de 1 bacteria a 2 bacterias en un rango continuo, a lo largo de un minuto. Es decir, podría alcanzar por ejemplo valores de 1.1, 1.125 o 1.3 bacterias.

Es interesante mostrar que la gráfica presentada fue generada por las siguientes instrucciones en Octave:

```
>> t=[0:0.01:12];
>> P = 3* 2.^t;
>> plot(t,P);
>> xlabel t
>> ylabel P
```

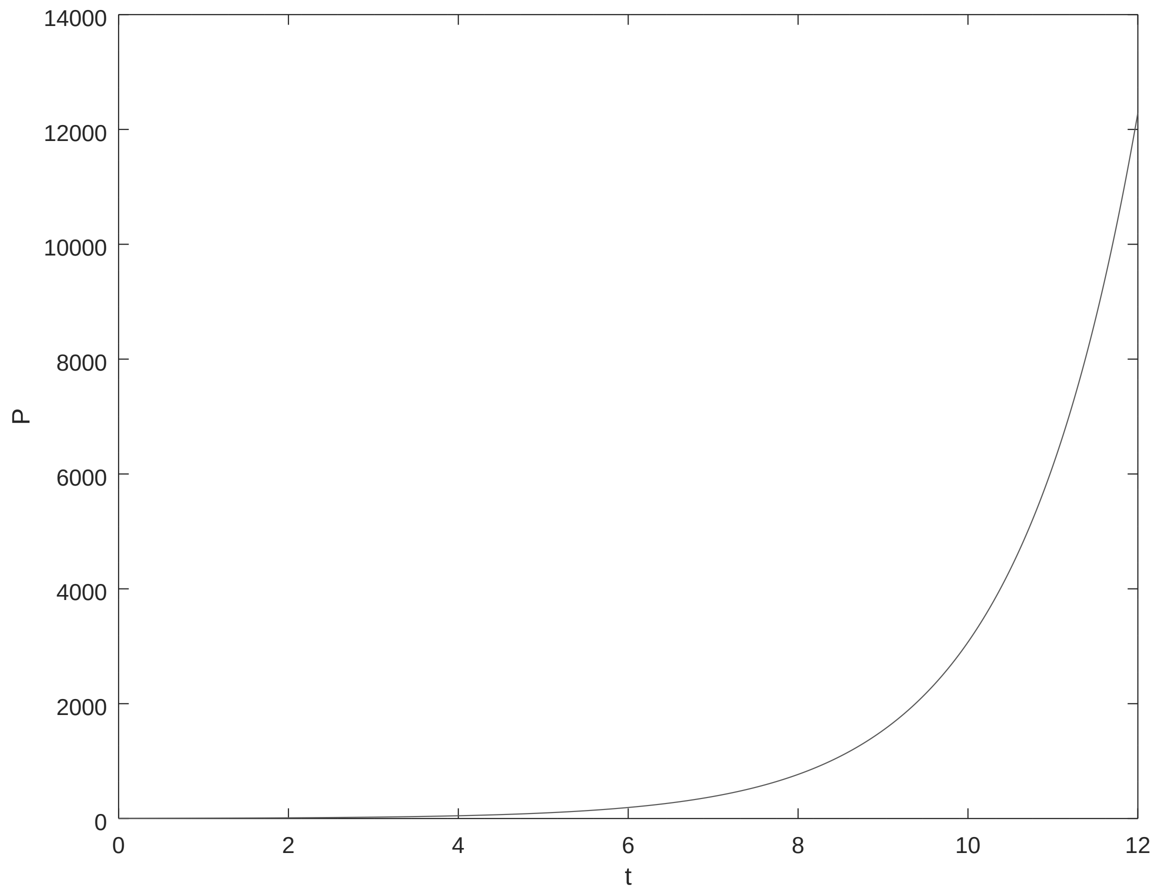


Figura 10.4: Gráfica de la función $P = (3) * 2^t$.

10.5.2. Aplicación en acústica

En acústica, la unidad de potencia sonora L_w se mide en unas unidades llamadas **decibeles** (abreviado como db), que se definen como sigue:

$$L_w = 10 * \log_{10}\left(\frac{W_1}{W_0}\right) \text{ (db)}$$

Donde W_1 es la potencia a estudiar, en unidades de watts por metro cuadrado ($\mathrm{w/m^2}$), y W_0 es una potencia de 10^{-12} $\mathrm{w/m^2}$, equivalente a un sonido apenas perceptible, en el umbral de audición.

Como ejemplo, consideremos una potencia W_1 generada por una bocina. Si la potencia se aumenta a $1000W_1$, deseamos calcular cuanto se incrementa la potencia de la bocina en decibeles. Sea L_1 la potencia asociada a W_1 y L_2 la potencia $1000W_1$. Para calcular L_2 hacemos lo siguiente:

$$
\begin{aligned}
L_1 &= 10 * \log_{10}\left(\frac{W_1}{W_0}\right) \\
L_2 &= 10 * \log_{10}\left(\frac{1000W_1}{W_0}\right) \\
L_2 &= 10 * \log_{10}\left(1000 * \frac{W_1}{W_0}\right) \\
L_2 &= 10 * \left(\log_{10}(1000) + \log_{10}\left(\frac{W_1}{W_0}\right)\right) \\
L_2 &= 10 * \left(3 + \log_{10}\left(\frac{W_1}{W_0}\right)\right) \\
L_2 &= 30 + 10 * \log_{10}\left(\frac{W_1}{W_0}\right) \\
L_2 &= 30 + L_1 \text{ (db)}
\end{aligned}
$$

Es decir, se incrementa la potencia en 30 decibeles. Este tipo de medición de la potencia sonora se debe a que nuestro oído no opera en forma lineal, sino logarítmica.

10.6. Ejercicios propuestos

1. Ejemplo tomado de (Aguilar-Márques et al., 2016). El decaimiento radioactivo de un material está dado por la fórmula:

   $$C = C_0 2^{-\frac{t}{n}}$$

   Donde C_0 es la cantidad inicial del material, en el tiempo $t = 0$; t es el tiempo transcurrido, en años; n es la vida media del material, en años; y C es la cantidad del material radioactivo al transcurrir el tiempo t. La vida media es el tiempo transcurrido para que la mitad de la sustancia radioactiva se desintegre.

   a) Si el tiempo de vida media de un material es de 25 años, ¿Cuánto porcentaje del material original queda después de haber transcurrido 15 años?

   b) ¿Cuál es la antigüedad de una figura de madera que tiene la cuarta parte de su contenido original de carbono 14, si la vida media del material es de $5,000$ años?

2. Ejemplo tomado de (Aguilar-Márques et al., 2016). El crecimiento de una población está determinado por la fórmula:

   $$N = N_0 e^{kt}$$

   Donde N_0 es el número de habitantes de la población, en el tiempo $t = 0$; t es el tiempo transcurrido en años; k es una constante y N es el número de habitantes al transcurrir el tiempo t.

   a) Si una población tiene inicialmente $3,500$ personas y la constante k tiene un valor de 0.025, calcule el número de habitantes que habrá en 20 años.

   b) En un cultivo de laboratorio las bacterias aumentaron de una población inicial de 480 a 1200 en 5 horas. ¿Cuánto tardará la población en aumentar a 8000 bacterias?

3. Calcule el logaritmo decimal de un millón si tiene una calculadora que tiene sólo la función de logaritmo natural.

4. Grafique en Octave la densidad de probabilidad Gaussiana definida como sigue:

$$N(x, m, \sigma) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}\right) \tag{10.23}$$

   Para $m = 0$ y $\sigma = 1$. Debe obtener una curva similar a la presentada en la figura 10.2, de la página 159.

Capítulo 11

Evaluación 2

Resuelva los ejercicios propuestos, anotando clara y ordenadamente la secuencia de pasos que le lleva a la solución. Indique claramente los resultados obtenidos.

1. Si un triángulo rectángulo tiene un cateto 2 unidades más largo que el otro cateto y la hipotenusa tiene 2 unidades más que el cateto más largo, encuentre el perímetro de dicho triángulo.
2. Encuentra el valor de x en las siguientes ecuaciones:

   a) $\frac{4}{5}\,\frac{1}{x-1} - \frac{2}{5}\,\frac{1}{x+1} = \frac{1}{x^2-1}$ b) $\frac{\frac{1}{5}}{5-\frac{5}{3x+1}} = \frac{1}{5}$
3. En un expendio de granos, se ofrece una bolsa de 10 kilogramos de una mezcla de frijoles de dos tipos. El frijol tipo A vale \$18.00 el kilogramo y el frijol tipo B vale \$22.00 el kilogramo. Si la mezcla tiene un costo de \$19.60 por kilogramo, ¿Cuántos kilogramos de cada tipo de frijol contiene la bolsa de 10 kilogramos?
4. Encuentra un número entero positivo de dos dígitos, tal que el dígito de las unidades equivale a tres cuartas partes del dígito de las decenas. Si además el número se divide entre la suma de sus dígitos, el cociente resulta ser 6 y el residuo es 2.
5. Cierto avión de combate situado inicialmente a $11,200$ metros de altura realiza un descenso en línea recta. Si después de 3 minutos desciende 420 metros, encuentre:
   - *a*) la ecuación de la recta que define la altura en metros en términos del tiempo en segundos.
   - *b*) con la ecuación de la recta encontrada, calcule el tiempo para que su altura sea $5,000$ metros.
6. Cierto triángulo tiene dos lados de 10m y 6m. Si además el ángulo entre estos dos lados es de 30 grados, determine:
   - *a*) la longitud del otro lado.
   - *b*) el área del triángulo.
7. Si la población de una cierta bacteria se incrementa 100 veces cada hora, encuentre:
   - *a*) Una expresión matemática para calcular la cantidad de bacterias en t horas. Suponga que en $t = 0$, se tienen 4 bacterias.
   - *b*) Encuentre una expresión matemática para calcular el tiempo en que la población de bacterias alcanza $25,000$ bacterias, suponiendo que inicialmente están sólo 4 bacterias.

Capítulo 12

Lógica y conjuntos

En este capítulo revisaremos los conceptos básicos de lógica y su relación con el tema de conjuntos.

12.1. Lógica proposicional

Iniciemos definiendo que es una proposición lógica.

12.1.1. Proposiciones lógicas

Una **proposición lógica** es cualquier expresión que puede ser calificada como **verdadera** o **falsa**. Por ejemplo, los siguientes son ejemplos de proposiciones lógicas verdaderas:

1. "La Tierra es redonda"
2. "El agua se forma con átomos de hidrógeno y oxígeno"
3. $1 < 2$
4. $2 = 1 + 1$
5. $2 * 3 = 6$

Ahora bien, los siguientes son ejemplos de proposiciones lógicas falsas:

1. "La Tierra es plana"
2. "Los perros hablan español"
3. $1 > 2$
4. $2 * 3 = 0$
5. $2 - 2 = 2$

Sin embargo, no toda expresión es una proposición lógica. Por ejemplo: “El sol”, “el agua”, $1 + 1$, etc., no son proposiciones lógicas, porque no se les puede asignar un valor de verdad; no son ciertas, pero tampoco son falsas.

Las proposiciones lógicas, o simplemente **proposiciones**, son expresiones que sólo pueden tener uno de dos posibles valores de verdad: Verdadero (denotado como V) o Falso (denotado como F).

Al igual que con las variables en álgebra, podemos utilizar letras minúsculas para representar proposiciones lógicas: por ejemplo: p, q, r, pueden representar proposiciones lógicas. En adelante vamos a utilizar el símbolo $\equiv$ (se leé “equivalente a”) para denotar que dos expresiones toman el mismo valor de verdad. Por ejemplo:

$$p \equiv (1 < 2)$$

denota que la proposición p tiene el mismo valor que la proposición $(1 < 2)$, es decir que p tiene el valor de verdad Verdadero:

$$p \equiv V$$

Veamos otros ejemplos:

- Si $q \equiv$ “La Tierra es redonda”, entonces q es verdadera.
- Si $r \equiv (1 = 1)$, entonces r es verdadera.
- Si $s \equiv (1 = 0)$, entonces s es falsa.

Así como con los números reales se tienen ciertas operaciones, como la suma y la resta, que reciben uno o dos números y regresan otro número; así también tenemos operaciones lógicas que reciben una o dos proposiciones lógicas y regresan un valor de verdad. Veamos estas nuevas operaciones.

12.1.2. Operaciones lógicas

Negación lógica

La operación de **negación lógica** de una proposición a (también conocida como **operación NOT**) se denota por el símbolo $\neg a$ y es similar a la operación de $-a$ en álgebra.

La operación $\neg p$, se leé como “no p”, representa el cambio al otro valor de verdad diferente al que tiene la proposición p. Por ejemplo si p es verdadera, entonces $\neg p$ es falsa; y si p es falsa, entonces $\neg p$ es verdadera. La tabla 12.1 presenta el comportamiento de esta operación. Aprovechando esta operación podemos decir que: $\neg F \equiv V$ (se leé como “no F es equivalente a V”) y $\neg V \equiv F$ (“no V es equivalente a F”).

Disyunción lógica

La operación de **disyunción lógica** (también conocida como **Operación OR**), se denota por el símbolo $\vee$, y es similar a la operación de suma en álgebra; ahora requiere dos proposiciones: una a su izquierda y otra a la derecha.

p	$\neg p$
F	V
V	F

Tabla 12.1: Tabla de verdad de la operación de negación lógica.

p	q	$p \vee q$	$p \wedge q$	$p \rightarrow q$
F	F	F	F	V
F	V	V	F	V
V	F	V	F	F
V	V	V	V	V

Tabla 12.2: Tablas de verdad de las operaciones lógicas: disyunción ($\vee$), conjunción ($\wedge$) e implicación ($\rightarrow$).

La expresión $p \vee q$ se leé como “p o q” o bien como “p OR q”, representa la operación lógica OR de las proposiciones p y q. El resultado de la operación es V si p **o** q o ambas son verdaderas, y F en otro caso. La tabla 12.2 presenta el comportamiento de esta operación para cada posible combinación de p y q, una posibilidad por renglón. La expresión lógica: $r \equiv p \vee q$, se leé como “r es equivalente a p o q”, o bien como “r es equivalente a p OR q”.

Conjunción lógica

La operación de **conjunción lógica** (también conocida como **operación AND**), se denota por el símbolo $\wedge$, y es similar a la operación de multiplicación en álgebra; también requiere dos proposiciones: una a su izquierda y otra a la derecha.

La expresión $p \wedge q$ se leé como “p y q” o “p AND q”, representa la operación lógica AND de las proposiciones p y q. El resultado de la operación es V si p **y** q son verdaderas, y F en otro caso. La tabla 12.2 incluye una columna para representar el resultado de esta operación. La expresión lógica: $r \equiv p \wedge q$, se leé como “r es equivalente a p y q”, o bien como “r es equivalente a p AND q”.

Implicación lógica

La operación de **implicación lógica** se denota por el símbolo $\rightarrow$, y también requiere dos proposiciones: una a su izquierda y otra a la derecha.

La expresión $p \rightarrow q$ representa la implicación lógica de las proposiciones p y q. El resultado de la operación es F cuando ocurre que $p \equiv V$ y $q \equiv F$, y V en otro caso. La tabla 12.2 incluye una columna para representar el resultado de esta operación.

La expresión lógica: $p \rightarrow q$, se leé como “p implica q” o también como “SI p ENTONCES q” y se utiliza muy frecuentemente para expresar conocimiento.

Por ejemplo, sea $p \equiv$ “estudias mucho álgebra” y $q \equiv$ “apruebas el examen de álgebra”. Si un profesor nos dice que es verdadera la implicación $p \rightarrow q$, es decir:

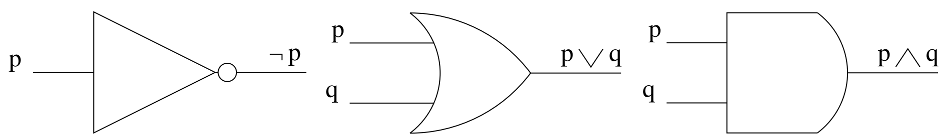
SI p ENTONCES q

SI "estudias mucho álgebra" ENTONCES "apruebas el examen de álgebra"

El profesor nos habrá dicho la verdad cuando ocurre que $p \equiv V$ y $q \equiv V$. Sin embargo, cuando $p \equiv F$, sin importar el valor de q, el profesor no nos ha mentido. El profesor nos mintió (el resultado de la implicación es falso) precisamente cuando $p \equiv V$ y ocurre que $q \equiv F$. Es decir, cuando ocurre que "estudias mucho álgebra" pero "no apruebas el examen de álgebra". Este es el sentido de la tabla de verdad de la implicación.

12.1.3. Ejemplos de expresiones lógicas

Es importante mencionar que el funcionamiento de las computadoras y una enorme cantidad de dispositivos electrónicos están basados en el uso de miles o millones de dispositivos que implementan las operaciones lógicas que veremos enseguida: NOT, OR y AND. En estos dispositivos, usualmente el valor de F se representa por un nivel bajo de voltaje (como 0 volts) y el valor V se representa por un nivel alto de voltaje (como 5 volts). Así un dispositivo o compuerta NOT recibe una entrada y tiene una salida, mientras que las compuertas OR y AND reciben dos entradas y tienen una salida. La figura 12.1 muestra las tres compuertas lógicas.



(a) NOT (b) OR (c) AND

Figura 12.1: Compuertas lógicas.

De manera similar a las operaciones aritméticas, las operaciones lógicas se pueden combinar para formar expresiones compuestas, donde los paréntesis indican que operaciones se hacen primero. Veamos los siguientes ejemplos, asumiendo que todas las letras minúsculas denotan proposiciones lógicas:

- $v \equiv (p \wedge q) \wedge r$

  En la figura 12.2 se muestra el uso de compuertas AND para calcular el valor de v.
- $v \equiv (\neg p \vee q) \wedge r$
- $v \equiv (\neg p) \vee (\neg q)$
- $v \equiv ((\neg p) \vee (\neg q)) \wedge (r \wedge s)$

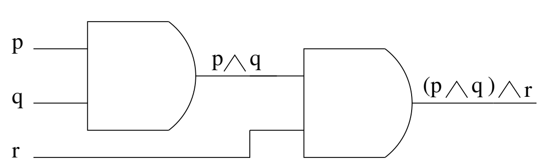


Figura 12.2: La expresión $(p \wedge q) \wedge r$ implementada con compuertas lógicas AND.

Si no se ponen paréntesis, se realizan primero las operaciones NOT, después las operaciones AND, después las operaciones OR y al final las implicaciones. Por ejemplo:

$$\begin{aligned} p \vee q \wedge r &\equiv p \vee (q \wedge r) \\ p \wedge q \vee \neg r \wedge s &\equiv (p \wedge q) \vee ((\neg r) \wedge s) \\ p \vee q \rightarrow r &\equiv (p \vee q) \rightarrow r \\ \neg p \vee q \rightarrow r \vee s &\equiv ((\neg p) \vee q) \rightarrow (r \vee s) \end{aligned}$$

12.1.4. Propiedades de las operaciones lógicas

Sean p, q y r proposiciones lógicas. El lector puede comprobar fácilmente que se cumplen las siguientes propiedades, al tener en cuenta las tablas de verdad de las operaciones involucradas (tablas 12.1 y 12.2).

- **Leyes conmutativas**:

$$p \vee q \equiv q \vee p \tag{12.1}$$
$$p \wedge q \equiv q \wedge p \tag{12.2}$$

- **Leyes asociativas**:

$$(p \vee q) \vee r \equiv p \vee (q \vee r) \tag{12.3}$$
$$(p \wedge q) \wedge r \equiv p \wedge (q \wedge r) \tag{12.4}$$

- **Ley de doble negación**:

$$\neg(\neg p) \equiv p \tag{12.5}$$

- **Leyes de identidad**:

$$p \vee F \equiv p \tag{12.6}$$
$$p \wedge V \equiv p \tag{12.7}$$

- **Leyes de dominación**:

$$p \vee V \equiv V \tag{12.8}$$
$$p \wedge F \equiv F \tag{12.9}$$

- **Leyes de idempotencia**:

$$p \vee p \equiv p \tag{12.10}$$
$$p \wedge p \equiv p \tag{12.11}$$

- **Leyes de complementación**:

$$p \vee (\neg p) \equiv V \tag{12.12}$$
$$p \wedge (\neg p) \equiv F \tag{12.13}$$

p	q	$p \wedge q$	$\neg(p \wedge q)$	$\neg p$	$\neg q$	$(\neg p) \vee (\neg q)$
F	F	F	V	V	V	V
F	V	F	V	V	F	V
V	F	F	V	F	V	V
V	V	V	F	F	F	F

Tabla 12.3: Tabla de verdad para demostrar la segunda ley de D'Morgan. Observe que la columna de $\neg(p \wedge q)$ (cuarta columna) y la columna de $(\neg p) \vee (\neg q)$ (la última columna) son idénticas, en los cuatro renglones.

p	q	$p \wedge q$	$\neg(p \wedge q)$	$\neg p$	$\neg q$	$(\neg p) \vee (\neg q)$
0	0	0	1	1	1	1
0	1	0	1	1	0	1
1	0	0	1	0	1	1
1	1	1	0	0	0	0

Tabla 12.4: Tabla de verdad para demostrar la segunda ley de D'Morgan utilizando 0s y 1s. Un 1 representa a V y un 0 representa a F.

- **Leyes distributivas**:

$$p \vee (q \wedge r) \equiv (p \vee q) \wedge (p \vee r) \tag{12.14}$$
$$p \wedge (q \vee r) \equiv (p \wedge q) \vee (p \wedge r) \tag{12.15}$$

En este caso, a diferencias del álgebra numérica, existen dos propiedades distributivas.

- **Leyes de D'Morgan**:

$$\neg(p \vee q) \equiv (\neg p) \wedge (\neg q) \tag{12.16}$$
$$\neg(p \wedge q) \equiv (\neg p) \vee (\neg q) \tag{12.17}$$

Como ejercicio probemos la segunda de estas leyes, construyendo la tabla de verdad 12.3 que contiene los posibles valores que pueden tomar las variables p y q y las expresiones: $\neg(p \wedge q)$ y $(\neg p) \vee (\neg q)$. Como la columna con el encabezado $\neg(p \wedge q)$ y la columna con el encabezado $(\neg p) \vee (\neg q)$ son idénticas, en las cuatro combinaciones de los valores de p y q, podemos concluir que ambas expresiones son equivalentes lógicamente. Es decir:

$$\neg(p \wedge q) \equiv (\neg p) \vee (\neg q)$$

En ocasiones también es frecuente utilizar un 0 para referirse a F y un 1 para representar a V, como se muestra en la tabla 12.4. Esta representación tiene la ventaja de que los valores de p y q siguen una numeración binaria: 00, 01, 10 y 11, una combinación por renglón. En el caso de 3 variables, la tabla tendría 8 renglones: 000, 001, 010, 011, 100, 101, 110 y 111.

- **Leyes de D'Morgan extendidas**:

$$\neg(p_1 \vee p_2 \vee \ldots \vee p_n) \equiv (\neg p_1) \wedge (\neg p_2) \wedge \ldots \wedge (\neg p_n) \tag{12.18}$$
$$\neg(p_1 \wedge p_2 \wedge \ldots \wedge p_n) \equiv (\neg p_1) \vee (\neg p_2) \vee \ldots \vee (\neg p_n) \tag{12.19}$$

Como ejercicio, veamos el siguiente caso que involucra tres proposiciones: p_1, p_2 y p_3 y una doble aplicación de la ley D'Morgan para llegar a la versión extendida de la ley D'Morgan:

$$\begin{aligned}
\neg(p_1 \vee p_2 \vee p_3) &\equiv \neg(p_1 \vee p_2 \vee p_3) \\
\neg(p_1 \vee p_2 \vee p_3) &\equiv \neg(p_1 \vee (p_2 \vee p_3)) \\
\neg(p_1 \vee p_2 \vee p_3) &\equiv \neg p_1 \wedge \neg(p_2 \vee p_3) \\
\neg(p_1 \vee p_2 \vee p_3) &\equiv \neg p_1 \wedge \neg p_2 \wedge \neg p_3
\end{aligned}$$

- **Propiedades relativas a la implicación:**

$$p \to q \equiv (\neg p) \vee q \tag{12.20}$$

$$p \to q \equiv (\neg q) \to (\neg p) \tag{12.21}$$

  Utilizando la técnica de construir la tabla de verdad se pueden demostrar fácilmente estas propiedades o leyes.

Enseguida utilicemos estos conceptos de proposiciones lógicas y sus operaciones para abordar el tema de conjuntos.

12.2. Conjuntos

En nuestra vida cotidiana utilizamos con frecuencia **conjuntos** para referirnos a una colección de objetos distintos. Enseguida se presentan algunos ejemplos:

- El conjunto V de las vocales: $V = \{a, e, i, o, u\}$. Decimos que a, e, i, o, u son **elementos del conjunto** V o que pertenecen al conjunto V.
- El conjunto D de los dígitos decimales: $D = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$.
- El conjunto N de los números naturales: $N = \{1, 2, 3, \ldots\}$. Donde los tres puntos seguidos representa que sigue el 4, el 5, el 6, etc.
- El conjunto Z de los números enteros: $Z = \{\ldots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots\}$
- El conjunto Z^- de los números enteros negativos: $Z^- = \{\ldots - 3, -2, -1\}$
- El **conjunto vacío** es el conjunto que no tiene elementos y se denota por el símbolo especial $\emptyset$, o bien $\{\}$.

Observe que se utilizan las letras mayúsculas para referirse a conjuntos y letras minúsculas para referirse a elementos del conjunto. Para representar que el elemento a **pertenece** al conjunto V se utiliza un símbolo especial de pertenencia :

$$a \in V$$

La expresión $b \in V$ se leé como "b pertenece al conjunto V". Si aprovechamos nuestros conocimientos de lógica, decimos $a \in V$ es una proposición lógica verdadera. Sin embargo, $b \in V$ es falsa, puesto que no existe el elemento b en el conjunto V de las vocales. En este caso, podemos emplear el símbolo de no pertenencia:

$$b \notin V$$

La expresión $b \notin V$ se leé como “b no pertenece al conjunto V” y es equivalente a la operación de negación lógica sobre la expresión de pertenencia:

$$b \notin V \equiv \neg(b \in V)$$

Podemos también expresar conjuntos definiendo una cierta propiedad que deben cumplir sus elementos. Por ejemplo:

- El conjunto M de los números naturales menores que 100: $M = \{x \in N \mid (x < 100)\}$.

  Esta representación se leé como “el conjunto M formado por los números naturales x, tal que x es menor que cien” e indica que el conjunto M se integra por todos aquellos elementos x que pertenecen al conjunto N de los números naturales y que cumplen la proposición lógica $(x < 100)$. El resultado es el conjunto $M = \{1, 2, \ldots, 99\}$.

- El conjunto D de los dígitos decimales: $D = \{x \in Z \mid (x \geq 0) \wedge (x \leq 9)\}$.

  En este caso el conjunto D se integra por todos aquellos elementos x que pertenecen al conjunto Z de los números enteros y que además es cierta la proposición lógica $(x \geq 0) \wedge (x \leq 9)$. El resultado es el mismo conjunto D mencionado anteriormente.

- El conjunto Q de los números racionales: $Q = \{x \in R \mid (x = \frac{n}{d}) \wedge (n \in Z) \wedge (d \in Z) \wedge (d \neq 0)\}$.

  Es decir, el conjunto Q se integra por todos aquellos elementos x que pertenecen al conjunto de los números reales R, y que además se pueden expresar como la división de dos enteros, siendo el denominador diferente de cero.

Para representar que un conjunto se integra por ciertos elementos x que pertenecen a un conjunto **Universo** y que además cumplen una propiedad representada por $p(x)$, se utilizan frecuentemente las siguientes notaciones:

$$A = \{x \in U \mid p(x)\} \quad (12.22)$$

$$A = \{x \mid p(x)\} \quad (12.23)$$

En la última representación se omite la mención al conjunto Universo, se considera implícita. El conjunto universo se refiere al conjunto que contiene todos los posibles elementos en los cuales estemos interesados, podrían ser números, personas, seres vivos, etc.

En la siguiente sección veremos que a $p(x)$ se le denomina predicado y corresponde a una función proposicional, una función que depende del valor de x para que se vuelva una proposición lógica.

Un conjunto A es una colección no ordenada de objetos distintos $a_1,\ a_2,\ a_3,\ \ldots\ a_n$ y se representa como:

$$A = \{a_1,\ a_2,\ a_3,\ \ldots\ a_n\}$$

12.2.1. Operaciones sobre conjuntos

Unión de dos conjuntos

La **unión de dos conjuntos** A y B, denotada por $A \cup B$ (se leé como "A unión B"), es un nuevo conjunto que contiene a todos los elementos contenidos en A ó en B. Utilizando nuestros conocimientos de lógica, podemos expresar la unión de los conjuntos A y B como sigue:

$$A \cup B = \{x \in U \mid (x \in A) \vee (x \in B)\} \tag{12.24}$$

Decimos que el nuevo conjunto contiene a todos aquellos elementos x que pertenecen al **conjunto universo** y que cumplen la condición de que x pertenece a A o x pertenece a B. Es decir, el elemento x debe tomar cierto valor tal que la expresión lógica $(x \in A) \vee (x \in B) \equiv V$, para que ese valor pertenezca al conjunto de la unión.

Por ejemplo, si $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ y $B = \{5, 6, 7, 8\}$, entonces:

$$A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$$

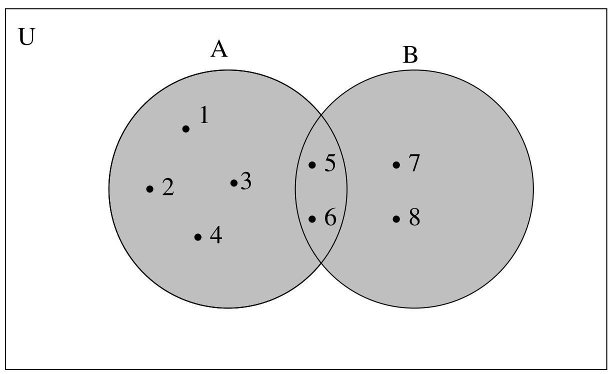


Figura 12.3: La región sombreada indica los elementos que pertenecen al conjunto $A \cup B$.

Con el apoyo de los **diagramas de Venn Euler** se puede visualizar fácilmente esta operación de unión. La figura 12.3 muestra el conjunto universo como un gran rectángulo que contiene todos los posibles elementos de cualquier conjunto. Los conjuntos A y B se representan como círculos que contienen a sus elementos. Así, el conjunto A contiene a los elementos 1, 2, 3, 4, 5 y 6. El conjunto B contiene a los elementos 5, 6, 7 y 8. El conjunto unión de A y B es el conjunto representado por la región sombreada. Es decir, el resultado es un nuevo conjunto que contiene a todos los elementos de A y también a todos los elementos de B. Note que los elementos en el nuevo conjunto sólo aparecen una vez, ya que por definición un conjunto tiene elementos distintos.

Intersección de dos conjuntos

La **intersección de dos conjuntos** A y B, denotada por $A \cap B$ (se leé como "A intersección B"), es un nuevo conjunto que contiene a todos los elementos comunes que pertenecen tanto a A como a B. Utilizando nuestros conocimientos de lógica, podemos expresar la intersección de los conjuntos A y B como sigue:

$$A \cap B = \{x \in U \mid (x \in A) \wedge (x \in B)\} \tag{12.25}$$

Decimos que el nuevo conjunto contiene a todos aquellos elementos x que pertenecen al **conjunto universo** y que cumplen la condición de que x pertenece a A y x pertenece a B. Es decir, el elemento x debe tomar cierto valor tal que la expresión lógica $(x \in A) \wedge (x \in B) \equiv V$, para que ese valor pertenezca al conjunto de la intersección. Por ejemplo, si $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ y $B = \{5, 6, 7, 8\}$, entonces:

$$A \cap B = \{5, 6\}$$

La Figura 12.4 muestra el conjunto intersección de A y B como el conjunto de la región sombreada. Es decir, el resultado es un nuevo conjunto que contiene a todos los elementos comunes al conjunto A y al conjunto B.

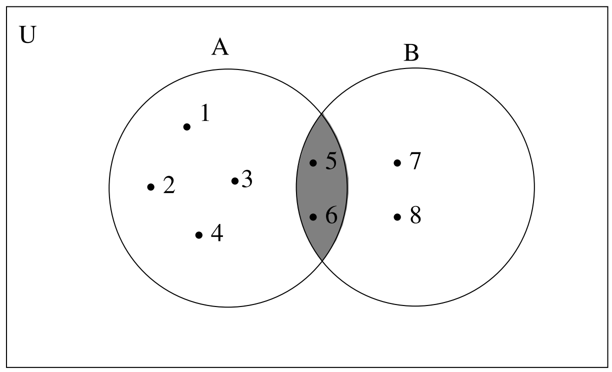


Figura 12.4: La región sombreada indica los elementos que pertenecen al conjunto $A \cap B$.

Cuando sucede que $A \cap B = \emptyset$, decimos que los conjuntos A y B son **conjuntos disjuntos**.

Cardinalidad de un conjunto

La **cardinalidad** de un conjunto S se denota mediante $|S|$ (se leé como "cardinalidad de S") y corresponde a la cantidad de elementos que tiene el conjunto. Por ejemplo:

- Si $A = \{a, b, c\}$, entonces $|A| = 3$.
- $|\emptyset| = 0$. La cardinalidad del conjunto vacío es 0.
- En el caso del conjunto de números naturales, N, su cardinalidad es infinita.

Cardinalidad de la unión de dos conjuntos

Es interesante preguntarse como se puede calcular la **cardinalidad de la unión de dos conjuntos**. En los ejemplos de unión e intersección de conjuntos presentados anteriormente, tenemos que $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, $B = \{5, 6, 7, 8\}$, $A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$ y $A \cap B = \{5, 6\}$. Veamos sus cardinalidades: $|A| = 6$, $|B| = 4$, $|A \cup B| = 8$ y $|A \cap B| = 2$.

Si sumamos $|A|$ y $|B|$ habremos contabilizado dos veces la parte común. Para resolver este exceso, podemos restar la cantidad de elementos comunes, $|A \cap B|$. Es decir:

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B| \tag{12.26}$$

De esta forma obtenemos el resultado correcto para nuestro ejemplo:

$$
\begin{aligned}
|A \cup B| &= |A| + |B| - |A \cap B| \\
|A \cup B| &= 6 + 4 - 2 \\
|A \cup B| &= 8
\end{aligned}
$$

Si observamos nuevamente la figura 12.3, podemos darnos cuenta que el razonamiento es correcto.

Complemento de un conjunto

El **complemento de un conjunto** A, denotada por A^c (se leé como “A complemento”), es un nuevo conjunto que contiene a todos los elementos que no pertenecen al conjunto A. Es decir:

$$A^c = \{x \in U \mid x \notin A\} \tag{12.27}$$

Por ejemplo, si $U = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ y $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, entonces:

$$A^c = \{0, 7, 8, 9\}$$

La Figura 12.5 muestra el conjunto A^c como la región sombreada. Es decir, el conjunto A^c contiene todos los elementos de U que no estén en A.

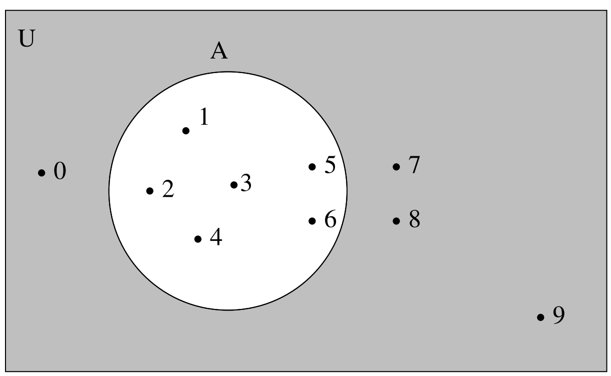


Figura 12.5: La región sombreada indica los elementos que pertenecen al conjunto A^c.

Resta de dos conjuntos

La **resta o diferencia de dos conjuntos** A y B denotada por $A - B$ (se leé como “A menos B”), es un nuevo conjunto que contiene a todos los elementos que pertenecen al conjunto A y no pertenecen al conjunto B. Es decir:

$$A - B = \{x \in U \mid (x \in A) \wedge (x \notin B)\} \tag{12.28}$$

Por ejemplo, si $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ y $B = \{5, 6, 7, 8\}$, entonces:

$$A - B = \{1, 2, 3, 4\}$$

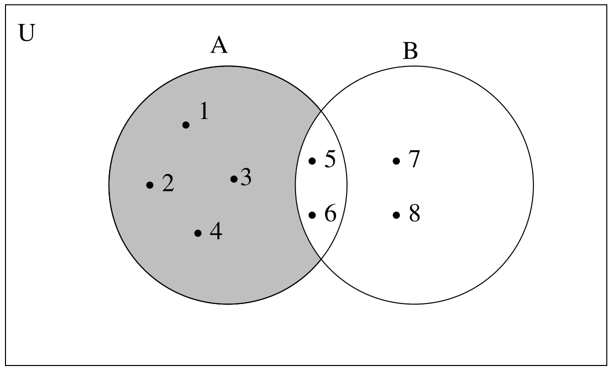


Figura 12.6: La región sombreada indica los elementos que pertenecen al conjunto $A - B$.

La Figura 12.6 muestra el conjunto $A - B$ como la región sombreada. Es decir, el conjunto $A - B$ contiene al conjunto A quitando los elementos que pertenecen al conjunto B.

Podemos desarrollar un poco la definición de la resta (ecuación 12.28) para encontrar otra forma de calcular la resta:

$$\begin{aligned} A - B &= \{x \in U \mid (x \in A) \wedge (x \notin B)\} \\ A - B &= \{x \in U \mid (x \in A) \wedge (x \in B^c)\} \\ A - B &= A \cap B^c \end{aligned} \tag{12.29}$$

Donde el primer cambio se realizó en virtud de que si $x \notin B$, entonces por la definición de B^c, se infiere que $x \in B^c$. El segundo cambio se infiere de la definición de intersección, solo que en lugar de B, aparece B^c.

Para continuar en el desarrollo de la teoría de conjuntos nos hace falta avanzar un poco más en el tema de lógica, objeto de la siguiente sección.

12.3. Lógica de predicados

La expresión $x > 3$ se vuelve una proposición lógica sólo cuando x toma cierto valor. Decimos que $x > 3$ es una **función proposicional** o **predicado**. Utilizando el formato para especificar una función, podemos decir, por ejemplo, que el predicado $p(x)$ se define como sigue:

$$p(x) \equiv (x \geq 3)$$

Veamos que pasa cuando x toma algunos valores:

- $x = 0$.
  $p(0) \equiv (0 \geq 3),\ p(0) \equiv F.$
- $x = 3$.
  $p(3) \equiv (3 \geq 3),\ p(3) \equiv V.$
- $x = 4$.
  $p(4) \equiv (4 \geq 3),\ p(4) \equiv V.$

Veamos otro ejemplo. El predicado q(x) definido como sigue:

$$q(x) \equiv (x^2 \geq 4)$$

Veamos que pasa cuando x toma algunos valores:

- $x = 1$.
  $q(1) \equiv (1^2 \geq 4),\ q(1) \equiv (1 \geq 4),\ q(1) \equiv F.$
- $x = 2$.
  $q(2) \equiv (2^2 \geq 4),\ q(2) \equiv (4 \geq 4),\ q(2) \equiv V.$
- $x = 3$.
  $q(3) \equiv (3^2 \geq 4), q\ (3) \equiv (9 \geq 4),\ q(3) \equiv V.$

Veamos ahora un ejemplo que involucra a dos variables, el predicado $r(x, y)$ definido como:

$$r(x, y) \equiv (x = y)$$

Veamos que pasa cuando x y y toman algunos valores:

- $r(1, 2) \equiv (1 = 2),\ r(1, 2) \equiv F.$
- $r(1, 1) \equiv (1 = 1),\ r(1, 1) \equiv V.$
- $r(2, 2) \equiv (2 = 2),\ r(2, 2) \equiv V.$

Un predicado $p(x)$ es una expresión que se vuelve una proposición lógica cuando la variable de entrada x toma un valor.

12.3.1. Expresiones lógicas cuantificadas

En muchas ocasiones se requiere saber si un predicado $p(x)$ es cierto para todos los valores que puede tomar la variable x.

Sea D el conjunto de valores posibles que puede asumir la variable x, por ejemplo $D = \{1, 2, 3\}$. Si deseamos calcular si el predicado $p(x)$ es cierto para todos los valores que puede asumir la variable x, lo podemos hacer de la siguiente forma:

$$v \equiv p(1) \wedge p(2) \wedge p(3)$$

Solamente cuando $p(1) \equiv V$, $p(2) \equiv V$ y $p(3) \equiv V$, entonces el resultado de las conjunciones sera V, y por lo tanto $v \equiv V$. En ese caso decimos que el predicado $p(x)$ se cumple para todo x en el **dominio** D.

Cuantificador universal

Para escribir en forma simplificada que el predicado $p(x)$ se cumple para todo x, se utiliza un símbolo especial: $\forall$, conocido como **cuantificador universal**:

$$v \equiv \forall_{x \in D}\ p(x)$$

La expresión $\forall_{x \in D}\ p(x)$ se leé como "para todo x en D se cumple p de x". Es decir, el símbolo $\forall$ es una abreviatura de las operaciones $\wedge$ con los predicados de todos los posibles valores de x, en el dominio D:

$$v \equiv \forall_{x \in D}\ p(x) \tag{12.30}$$
$$v \equiv p(1) \wedge p(2) \wedge p(3) \tag{12.31}$$

El resultado es falso cuando existe al menos un valor de x donde $p(x) \equiv F$. Por ejemplo, si solamente $p(1) \equiv F$, tenemos:

$$\begin{aligned} v &\equiv p(1) \wedge p(2) \wedge p(3) \\ v &\equiv F \wedge V \wedge V \\ v &\equiv (F \wedge V) \wedge V \\ v &\equiv F \wedge V \\ v &\equiv F \end{aligned}$$

Cuantificador existencial

Por otro lado, si deseamos calcular si el predicado $p(x)$ es cierto para al menos uno de los valores que puede asumir la variable x, lo podemos hacer de la siguiente forma:

$$v \equiv p(1) \vee p(2) \vee p(3)$$

Solamente cuando $p(1) \equiv V$ ó $p(2) \equiv V$ ó $p(3) \equiv V$, entonces el resultado de las disyunciones será V, y por lo tanto $v \equiv V$. En ese caso decimos que existe al menos un valor de x que hace que el predicado $p(x)$ sea V.

Para escribir en forma simplificada que el predicado $p(x)$ se cumple para al menos un valor de x, se utiliza un símbolo especial: $\exists$, conocido como **cuantificador existencial**:

$$v \equiv \exists_{x \in D}\ p(x)$$

La expresión $\exists_{x \in D}\ \ p(x)$ se leé como "existe algún x en D que cumple p de x". Es decir, el símbolo $\exists$ es una abreviatura de las operaciones $\vee$ con los predicados de todos los posibles valores de x, en el dominio D:

$$v \equiv \exists_{x \in D}\ p(x) \tag{12.32}$$
$$v \equiv p(1) \vee p(2) \vee p(3) \tag{12.33}$$

Es decir, la expresión cuantificada existencialmente es falsa cuando para todos los valores de x se tiene $p(x) \equiv F$ y es verdadera cuando existen uno o más valores de x en los cuales se cumple que $p(x) \equiv V$. Por ejemplo, si solamente $p(1) \equiv V$, tenemos:

$$\begin{aligned} v &\equiv p(1) \vee p(2) \vee p(3) \\ v &\equiv V \vee F \vee F \\ v &\equiv (V \vee F) \vee F \\ v &\equiv V \vee F \\ v &\equiv V \end{aligned}$$

Negación de expresiones cuantificadas

Es interesante ver que sucede cuando se niegan expresiones cuantificadas. Por ejemplo:

- Negación de una expresión cuantificada universalmente:

$$\begin{aligned} \neg(\forall_{x\in D}\ p(x)) &\equiv \neg(\forall_{x\in D}\ p(x)) \\ \neg(\forall_{x\in D}\ p(x)) &\equiv \neg(p(1) \wedge p(2) \wedge p(3)) \\ \neg(\forall_{x\in D}\ p(x)) &\equiv (\neg p(1)) \vee (\neg p(2)) \vee (\neg p(3)) \\ \neg(\forall_{x\in D}\ p(x)) &\equiv \exists_{x\in D}\ (\neg p(x)) \end{aligned} \tag{12.34}$$

  Donde para deducir esta expresión se ha aplicado la ley de D'Morgan extendida. La expresión cuantificada universalmente es falsa (y su negación es verdadera) cuando existe uno o más valores de x que hacen que $p(x) \equiv F$.

- Negación de una expresión cuantificada existencialmente:

$$\begin{aligned} \neg(\exists_{x\in D}\ p(x)) &\equiv \neg(\exists_{x\in D}\ p(x)) \\ \neg(\exists_{x\in D}\ p(x)) &\equiv \neg(p(1) \vee p(2) \vee p(3)) \\ \neg(\exists_{x\in D}\ p(x)) &\equiv (\neg p(1)) \wedge (\neg p(2)) \wedge (\neg p(3)) \\ \neg(\exists_{x\in D}\ p(x)) &\equiv \forall_{x\in D}\ (\neg p(x)) \end{aligned} \tag{12.35}$$

  Es decir, La expresión cuantificada existencialmente es falsa (y su negación es verdadera) cuando para todos valores de x se tiene $p(x) \equiv F$.

Cuantificadores. Sea $D = \{d_1, d_2, ...d_n\}$ el conjunto de valores que puede tomar la variable x.
El cuantificador universal, denotado como $\forall$, de un predicado $p(x)$ expresa que el predicado es verdadero para todos los valores de x. Es decir:

$$\forall_{x \in D} \;\; p(x) \quad \equiv \quad p(d_1) \wedge p(d_2) \wedge \ldots \wedge p(d_n) \tag{12.36}$$

El cuantificador existencial, denotado como $\exists$, de un predicado $p(x)$ expresa que el predicado es verdadero para al menos un valor de x. Es decir:

$$\exists_{x \in D} \;\; p(x) \quad \equiv \quad p(d_1) \vee p(d_2) \vee \ldots \vee p(d_n) \tag{12.37}$$

Al negar expresiones cuantificadas se tiene lo siguiente:

$$\neg(\forall_{x \in D}\, p(x)) \quad \equiv \quad \exists_{x \in D}\, (\neg p(x)) \tag{12.38}$$
$$\neg(\exists_{x \in D}\, p(x)) \quad \equiv \quad \forall_{x \in D}\, (\neg p(x)) \tag{12.39}$$

Ejemplos de expresiones cuantificadas

Mediante expresiones cuantificadas podemos expresar claramente algunos conocimientos en matemáticas:

- El producto de cualquier número por 0 es 0:
$$\forall_{x \in R} \;\; (x * 0 = 0)$$
- El 0 es el neutro aditivo:
$$\forall_{x \in R} \;\; (x + 0 = x)$$
- El 1 es el neutro multiplicativo:
$$\forall_{x \in R} \;\; (x * 1 = x)$$
- Cada número real tiene un inverso aditivo:
$$\forall_{x \in R}\, (\exists_{y \in R} \;\; (x + y = 0))$$

  Esta expresión representa que para cualquier número real x existe un número real y que hace verdadera la igualdad $(x + y = 0)$. Veamos con detalle esta expresión que contiene **cuantificadores anidados**, una expresión cuantificada dentro de otra expresión cuantificada. Veamos que ocurre cuando la variable x toma algunos valores:

$$\begin{aligned}\forall_{x\in R}(\exists_{y\in R}\ \ (x+y=0)) \ \equiv\ & \ldots \wedge \\ & (\exists_{y\in R}\ \ (-2+y=0)) \wedge \\ & (\exists_{y\in R}\ \ (-1+y=0)) \wedge \\ & (\exists_{y\in R}\ \ (\ \ 0+y=0)) \wedge \\ & (\exists_{y\in R}\ \ (\ \ 1+y=0)) \wedge \\ & (\exists_{y\in R}\ \ (\ \ 2+y=0)) \wedge \\ & \ldots\end{aligned}$$

Para ver que ocurre, veamos por ejemplo, la segunda de estas expresiones con el cuantificador existencial, cuando y toma algunos valores:

$$\begin{aligned}(\exists_{y\in R}\ \ (-1+y=0)) &\equiv \ldots \vee (-1+(-1)=0) \vee (-1+0=0) \vee (-1+1=0) \vee \ldots \\ (\exists_{y\in R}\ \ (-1+y=0)) &\equiv \ldots \vee F \vee F \vee V \vee \ldots \\ (\exists_{y\in R}\ \ (-1+y=0)) &\equiv V\end{aligned}$$

Lo mismo ocurre para todas las demás expresiones, son verdaderas, porque siempre existe un número y que sumado a x el resultado es 0. De -2 es 2, de -1 es 1, de 0 es 0, de 1 es -1, de 2 es -2, etc. Por lo tanto, el resultado final de la expresión es:

$$\begin{aligned}\forall_{x\in R}(\exists_{y\in R}\ \ (x+y=0)) &\equiv \ldots \wedge V \wedge V \wedge V \wedge V \wedge V \wedge \ldots \\ \forall_{x\in R}(\exists_{y\in R}\ \ (x+y=0)) &\equiv V\end{aligned}$$

- La suma de números reales es conmutativa:

  $$\forall_{x\in R}(\forall_{y\in R}\ \ (x+y=y+x))$$

  Esta expresión representa que para cualquier número real x y para cualquier número real y, la propiedad conmutativa: $(x+y=y+x)$ es verdadera.

  En este caso, también se podría haber utilizando el predicado $p(x,y) \equiv (x+y=y+x)$ para expresar la propiedad conmutativa:

  $$\forall_{x\in R}(\forall_{y\in R}\ \ p(x,y))$$

Con estos elementos adicionales de lógica, volvamos a los conjuntos.

12.4. Operaciones adicionales de conjuntos

A continuación se presentan algunas operaciones adicionales sobre conjuntos.

12.4.1. Subconjunto

Definamos que un conjunto A es **subconjunto** de otro conjunto B, denotado como $A \subseteq B$ (se leé como "A es subconjunto de B") cuando todos los elementos del conjunto A también son elementos del conjunto B.

Observemos que $A \subseteq B$ es una proposición lógica y puede tener el valor V o F. Utilizando nuestros conocimientos anteriores, se puede expresar como:

$$A \subseteq B \equiv \forall_{x \in U} \left((x \in A) \to (x \in B) \right) \tag{12.40}$$

Veamos un ejemplo. Sea el conjunto universo $U = \{1, 2, 3\}$, el conjunto $A = \{1, 2\}$, el conjunto $B = \{1, 2, 3\}$ y calculemos si el conjunto A es subconjunto de B, recordando la tabla de verdad de la implicación lógica ($\to$) y el significado del cuantificador universal ($\forall$):

$$\begin{aligned}
A \subseteq B &\equiv \forall_{x \in U} \left((x \in A) \to (x \in B) \right) \\
A \subseteq B &\equiv ((1 \in A) \to (1 \in B)) \wedge ((2 \in A) \to (2 \in B)) \wedge ((3 \in A) \to (3 \in B)) \\
A \subseteq B &\equiv (V \to V) \wedge (V \to V) \wedge (F \to V) \\
A \subseteq B &\equiv V \wedge V \wedge V \\
A \subseteq B &\equiv V
\end{aligned}$$

Lo cual significa que si se cumple que A es subconjunto de B. Usando un diagrama de Venn, la situación sería como se presenta en la figura 12.7. Podemos observar que para que A sea subconjunto de B, A debe estar dentro de B.

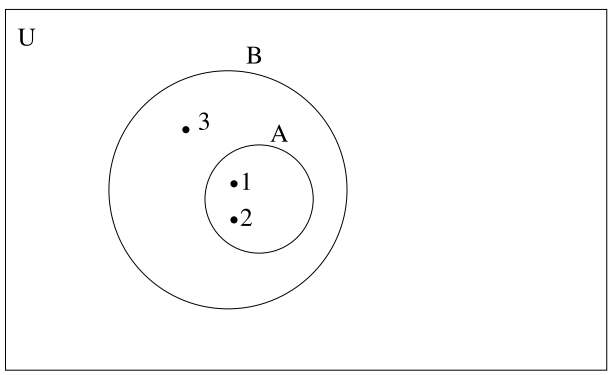


Figura 12.7: El conjunto A es subconjunto del conjunto B.

Es interesante preguntarnos si el conjunto vacío es subconjunto de otro conjunto. Sea el conjunto universo $U = \{1, 2, 3\}$, el conjunto $\emptyset = \{\}$, el conjunto $B = \{1, 2, 3\}$ y calculemos si el conjunto vacío, $\emptyset$, es subconjunto de B:

$$\begin{aligned}
\emptyset \subseteq B &\equiv \forall_{x \in U} \left((x \in \emptyset) \to (x \in B) \right) \\
\emptyset \subseteq B &\equiv ((1 \in \emptyset) \to (1 \in B)) \wedge ((2 \in \emptyset) \to (2 \in B)) \wedge ((3 \in \emptyset) \to (3 \in B)) \\
\emptyset \subseteq B &\equiv (F \to V) \wedge (F \to V) \wedge (F \to V) \\
\emptyset \subseteq B &\equiv V \wedge V \wedge V \\
\emptyset \subseteq B &\equiv V
\end{aligned}$$

Este resultado se obtiene al considerar que el resultado de la implicación $p \rightarrow q$ es V, cuando $p \equiv F$, independientemente del valor de q. Si $B = \emptyset$, habríamos obtenido el mismo resultado. Esta situación se ilustra en la figura 12.8.

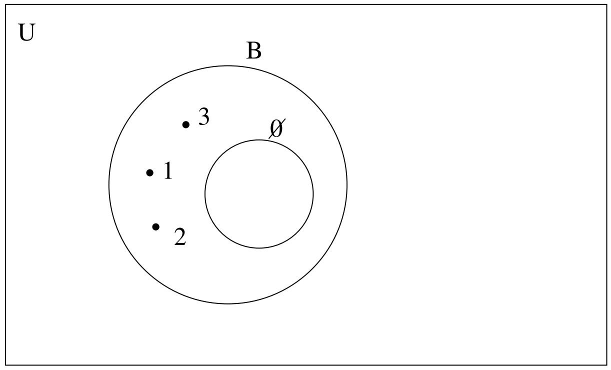


Figura 12.8: El conjunto $\emptyset$ es subconjunto del conjunto B.

El conjunto vacío es subconjunto de cualquier conjunto, inclusive de si mismo.

Sea $A = \{1, 2, 3\}$ y $B = \{1, 2, 3\}$. Se puede comprobar fácilmente que $A \subseteq B$ también es cierta en este caso.

Ahora consideremos el siguiente caso: $A = \{2, 3\}$ y $B = \{1, 2\}$, es decir B no tiene el elemento 3, que si se encuentra en A. Veamos:

$$\begin{aligned}
A \subseteq B &\equiv \forall_{x \in U} \left((x \in A) \rightarrow (x \in B)\right) \\
A \subseteq B &\equiv ((1 \in A) \rightarrow (1 \in B)) \wedge ((2 \in A) \rightarrow (2 \in B)) \wedge ((3 \in A) \rightarrow (3 \in B)) \\
A \subseteq B &\equiv (F \rightarrow V) \wedge (V \rightarrow V) \wedge (V \rightarrow F) \\
A \subseteq B &\equiv V \wedge V \wedge F \\
A \subseteq B &\equiv F
\end{aligned}$$

Para que $A \subseteq B$ sea falsa, basta con tener un solo caso donde la implicación tome la forma $V \rightarrow F$, lo cual ocasiona que dicha implicación tenga como resultado F, y por lo tanto el resultado de todas las conjunciones sea F.

12.4.2. Igualdad de conjuntos

Dos conjuntos son **iguales** si tienen los mismos elementos. Utilizando el concepto aprendido de subconjunto, decimos que los conjuntos A y B son iguales, denotado como $A = B$, si se cumple que $A \subseteq B$ y también que $B \subseteq A$. Es decir, todos los elementos de A están en B y también todos los elementos de B están en A. En forma lógica, la igualdad de los conjuntos A y B se define como:

$$(A = B) \equiv (A \subseteq B) \wedge (B \subseteq A) \tag{12.41}$$

Si $(A = B) \equiv F$, también se dice que $A \neq B$ (se leé como “A no es igual a B”).

12.4.3. Subconjunto propio

Un subconjunto A es un **subconjunto propio** del conjunto B, denotado como $A \subset B$ (se leé como “A es subconjunto propio de B”) si se cumple que A es subconjunto de B y A no es igual a B. Es decir:

$$(A \subset B) \equiv (A \subseteq B) \wedge (A \neq B) \tag{12.42}$$

La figura 12.7 ilustra el caso de que $A \subset B$ es cierto. Se requiere al menos un elemento en B que no esté en A.

El lector puede apreciar la semejanza entre $a \leq b$ y $A \subseteq B$. En el primer caso el número a es menor o igual que el número b; en el segundo caso, el conjunto A se encuentra dentro de B y es más pequeño o igual al conjunto B.

Ocurre lo mismo con $a < b$ y $A \subset B$. En el primer caso el número a es menor que el número b, en el segundo caso, el conjunto A es más pequeño y está dentro del conjunto B (no son iguales).

12.4.4. Conjunto potencia

El **conjunto potencia** de un conjunto A, denotado como $P(A)$ (se leé “Conjunto Potencia de A”) contiene a todos sus posibles subconjuntos. Es decir:

$$P(A) = \{x \in U \mid x \subseteq A\} \tag{12.43}$$

Veamos algunos ejemplos:

- $P(\emptyset) = \{\emptyset\}$. Recuerde que $\emptyset \subseteq \emptyset$.
- $P(\{a\}) = \{\emptyset, \{a\}\}$
- $P(\{a, b\}) = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}\}$
- $P(\{a, b, c\}) = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}, \{a, b, c\}\}$

El lector se puede dar cuenta que si A tiene n elementos, entonces $|P(A)| = 2^n$. Es decir:

$$|P(A)| = 2^{|A|} \tag{12.44}$$

12.5. Propiedades de las operaciones sobre conjuntos

Las operaciones sobre conjuntos tienen propiedades similares a las operaciones lógicas. La unión reemplaza a la disyunción, la intersección reemplaza a la conjunción, el complemento reemplaza a la negación, el conjunto vacío reemplaza a F y el conjunto universo reemplaza a V.

Si A, B y C son conjuntos y U es el conjunto universo, se cumplen las siguientes propiedades:

- **Leyes conmutativas**:

$$A \cup B = B \cup A \tag{12.45}$$
$$A \cap B = B \cap A \tag{12.46}$$

- **Leyes asociativas**:

$$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C) \tag{12.47}$$
$$(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C) \tag{12.48}$$

- **Ley de doble complemento**:

$$(A^c)^c = A \tag{12.49}$$

- **Leyes de complemento para U y $\emptyset$**:

$$\emptyset^c = U \tag{12.50}$$
$$U^c = \emptyset \tag{12.51}$$

- **Leyes de identidad**:

$$A \cup \emptyset = A \tag{12.52}$$
$$A \cap U = A \tag{12.53}$$

- **Leyes de dominación**:

$$A \cup U = U \tag{12.54}$$
$$A \cap \emptyset = \emptyset \tag{12.55}$$

- **Leyes de idempotencia**:

$$A \cup A = A \tag{12.56}$$
$$A \cap A = A \tag{12.57}$$

- **Leyes de complementación**:

$$A \cup A^c = U \tag{12.58}$$
$$A \cap A^c = \emptyset \tag{12.59}$$

- **Leyes distributivas**:

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup B) \tag{12.60}$$
$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap B) \tag{12.61}$$

- **Leyes de D'Morgan**:

$$(A \cup B)^c = A^c \cap B^c \tag{12.62}$$
$$(A \cap B)^c = A^c \cup B^c \tag{12.63}$$

Como ejercicio probemos la segunda de estas leyes, utilizando una tabla similar a la tabla de verdad que utilizamos en la lógica proposicional. En este caso se llama **tabla de membresía**. La tabla de membresía 12.5 contiene en los encabezados de cada columna un conjunto y está llena de ceros y unos. La tabla

A	B	$A \cap B$	$(A \cap B)^c$	A^c	B^c	$A^c \cup B^c$
0	0	0	1	1	1	1
0	1	0	1	1	0	1
1	0	0	1	0	1	1
1	1	1	0	0	0	0

Tabla 12.5: Tabla de membresía para demostrar la segunda ley de D'Morgan. Observe que la columna de $(A \cap B)^c$ (cuarta columna) es idéntica a la última columna de $A^c \cup B^c$.

contiene cuatro renglones, uno por cada región diferente donde se puede encontrar un posible elemento del conjunto universo.

En el primer renglón se representa a un elemento que no pertenece al conjunto A (representado por un 0 en la columna de A) y tampoco pertenece al conjunto B (representado por un 0 en la columna de B). En este caso, dicho elemento no pertenece al conjunto $A \cap B$ y se anota 0 en dicha columna. Sin embargo, si pertenece al conjunto $(A \cap B)^c$ y se anota 1 en dicha columna. Por otro lado este elemento pertenece a A^c, se anota un 1 en esa columna; y también pertenece a B^c, se anota 1 en esa columna. Finalmente este elemento si pertenece al conjunto $A^c \cup B^c$, anotando 1 en la última columna.

El segundo renglón contiene el caso de un elemento que pertenece a B, pero no a A. El tercer renglón contiene el caso de un elemento que pertenece a A, pero no a B. Finalmente el último renglón aborda el caso de un elemento que pertenece tanto a A como a B. El procedimiento descrito para el primer renglón se repite para los otros 3 renglones. Al final podemos observar que la cuarta columna y la última son iguales, indicando que ambos conjuntos son iguales, debido a que se comportan en igual forma para cualquier elemento del conjunto universo. Es decir:

$$(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$$

Utilizando esta técnica de construir tablas de membresía se pueden demostrar fácilmente las propiedades o leyes de los conjuntos que se han mencionado.

- **Propiedades de la inclusión:**

$$\emptyset \subseteq \emptyset \quad (12.64)$$

$$\emptyset \subseteq A \quad (12.65)$$

$$A \subseteq A \quad (12.66)$$

$$(A \subseteq B) \wedge (B \subseteq C) \rightarrow (A \subseteq C) \quad (12.67)$$

La última propiedad indica que si A es subconjunto de B y B es subconjunto de C, entonces A es subconjunto de C.

Enseguida utilicemos estos conceptos de conjuntos y sus operaciones para abordar el tema del producto cartesiano y funciones.

12.6. Producto cartesiano

El **producto cartesiano de dos conjuntos** A y B, denotado como $A \times B$ (se leé como "A cruz B") se define como el conjunto de todos los pares ordenados $p = (a, b)$, cuyo primer elemento a pertenece a A y segundo elemento b

pertenece a B. Es decir:

$$A \times B = \{p \mid (p = (a, b)) \wedge (a \in A) \wedge (b \in B)\} \tag{12.68}$$

Veamos un ejemplo. Si $A = \{a, b, c\}$ y $B = \{1, 2\}$, tenemos:

$$A \times B = \{(a, 1), (a, 2), (b, 1), (b, 2), (c, 1), (c, 2)\}$$

La figura 12.9 ilustra el producto cartesiano $A \times B$, donde cada flecha representa un par ordenado. Por ejemplo, la flecha superior representa el par ordenado $(a, 1)$.

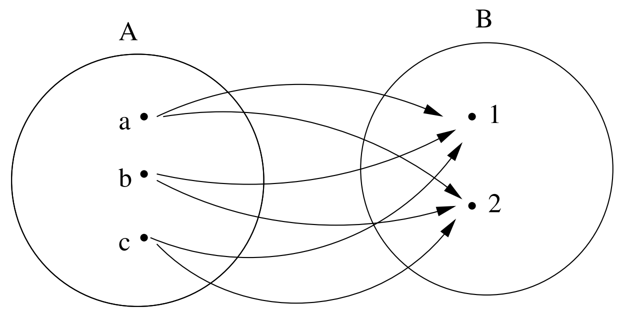


Figura 12.9: El producto cartesiano $A \times B$. Cada flecha representa un par ordenado.

Anteriormente ya hemos utilizado pares ordenados para representar las coordenadas de un punto en el plano cartesiano. En este caso tenemos:

$$R \times R = \{p \mid (p = (x, y)) \wedge (x \in R) \wedge (y \in R)\}$$

de manera que este producto cartesiano contiene todos los puntos en el plano cartesiano.

12.7. Funciones

Se define una **relación** del conjunto A al conjunto B como cualquier subconjunto del producto cartesiano $A \times B$. Dentro de los posibles tipos de relaciones, un tipo de relación especial muy importante es una llamada **función**.

Una función f del conjunto A al conjunto B, denotada como: $f : A \Rightarrow B$ (se leé “la función f que mapea del conjunto A al conjunto B”), es un subconjunto del producto cartesiano $A \times B$ que además satisface la siguiente condición:

$$\forall_{x \in A} \forall_{y_1 \in B} \forall_{y_2 \in B} \;\; (((x, y_1) \in f) \wedge ((x, y_2) \in f)) \rightarrow (y_1 = y_2) \tag{12.69}$$

En otras palabras, si la pareja (x, y_1) pertenece a la función f y también la pareja (x, y_2) pertenece a la función f, entonces necesariamente se debe cumplir que $y_1 = y_2$. Es decir, para un valor de x sólo puede corresponder un único valor de y (no dos). Recuerde que esta definición es consistente con la definición de función dada en la sección 8.8.3.

Al conjunto A se le llama **dominio de la función** y al conjunto B se le llama **codominio de la función**. También se dice que la función realiza un mapeo de A a B. Si la pareja(x, y) pertenece a la función, también se usa con frecuencia la notación $f(x) = y$.

Por ejemplo la relación que contiene todo el producto cartesiano de la figura 12.9 no es una función porque existen las parejas $(a, 1)$ y $(a, 2)$. Es decir, de cada elemento de A salen dos flechas. Para que sea función solo puede salir una única flecha de un elemento de A.

Si $f = \{(a, 1), (b, 1), (c, 1)\}$, entonces f si es una función. Esta función también se puede especificar como: $f(a) = 1$, $f(b) = 1$ y $f(c) = 1$.

Si la función está definida para todos los elementos del dominio, se denomina **función total**. Si no está definida para algunos elementos del domino, se denomina **función parcial**. En el resto de esta sección sólo consideraremos funciones totales.

Veamos ahora algunos tipos de funciones especiales:

- **Funciones inyectivas**. En forma gráfica, en las funciones inyectivas los elementos del conjunto B reciben a lo más una flecha. Si a algún elemento de B le llega más de una flecha, entonces la función no es inyectiva. En estas funciones se cumple la siguiente propiedad:

$$\forall_{x_1 \in A} \forall_{x_2 \in A} \forall_{y \in B} \;\; ((x_1, y) \in f) \wedge ((x_2, y) \in f)) \to (x_1 = x_2) \tag{12.70}$$

  o en sus formas equivalentes:

$$\forall_{x_1 \in A} \forall_{x_2 \in A} \qquad (f(x_1) = f(x_2)) \to (x_1 = x_2) \tag{12.71}$$

$$\forall_{x_1 \in A} \forall_{x_2 \in A} \qquad (x_1 \neq x_2) \to (f(x_1) \neq f(x_2)) \tag{12.72}$$

  donde la última expresión se ha obtenido al considerar la equivalencia 12.21 relacionada con la implicación: $p \to q \equiv (\neg q) \to (\neg p)$. De manera que la última expresión obtenida nos dice claramente: una función es inyectiva si para cualquier par de flechas que parten de elementos diferentes de A, llegan a elementos diferentes en B.

  Si $A = \{a, b, c\}$ y $B = \{1, 2, 3, 4\}$, la función $f : A \Rightarrow B$ definida por la función $f = \{(a, 1), (b, 2), (c, 3)\}$ es inyectiva. La figura 12.10 ilustra esta función.

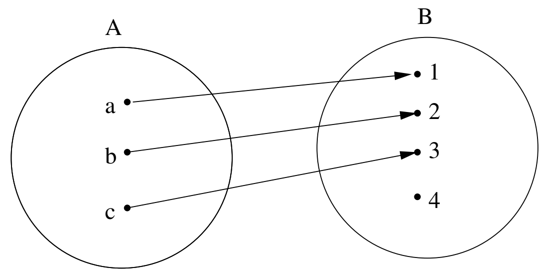


Figura 12.10: Ejemplo de función inyectiva. A un elemento de B le llega a lo más una flecha.

- **Funciones sobreyectivas**. En forma gráfica, en las funciones sobreyectivas a todos los elementos de B le llega al menos una flecha. Si algún elemento de B se queda sin llegarle una flecha, entonces la función no es sobreyectiva. En estas funciones se cumple:

$$\forall_{y \in B} \; \exists_{x \in A} ((x, y) \in f) \tag{12.73}$$

  o en su forma equivalente:

$$\forall_{y \in B} \; \exists_{x \in A} (f(x) = y) \tag{12.74}$$

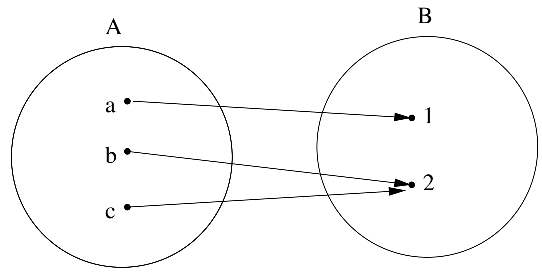


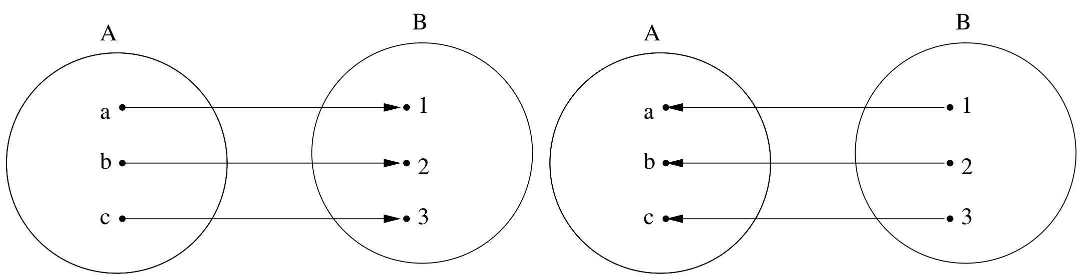
Figura 12.11: Ejemplo de función sobreyectiva. A todos los elementos de B les llegan flechas (una o más).

Es decir, para todo elemento $y \in B$ existe al menos un elemento $x \in A$ tal que $f(x) = y$.

Si $A = \{a, b, c\}$ y $B = \{1, 2\}$, la función $f : A \Rightarrow B$ definida por $f = \{(a, 1), (b, 2), (c, 2)\}$ es sobreyectiva, pero no inyectiva. La figura 12.11 ilustra esta función.

- **Funciones biyectivas**. Una función es biyectiva si es inyectiva y sobreyectiva.

  Estas funciones son muy importantes en matemáticas y tienen la propiedad de que existe una función inversa, denotada como $f^{-1} : B \Rightarrow A$, que mapea de B a A. En forma gráfica, la función f^{-1} solamente invierte la punta de las flechas de f, ahora van de B a A.



(a) Función f (b) Función f^{-1}

Figura 12.12: Ejemplo de función biyectiva y su inversa.

Si $A = \{a, b, c\}$ y $B = \{1, 2, 3\}$, la función $f : A \Rightarrow B$ definida por la función $f = \{(a, 1), (b, 2), (c, 3)\}$ es inyectiva y sobreyectiva. Por lo tanto f es biyectiva. Su función inversa es: $f^{-1} = \{(1, a), (2, b), (3, c)\}$. La figura 12.12 ilustra ambas funciones.

Aplicaciones de las funciones biyectivas en la cardinalidad

Reconociendo que en una función biyectiva sale una flecha de cada elemento del dominio y llega a un elemento del codominio, podemos inferir que la cardinalidad del dominio y el codominio son iguales. Es decir, podemos probar que dos conjuntos tienen misma cardinalidad si encontramos que existe una función biyectiva entre ambos conjuntos.

Esta propiedad de las funciones biyectivas es especialmente útil para comparar la cardinalidad de conjuntos infinitos. Un conjunto infinito tiene la propiedad de que se puede encontrar una función biyectiva entre dicho conjunto y uno de sus subconjuntos.

Por ejemplo, la siguiente función $f : N \Rightarrow P$ es una función biyectiva de los números naturales N a los números naturales pares $P = \{2, 4, 6, \ldots\}$:

$$\begin{aligned} f &= \{(1,2),(2,4),(3,6),...\} \\ f(x) &= 2x \end{aligned}$$

En otras palabras, N y P tienen la misma cardinalidad.

También se puede encontrar una función biyectiva del conjunto de los números naturales, N, al conjunto de los números enteros, Z, y por lo tanto tienen la misma cardinalidad. El lector puede comprobar que la siguiente función $f : N \Rightarrow Z$ es biyectiva:

$$f = \{(1,0),(2,1),(3,-1),(4,2),(5,-2),(6,3),(7,-3),...\}$$

También se puede probar que el conjunto de los números racionales también tiene la misma cardinalidad del conjunto de los números naturales. El lector interesado puede investigar la demostración de que la cardinalidad del conjunto de los números reales es mayor que la cardinalidad de los números naturales. Es decir, hay más números reales que números naturales, aún cuando ambos son infinitos. Se dice que los números naturales son numerables, es decir se pueden poner en secuencia: $1, 2, 3, \ldots$, mientras que esto no es posible en los números reales, no son numerables.

12.8. Ejercicios propuestos

1. Mediante la construcción de tablas de verdad, demuestre que las expresiones siguientes son equivalentes:

   a) $p \rightarrow q \equiv (\neg p) \vee q$
   b) $p \rightarrow q \equiv (\neg q) \rightarrow (\neg p)$

2. Mediante la construcción de tablas de verdad, demuestre que las expresiones siguientes son equivalentes:

   a) $p \vee q \equiv q \vee p$
   b) $p \wedge q \equiv q \wedge p$
   c) $(p \vee q) \vee r \equiv p \vee (q \vee r)$
   d) $(p \wedge q) \wedge r \equiv p \wedge (q \wedge r)$
   e) $\neg(\neg p) \equiv p$
   f) $p \vee F \equiv p$
   g) $p \wedge V \equiv p$
   h) $p \vee V \equiv V$
   i) $p \wedge F \equiv F$
   j) $p \vee p \equiv p$
   k) $p \wedge p \equiv p$
   l) $p \vee (\neg p) \equiv V$
   m) $p \wedge (\neg p) \equiv F$

n) $p \vee (q \wedge r) \equiv (p \vee q) \wedge (p \vee r)$

ñ) $p \wedge (q \vee r) \equiv (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$

o) $\neg(p \vee q) \equiv (\neg p) \wedge (\neg q)$

p) $\neg(p \wedge q) \equiv (\neg p) \vee (\neg q)$

3. Si Z es el conjunto de los números enteros, exprese los siguientes conjuntos mediante la enumeración de sus elementos:

   a) $P = \{x \in Z \mid (x > 0)\}$

   b) $P = \{x \in Z \mid (x \geq 0)\}$

   c) $P = \{x \in Z \mid (x < 0)\}$

   d) $P = \{x \in Z \mid (x \neq 0)\}$

   e) $P = \{x \in Z \mid \exists_{k \in Z} \ (x = 2 * k)\}$

4. Exprese los siguientes conjuntos mediante la enumeración de sus elementos:

   a) $P = \{x \in Z \mid \neg(x = 0)\}$

   b) $P = \{x \in Z \mid (x > 10) \wedge (x < 20)\}$

   c) $P = \{x \in Z \mid (x > 10) \vee (x < 20)\}$

   d) $P = \{x \in Z \mid (x > 10) \vee (x < 5)\}$

   e) $P = \{x \in Z \mid \exists_{k \in Z} \ (x = 2 * k + 1)\}$

5. Exprese los siguientes conjuntos utilizando los dos formatos: 1) enumerando sus elementos y 2) especificando la propiedad o propiedades que tienen que cumplir los elementos para pertenecer al conjunto:

   a) El conjunto de los números enteros pares.

   b) El conjunto de los números enteros impares.

   c) El conjunto de los números enteros múltiplos de 3.

6. Exprese los siguientes conjuntos utilizando los dos formatos: 1) enumerando sus elementos y 2) especificando la propiedad o propiedades que tienen que cumplir los elementos para pertenecer al conjunto:

   a) El conjunto de los números naturales que son cuadrados perfectos.

   b) El conjunto de los números racionales múltiplos de $\frac{1}{3}$.

7. Si el conjunto Universo $U = \{x \in N \mid (x \leq 20\}$, $A = \{x \in N \mid (x < 10)\}$, $B = \{x \in N \mid (x < 5)\}$, $C = \{4, 8, 12\}$. Determine:

   a) $A \cup B$

   b) $A \cap B$

   c) $A - B$

   d) A^c

   e) B^c

   f) $A \cap B^c$

   g) $(A - C) \cap B^c$

h) $A \subseteq B$

8. Si N es el conjunto de los números naturales y el conjunto Universo $U = \{x \in N \mid (x \leq 20\}$, $A = \{x \in N \mid (x < 10)\}$, $B = \{x \in N \mid (x < 5)\}$, $C = \{4, 8, 12\}$. Determine:

   a) $A \subset B$
   b) $B \subseteq A$
   c) $B \subset A$
   d) $(B - C) \subseteq A$
   e) $P(C)$
   f) $B \times C$
   g) $C \times B$
   h) $(A \times A) \times A$

9. Si V es el conjunto de las vocales y D es el conjunto de los dígitos, determine:

   a) $|V \times D|$
   b) Extienda el resultado anterior si $|A| = m$ y $|B| = n$, para calcular: $|A \times B|$

10. El producto cartesiano de tres conjuntos A_1, A_2 y A_3 se define como:

$$A_1 \times A_2 \times A_3 = \{(a_1, a_2, a_3) \mid (a_1 \in A_1) \wedge (a_2 \in A_2) \wedge (a_3 \in A_3)\}$$

y de n conjuntos, como:

$$A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n = \{(a_1, a_2, \ldots, a_n) \mid (a_1 \in A_1) \wedge (a_2 \in A_2) \wedge \ldots \wedge (a_n \in A_n)\}$$

Determine la cardinalidad de $A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n$ en función de las cardinalidades de los conjuntos $A_1, A_2, \ldots A_n$.

11. Las placas de un auto se forman con 4 letras mayúsculas seguidas de 4 dígitos. Si el alfabeto español tiene 27 letras, determine:

   a) El número de placas diferentes que se pueden tener.
   b) El número de placas que inician con M.
   c) El número de placas que inician con PH.
   d) El número de placas que terminan con 0.

12. Las placas de un auto se forman con 4 letras mayúsculas seguidas de 4 dígitos. Determine:

   a) El número de placas que inician con M y terminan con 0.
   b) El número de placas que terminan con 10.
   c) El número de placas que inician con M y terminan con 10.
   d) El número de placas que inician con M o terminan con 0.

13. Determine si f es una función y en caso afirmativo, determine si la función es inyectiva, sobreyectiva o biyectiva:

a) $f : N \Rightarrow N$, $f(x) = x + 1$

b) $f : N \Rightarrow N$, $f(x) = x^2$

c) $f : Z \Rightarrow Z$, $f(x) = x^2$

14. Determine si f es una función y en caso afirmativo, determine si la función es inyectiva, sobreyectiva o biyectiva:

    a) $f : Z \Rightarrow Z$, $f(x) = x + 1$

    b) $f : N \Rightarrow N$, $f(x) = 2x - 1$

    c) $f : R \Rightarrow R$, $f(x) = \sqrt{x}$

Capítulo 13

Números complejos

Durante muchos años, la solución de la ecuación cuadrática:

$$x^2 + 1 = 0$$

presentó un reto a los matemáticos, puesto que no existe ningún número real cuyo cuadrado de como resultado -1. El paso clave para resolver el problema fue introducir la existencia de la raíz cuadrada de -1. El matemático y físico suizo Leonhard Euler introdujo en 1777 el símbolo especial i para representar a la raíz cuadrada positiva de -1, de manera que $i^2 = -1$. De esta manera la ecuación cuadrática anterior tiene como solución $x_1 = i$ y $x_2 = -i$.

Hasta ahora hemos abordado los números reales, aquellos que al elevarlos al cuadrado nos dan un número mayor o igual a cero. En este capítulo se introducen los números imaginarios, aquellos que al elevarlos al cuadrado el resultado es un número negativo.

Con los números reales y los números imaginarios se forman los números complejos, identificándolos como puntos en un plano.

13.1. Motivación para la invención de los números complejos

Los números reales se utilizan para describir medidas precisas de cantidades físicas, mientras que la raíz cuadrada de un número negativo parece no tener sentido físico. Sin embargo, para sorpresa de los matemáticos, para los físicos y los ingenieros del mundo, los números complejos resultaron ser extraordinariamente útiles. Los números complejos hicieron posible resolver problemas en física y matemáticas: magnetismo, electricidad, calor, sonido, gravedad y flujo de fluidos. Lo que importa en esos problemas no es sólo lo grande que es cierta cantidad física, la cual puede especificarse usando un número real, sino en que dirección apunta. Como veremos más adelante, los números complejos viven en un plano y definen una dirección, del origen del plano al número complejo en cuestión. Por lo tanto, cualquier problema en el que están involucradas direcciones en el plano es una aplicación potencial de los números complejos, y la física está llena de esos problemas (Stewart, 2016).

Sobre estos nuevos números complejos se tienen operaciones de suma, resta, multiplicación, división y raíces; como veremos a continuación.

13.2. Los números imaginarios

Definamos los conjuntos de los números reales, R, e **imaginarios**, I, como sigue:

$$\begin{aligned} R &= \{x \mid x^2 \geq 0\} \quad (13.1) \\ I &= \{x \mid x^2 < 0\} \quad (13.2) \end{aligned}$$

En los números imaginarios, vamos a representar a la **unidad imaginaria** con un símbolo especial [1], i, el cual tiene la siguiente propiedad:

$$i^2 = -1 \quad (13.3)$$

Es decir, este número especial, i, al elevarlo al cuadrado, el resultado $i * i = -1$. También se suele representar a este número especial, i, como la raíz cuadrada positiva del número -1:

$$i = \sqrt{-1} \quad (13.4)$$

De manera que $i^2 = \sqrt{-1} * \sqrt{-1} = -1$. La multiplicación de un número real por i, sigue el concepto del producto, como una suma repetida, teniendo a 0 como el neutro aditivo:

$$\begin{aligned} 0 * i &= 0 \\ 2i &= 0 + i + i \\ 3i &= 0 + i + i + i \end{aligned}$$

El inverso aditivo de un número imaginario a es otro número imaginario b que sumado a a nos de 0. El inverso aditivo de i se denotará como $-i$, el inverso aditivo de $2i$ se denotará como $-2i$, etc. De manera que se verifica:

$$\begin{aligned} i + (-i) &= 0 \\ 2i + (-2i) &= 0 \end{aligned}$$

También se conservan las propiedades que hemos visto anteriormente: el número real 1 sigue siendo el neutro multiplicativo: $1 * i = i$; multiplicar por -1 nos da el inverso aditivo de un número imaginario: $-1 * i = -i$. Como si el número i fuera cualquier otro número, sin olvidar la propiedad especial de que $i^2 = -1$. Podemos sumar los números imaginarios como lo hacemos con los números reales:

$$\begin{aligned} 3i + 2i &= (0 + i + i + i) + (0 + i + i) = 0 + i + i + i + i + i = 5i \\ 3i - 2i &= (i + 2i) - 2i = i + (2i - 2i) = i + 0 = i \\ 8i - 3i &= (8 - 3)i = 5i \end{aligned}$$

También podemos multiplicar un número real por un número imaginario, siguiendo el mismo concepto del producto como suma repetida y la propiedad asociativa del producto:

$$\begin{aligned} 2 * (3i) &= 0 + 3i + 3i = 6i \\ 2 * (3i) &= (2 * 3)i = 6i \end{aligned}$$

[1] En ingeniería eléctrica, donde el símbolo i se reserva para la corriente eléctrica, se utiliza la j para denotar la unidad imaginaria, en lugar de la i.

Veamos ahora algunos ejemplos de números imaginarios y el resultado que se obtiene al elevarlos al cuadrado:

$$\begin{aligned}
(0i)^2 &= 0^2 * i^2 = 0 * (-1) = 0 \\
\left(\frac{1}{2}\,i\right)^2 &= \left(\frac{1}{2}\,i\right) * \left(\frac{1}{2}\,i\right) = \left(\frac{1}{2} * \frac{1}{2}\right) * (i * i) = \frac{1}{4}(-1) = -\frac{1}{4} \\
\left(-\frac{1}{2}\,i\right)^2 &= \left(-\frac{1}{2}\,i\right) * \left(-\frac{1}{2}\,i\right) = \left(\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{1}{2}\right)\right) * (i * i) = \frac{1}{4}(-1) = -\frac{1}{4} \\
i^2 &= -1 \\
(-i)^2 &= (-1 * i) * (-1 * i) = ((-1)(-1)) * (i * i) = 1 * (-1) = -1 \\
(\sqrt{2}\,i)^2 &= (\sqrt{2}\,i) * (\sqrt{2}\,i) = (\sqrt{2} * \sqrt{2}) * (i * i) = 2 * i^2 = 2 * (-1) = -2 \\
(-\sqrt{2}\,i)^2 &= (-\sqrt{2}\,i) * (-\sqrt{2}\,i) = ((-\sqrt{2})(-\sqrt{2})) * (i * i) = 2 * (-1) = -2 \\
(\sqrt{3}\,i)^2 &= (\sqrt{3}\,i) * (\sqrt{3}\,i) = (\sqrt{3} * \sqrt{3}) * (i * i) = 3 * i^2 = 3 * (-1) = -3 \\
(-\sqrt{3}\,i)^2 &= (-\sqrt{3}\,i) * (-\sqrt{3}\,i) = ((-\sqrt{3})(-\sqrt{3})) * (i * i) = 3 * (-1) = -3 \\
(2\,i)^2 &= (2\,i) * (2\,i) = (2 * 2) * (i * i) = 4 * (-1) = -4 \\
(-2\,i)^2 &= (-2\,i) * (-2\,i) = ((-2) * (-2)) * (i * i) = 4 * (-1) = -4
\end{aligned}$$

De manera que las dos raíces cuadradas de -1 son $+\sqrt{-1} = i$ y $-\sqrt{-1} = -i$, las dos raíces cuadradas de -4 son $+\sqrt{-4} = 2i$ y $-\sqrt{-4} = -2i$, etc. Ahora efectuemos el proceso contrario, pasar de la raíz cuadrada de un número negativo a la representación utilizando la unidad imaginaria i, aprovechando nuestros conocimientos anteriores sobre números reales:

$$\begin{aligned}
\sqrt{-1} &= i \\
\sqrt{-2} &= \sqrt{(2)(-1)} = \sqrt{2}\,\sqrt{-1} = \sqrt{2}\,i \\
\sqrt{-3} &= \sqrt{(3)(-1)} = \sqrt{3}\,\sqrt{-1} = \sqrt{3}\,i \\
\sqrt{-4} &= \sqrt{(4)(-1)} = \sqrt{4}\,\sqrt{-1} = 2\,i
\end{aligned}$$

Sin olvidar que las raíces negativas son: $\sqrt{-1} = -i$, $\sqrt{-2} = -\sqrt{2}\,i$, $\sqrt{-3} = -\sqrt{3}\,i$, etc.

De esta forma, un número imaginario b se puede representar como:

$$b = y * i \tag{13.5}$$

Donde y es un número real ($y \in R$). La figura 13.1 presenta el conjunto de los números imaginarios como una recta numérica, donde en el centro se ubica el número real 0 y los puntos a su derecha corresponden a los números $y * i$ (para $y > 0$) y los puntos a su izquierda corresponden a los números $y * i$ (para $y < 0$).

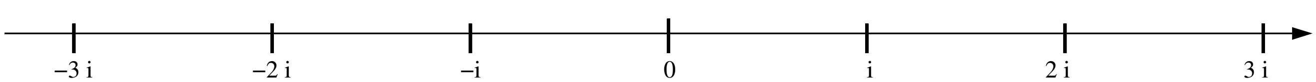


Figura 13.1: La recta numérica de números imaginarios.

Los números imaginarios tienen la forma: yi, done $y \in R$ e i es la unidad imaginaria que tiene la siguiente propiedad:

$$i^2 = -1$$

De manera que $(yi)^2 = -y^2$ es un número negativo o cero.

Ahora pasemos a los números complejos.

13.3. Los números complejos

El conjunto de los números complejos, C, se define como el producto cartesiano del conjunto de los números reales, R, con el conjunto de los números imaginarios I:

$$C = R \times I = \{z \mid (z = (x, yi)) \land (x \in R) \land (yi \in I)\} \tag{13.6}$$

Es decir, un número complejo z es un par ordenado, también llamado **vector** de dos **componentes**, donde el primer elemento o componente (x) es un número real y el segundo elemento o componente (yi) es un número imaginario o 0. Para representar el número complejo $z = (x, yi)$ también se utiliza la notación **como binomio**:

$$(x, yi) = x + yi \tag{13.7}$$

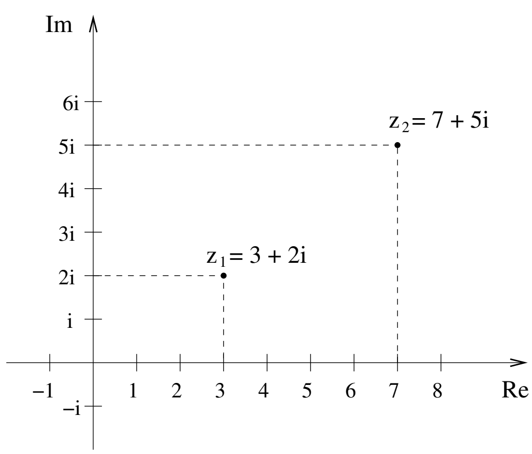


Figura 13.2: Los números complejos $z_1 = 3 + 2i$ y $z_2 = 7 + 5i$ son representados como puntos en el plano complejo.

En forma similar a la representación de un elemento del producto cartesiano $R \times R$ como un punto en el plano cartesiano, podemos representar un número complejo $z = x + yi$ como un punto en el plano complejo mostrado en la figura 13.2. El eje x horizontal corresponde a la componente real (etiquetado en la figura como Re) y el eje y vertical (etiquetado en la figura como Im) corresponde a la componente imaginaria. En la figura se muestran los puntos $z_1 = 3 + 2i$ y $z_2 = 7 + 5i$. Los ejes se cruzan en el punto $0 + 0i$.

Un número real a y un número imaginario bi son números complejos (siendo nula la otra parte):

$$\begin{aligned} a &= (a, 0i) = a + (0)i = a \\ b\,i &= (0, bi) = 0 + bi = bi \end{aligned}$$

El número real a se ubica como un punto sobre el eje x y el número imaginario bi como un punto en el eje vertical del plano complejo.

Un número complejo es un par ordenado de la forma:

$$(x, yi)$$

Donde x es un número real y yi es un número imaginario. Un número complejo z también se puede expresar como un binomio:

$$z = x + yi$$

13.3.1. Igualdad de números complejos

Como un número complejo es un punto en el plano complejo, para que dos números complejos sean **iguales**, deben corresponder al mismo punto. Si $z_1 = x_1 + y_1 i$ y $z_2 = x_2 + y_2 i$ son dos números complejos, este requerimiento se expresa como sigue:

$$(z_1 = z_2) \equiv ((x_1 = x_2) \wedge (y_1 = y_2)) \tag{13.8}$$

En otras palabras, para que $z_1 = z_2$ sea cierta, sus componentes reales deben ser iguales y también sus componentes imaginarias deben ser iguales. De otra forma, $z_1 \neq z_2$.

Dos números complejos son iguales si sus respectivas componentes reales e imaginarias son iguales.

13.3.2. Representación de un número complejo como vector

La figura 13.3 muestra otra forma de representar el número complejo $z = (x, yi)$, conocida como **forma vectorial** o **forma polar**. El número z se puede expresar como el par ordenado o vector siguiente:

$$\mathbf{r} = (r, \theta)$$

Este vector **r** (observe la letra negrita para denotar vectores) está representado en la figura por la flecha que parte del origen y se dirige al punto z. Donde r es un número real positivo, llamado **magnitud o módulo del número complejo** z y mide la distancia del origen del plano complejo al punto z. A la magnitud r del número complejo z también se representa como $|z|$.

El ángulo θ (entre -180 y 180 grados), llamado también **argumento o fase** del número complejo z, es el ángulo que forma el vector **r** con respecto al eje real positivo (eje x horizontal etiquetado como **Re**). En la figura 13.3, al eje vertical se le ha puesto la etiqueta **Im** para recordar que es el eje de los números imaginarios.

Para expresar un número complejo en su forma polar, con magnitud $|z|$ y ángulo θ, también se utiliza frecuentemente la notación siguiente:

$$z = |z| \angle\theta$$

En adelante utilizaremos esta notación para expresar un número complejo en su forma polar.

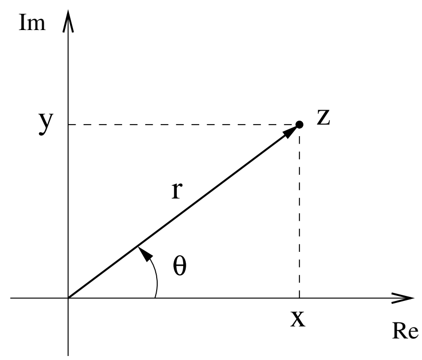


Figura 13.3: El punto $z = (x, y\,i)$ representado en su forma polar como el vector $\mathbf{r} = (r, \theta)$.

Conversión de la forma binomial a polar

Veamos como pasar un número complejo z de la **forma binomial** $z = x + yi$, a su forma polar $z = |z| \angle\theta$. De la figura 13.3 vemos que se forma un triángulo rectángulo de catetos x y y. Por lo tanto, $r = |z|$ corresponde a la hipotenusa del triángulo, y la podemos calcular usando el Teorema de Pitágoras:

$$|z| = \sqrt{x^2 + y^2} \tag{13.9}$$

Como x y y son números reales, sus cuadrados son números positivos o cero y también su suma, de ahí se puede concluir que $|z|$ siempre será un número real positivo o 0. El ángulo θ también se puede calcular fácilmente como:

$$\theta = \arctan\left(\frac{y}{x}\right) \tag{13.10}$$

Veamos los posibles valores que puede tomar el ángulo θ:

- $x > 0$ y $y > 0$. En este caso $\theta = \arctan\left(\frac{y}{x}\right)$ nos regresa un valor entre 0 y 90°. Por ejemplo, $z = 1 + i$ corresponde al vector:

$$\begin{aligned}
z &= |z| \angle\theta \\
z &= \sqrt{x^2 + y^2} \angle \arctan\left(\frac{y}{x}\right) \\
z &= \sqrt{1^2 + 1^2} \angle \arctan\left(\frac{1}{1}\right) \\
z &= \sqrt{2} \angle \arctan(1) \\
z &= \sqrt{2} \angle 45^\circ
\end{aligned}$$

- $x < 0$ y $y > 0$. En este caso $\theta = \arctan\left(\frac{y}{x}\right)$ nos regresa un valor entre 0 y $-90°$ lo cual es equivocado. El valor correcto es: $\theta = \arctan\left(\frac{y}{x}\right) + 180°$. Por ejemplo, $z = -1 + i$ corresponde al vector:

$$\begin{aligned} z &= \sqrt{(-1)^2 + 1^2}\,\angle(\arctan\left(\frac{1}{-1}\right) + 180°) && (13.11)\\ z &= \sqrt{2}\,\angle(\arctan(-1) + 180°) && (13.12)\\ z &= \sqrt{2}\,\angle(-45° + 180°) && (13.13)\\ z &= \sqrt{2}\,\angle 135° && (13.14) \end{aligned}$$

- $x < 0$ y $y < 0$. En este caso $\theta = \arctan\left(\frac{y}{x}\right)$ nos regresa un valor entre 0 y $90°$ lo cual es equivocado. El valor correcto es: $\theta = \arctan\left(\frac{y}{x}\right) - 180°$. Por ejemplo, $z = -1 - i$ corresponde al vector:

$$\begin{aligned} z &= \sqrt{(-1)^2 + (-1)^2}\,\angle(\arctan\left(\frac{-1}{-1}\right) - 180°) && (13.15)\\ z &= \sqrt{2}\,\angle(\arctan(1) - 180°) && (13.16)\\ z &= \sqrt{2}\,\angle(45° - 180°) && (13.17)\\ z &= \sqrt{2}\,\angle - 135° && (13.18) \end{aligned}$$

- $x > 0$ y $y < 0$. En este caso $\theta = \arctan\left(\frac{y}{x}\right)$ nos regresa un valor entre 0 y $-90°$ lo cual es correcto. Por ejemplo, $z = 1 - i$ corresponde al vector:

$$\begin{aligned} z &= \sqrt{(1)^2 + (-1)^2}\,\angle\arctan\left(\frac{-1}{1}\right)) && (13.19)\\ z &= \sqrt{2}\,\angle\arctan(-1)) && (13.20)\\ z &= \sqrt{2}\,\angle - 45°) && (13.21) \end{aligned}$$

Esta dificultad con la función $\arctan(y/x)$ para ubicar el ángulo θ correcto se evita si utilizamos la función arctan2(y, x) que recibe dos argumentos: el valor de y y el valor de x. Por ejemplo, en el programa Octave tenemos la función atan2d(y, x) que calcula arctan2(y, x) y devuelve el valor correcto en grados, la función atan2 devuelve el valor en radianes:

```
>> atan2d(1,1)
ans =  45
>> atan2d(1,-1)
ans =  135
>> atan2d(-1,-1)
ans = -135
>> atan2d(-1,1)
ans = -45
```

Conversión de la forma rectangular a polar. Un número complejo en su forma binomial $z = x + yi$ se puede expresar en su forma vectorial o polar como $z = |z| \angle\theta$, donde:

$$|z| = \sqrt{x^2 + y^2} \tag{13.22}$$

$$\theta = \operatorname{atan2}(y, x) \tag{13.23}$$

A $|z|$ se le denomina magnitud del vector asociado a z y θ es el ángulo, argumento o fase del vector z. Si se calcula $\theta = \arctan\left(\frac{y}{x}\right)$, se debe tener cuidado de sumar o restar π radianes (o $180°$) para obtener el resultado correcto cuando $x < 0$.

Conversión de forma polar a rectangular

Ahora veamos el proceso contrario, pasar el número complejo expresado en su forma polar $z = |z| \angle\theta$ a la forma rectangular $z = x + y\,i$. De la figura 13.3 podemos calcular fácilmente los catetos x y y del triángulo rectángulo que tiene a la magnitud $r = |z|$ como hipotenusa, aprovechando las funciones $\sin(\theta) = \frac{y}{|z|}$ y $\cos(\theta) = \frac{x}{|z|}$,

$$y = |z| \sin(\theta) \tag{13.24}$$

$$x = |z| \cos(\theta) \tag{13.25}$$

De manera que el número z puede expresarse como sigue:

$$\begin{aligned} z &= x + y\,i \\ z &= |z| \cos(\theta) + |z| \sin(\theta)\, i \end{aligned} \tag{13.26}$$

Por ejemplo, el vector $z = \sqrt{2}\ \angle 45°$ corresponde al número complejo z:

$$\begin{aligned} z &= \sqrt{2}\ \cos(45°) + \sqrt{2}\ \sin(45°)\, i \\ z &= 1 + i \end{aligned}$$

Conversión de la forma polar a rectangular o binomial. El vector $z = |z| \angle\theta$ corresponde al número complejo:

$$z = |z| \cos(\theta) + |z| \sin(\theta)\, i \tag{13.27}$$

Veamos ahora como se define la suma de los números complejos.

13.4. Suma de números complejos

La **suma de los números complejos** $z_1 = x_1 + y_1 i$ y $z_2 = x_2 + y_2 i$, denotada como $z_1 + z_2$, aprovecha la propiedad conmutativa y asociativa de la suma:

$$\begin{aligned} z_1 + z_2 &= (x_1 + y_1 i) + (x_2 + y_2 i) \\ z_1 + z_2 &= (x_1 + x_2) + (y_1 i + y_2 i) \\ z_1 + z_2 &= (x_1 + x_2) + (y_1 + y_2) i \end{aligned} \quad (13.28)$$

Es decir, se suman las partes reales y las partes imaginarias por separado, como se ilustra en la figura 13.4.

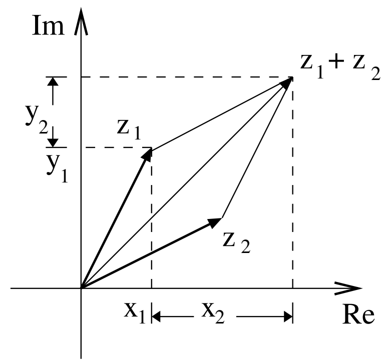


Figura 13.4: Representación grafica de la suma de los números complejos z_1 y z_2.

Observe el comportamiento del vector que representa la suma de z_1 y z_2. El vector suma se obtiene al unir el origen con el punto que resulta de trasladar el vector de z_2 al final del vector de z_1. De igual manera, el vector suma se puede obtener al trasladar el vector de z_1 al final del vector de z_2. A esta forma gráfica para sumar los vectores se le conoce como **regla del paralelogramo**.

En la figura 13.4, los números complejos corresponden a: $z_1 = 2 + 5i$ y $z_2 = 4 + 2i$, de manera que podemos calcular su suma:

$$\begin{aligned} z_1 + z_2 &= (2 + 5i) + (4 + 2i) \\ z_1 + z_2 &= (2 + 4) + (5 + 2) i \\ z_1 + z_2 &= 6 + 7i \end{aligned}$$

En Octave, podemos realizar esta operación fácilmente:

```
>> (2 + 5i) + (4 + 2i)
ans =  6 +  7i
```

La suma de dos números complejos z_1 y z_2 esta dada por:

$$\begin{aligned} z_1 + z_2 &= (x_1 + y_1 i) + (x_2 + y_2 i) \\ z_1 + z_2 &= (x_1 + x_2) + (y_1 + y_2) i \end{aligned} \quad (13.29)$$

13.5. Producto de un número real por un número complejo

El producto de un número real k por un número complejo $z = x + yi$, denotado como $k * z$ o simplemente como kz, se puede calcular utilizando la propiedad distributiva:

$$\begin{aligned} k * z &= k * (x + yi) \\ k * z &= (k * x) + (k * yi) \\ k * z &= (k * x) + (k * y)i \end{aligned} \tag{13.30}$$

Es decir, la parte real del número complejo se multiplica por k y también la parte imaginaria se multiplica por k. Por ejemplo:

$$\begin{aligned} 5 * (2 + 3i) &= (5 * 2) + (5 * 3)i \\ 5 * (2 + 3i) &= 10 + 15i \end{aligned}$$

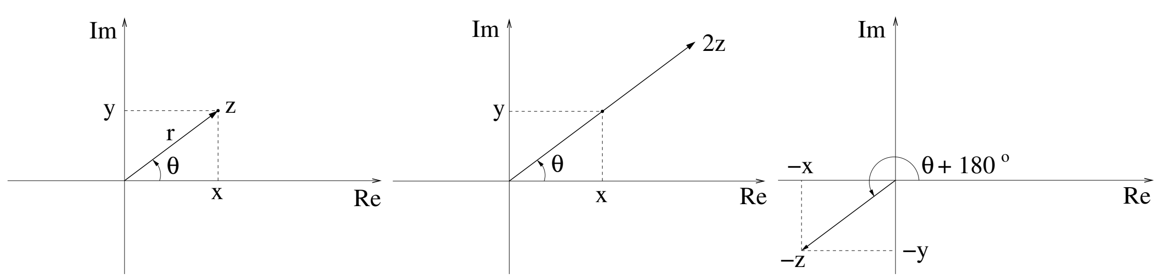
Para observar con claridad el efecto de multiplicar $k * z$, expresemos el número z utilizando su forma polar (la ecuación 13.26):

$$\begin{aligned} k * z &= k * (|z| \cos(\theta) + |z| \sin(\theta)i) \\ k * z &= (k|z|) \cos(\theta) + (k|z|) \sin(\theta)i \end{aligned} \tag{13.31}$$

De manera que la magnitud del vector resultante es simplemente $k|z|$ (para que la magnitud siga siendo positiva se requiere que $k \geq 0$) y el ángulo θ se conserva sin cambio. Esto lo podemos expresar como sigue:

$$k * (|z| \angle\theta) = (k * |z|) \angle\theta$$

Para apreciar visualmente el efecto de multiplicar un número real por un número complejo, en la figura 13.5(a) se muestra el número complejo $z = x + yi$ que corresponde al vector (r, θ). En la figura 13.5(b) podemos observar que el número complejo $2z$ corresponde al vector $(2r, \theta)$; es decir, la magnitud del vector aumentó al doble, manteniendo el ángulo θ. También podemos observar que $2z = z + z$, realizando la suma de vectores siguiendo la regla del paralelogramo.



(a) z (b) 2z (c) -z

Figura 13.5: Los números complejos z, $2z$ y $-z = (-1) * z$.

En la figura 13.5(c) podemos observar el efecto de multiplicar el número complejo z por -1. En este caso tenemos:

$$\begin{aligned}
(-1)*z &= (-1)*(|z|\cos(\theta)+|z|\sin(\theta)i)\\
(-1)*z &= (-1)*|z|\cos(\theta)+(-1)*(|z|)\sin(\theta)i\\
(-1)*z &= -|z|\cos(\theta)-|z|\sin(\theta)i\\
(-1)*z &= |z|(-\cos(\theta))+|z|(-\sin(\theta))i\\
-z &= |z|\cos(\theta+\pi)+|z|\sin(\theta+\pi)i \qquad (13.32)
\end{aligned}$$

Es decir, el vector conserva su magnitud, pero su ángulo se invirtió (sumó π (rad) $= 180°$), como se observa en la figura 13.5(c). También observe que para obtener este resultado se utilizaron las identidades trigonométricas vistas en la sección 9.3.2: $\cos(\theta+\pi)=-\cos(\theta)$ y $\sin(\theta+\pi)=-\sin(\theta)$.

De las figuras 13.5(a) y (c) podemos observar que z y $-z$ son inversos aditivos, uno del otro, puesto que su suma es $0=0+0i$, el punto que corresponde al origen del plano complejo. Es decir:

$$z+(-z)=0 \qquad (13.33)$$

Si nos preguntamos que pasa cuando multiplicamos por un número negativo diferente de -1, lo podemos hacer en dos pasos, como se muestra a continuación:

$$\begin{aligned}
-k*z &= k*((-1)*(|z|\cos(\theta)+|z|\sin(\theta)i))\\
-k*z &= k*(|z|\cos(\theta+\pi)+|z|\sin(\theta+\pi)i)\\
-k*z &= (k|z|)\cos(\theta+\pi)+(k|z|)\sin(\theta+\pi)i
\end{aligned}$$

Es decir, se invierte su dirección (suma π radianes al ángulo) y la magnitud se multiplica por el valor absoluto de $-k$. Es conveniente tener siempre en cuenta que la magnitud de un número complejo es siempre positiva o cero.

Producto de un número real por un número complejo. El resultado de multiplicar un número real k por un número complejo z, de magnitud $|z|$ y fase θ, está dado por:

$$\begin{aligned}
k*z &= k*(|z|\cos(\theta)+|z|\sin(\theta)i)\\
k*z &= (k|z|)\cos(\theta)+(k|z|)\sin(\theta)i \qquad (13.34)
\end{aligned}$$

Usando la notación de un número complejo en la forma polar tenemos que si $k>=0$, entonces:

$$\begin{aligned}
k*(|z|\ \angle\theta) &= (k*|z|)\ \angle\theta \qquad (13.35)\\
-k*(|z|\ \angle\theta) &= (k*|z|)\ \angle(\theta+\pi) \qquad (13.36)
\end{aligned}$$

13.6. Resta de números complejos

La **resta de los números complejos** $z_1 = x_1 + y_1 i$ y $z_2 = x_2 + y_2 i$, denotada como $z_1 - z_2$, se define en forma similar a la resta de números reales. Es decir, se suma z_1 con el inverso aditivo del número z_2,

$$\begin{aligned} z_1 - z_2 &= (x_1 + y_1 i) + (-1)(x_2 + y_2 i) \\ z_1 - z_2 &= (x_1 + y_1 i) + (-x_2 - y_2 i) \\ z_1 - z_2 &= (x_1 - x_2) + (y_1 i - y_2 i) \\ z_1 - z_2 &= (x_1 - x_2) + (y_1 - y_2) i \end{aligned} \tag{13.37}$$

Por ejemplo, si $z_1 = 3 + 4i$ y $z_2 = 2 - 5i$, tenemos:

$$\begin{aligned} z_1 - z_2 &= (3 + 4i) - (2 - 5i) \\ z_1 - z_2 &= (3 + 4i) + (-2 + 5i) \\ z_1 - z_2 &= (3 - 2) + (4 + 5)i \\ z_1 - z_2 &= 1 + 9i \end{aligned}$$

En Octave, podemos realizar esta operación fácilmente:

```
>> (3 + 4i) - (2 - 5i)
ans =  1 +  9i
```

La resta de dos números complejos esta dada por:

$$\begin{aligned} z_1 - z_2 &= (x_1 + y_1 i) - (x_2 + y_2 i) \\ z_1 - z_2 &= (x_1 - x_2) + (y_1 - y_2) i \end{aligned} \tag{13.38}$$

13.7. Representación de un número complejo usando un vector unitario

Recordando que un número complejo en la forma polar $|z|\angle\theta$ se puede expresar como:

$$\begin{aligned} z &= |z| * \cos(\theta) + |z| \sin(\theta) i \\ z &= |z| * (\cos(\theta) + \sin(\theta) i) \end{aligned} \tag{13.39}$$

Veamos que el número complejo $z_u = (\cos(\theta) + \sin(\theta)i)$ corresponde a un **vector unitario**, un vector de magnitud $|z_u| = 1$,

$$\begin{aligned} |z_u| &= \sqrt{\cos^2(\theta) + \sin^2(\theta)} \\ |z_u| &= \sqrt{1} \\ |z_u| &= 1 \end{aligned}$$

Observe que en este desarrollo hemos utilizado la identidad trigonométrica $\cos^2(\theta) + \sin^2(\theta) = 1$, vista en la sección 9.3.2.

Por ejemplo, si $z = 1 + i$, su magnitud es $|z| = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$ y su fase es $\theta = \arctan(1/1) = 45°$. Por lo tanto, z se puede expresar como:

$$z = \sqrt{2} * (\cos(45°) + \sin(45°)i)$$

Uso de vectores unitarios. Un número complejo z se puede representar mediante el producto de su magnitud $|z|$ por un número de magnitud unitaria z_u ($|z_u| = 1$):

$$\begin{aligned} z &= |z| * z_u \\ z &= |z| * (\cos(\theta) + \sin(\theta)i) \end{aligned} \tag{13.40}$$

13.8. Producto de un número complejo por otro número complejo

El producto de un número complejo $z_1 = x_1 + y_1 i$ por otro número complejo $z_2 = x_2 + y_2 i$, denotado como $z_1 * z_2$ o simplemente como $z_1 z_2$, se puede calcular utilizando la propiedad distributiva dos veces y teniendo cuidado de considerar que $i^2 = -1$,

$$\begin{aligned} z_1 * z_2 &= (x_1 + y_1 i) * (x_2 + y_2 i) \\ z_1 * z_2 &= x_1 * (x_2 + y_2 i) + y_1 i * (x_2 + y_2 i) \\ z_1 * z_2 &= x_1 * x_2 + x_1 * y_2 i + y_1 i * x_2 + y_1 i * y_2 i \\ z_1 * z_2 &= x_1 * x_2 + x_1 * y_2 i + y_1 i * x_2 + y_1 * y_2 * i^2 \\ z_1 * z_2 &= x_1 * x_2 + x_1 * y_2 i + y_1 i * x_2 + y_1 * y_2 * (-1) \\ z_1 * z_2 &= x_1 * x_2 + x_1 * y_2 i + y_1 i * x_2 - y_1 * y_2 \\ z_1 * z_2 &= x_1 * x_2 - y_1 * y_2 + x_1 * y_2 i + y_1 * x_2 i \\ z_1 * z_2 &= (x_1 * x_2 - y_1 * y_2) + (x_1 * y_2 + y_1 * x_2)i \end{aligned} \tag{13.41}$$

Por ejemplo, si $z_1 = 1 + i$ y $z_2 = 1 + i$, tenemos:

$$\begin{aligned} z_1 * z_2 &= (1 + i) * (1 + i) \\ z_1 * z_2 &= (1 * 1 - 1 * 1) + (1 * 1 + 1 * 1)i \\ z_1 * z_2 &= 0 + 2i \end{aligned}$$

En Octave, podemos realizar esta operación fácilmente:

```
>> (1 + i) * (1 + i)
ans =  0 +  2i
```

El producto de dos números complejos z_1 y z_2 esta dado por:

$$\begin{aligned} z_1 * z_2 &= (x_1 + y_1 i) * (x_2 + y_2 i) \\ z_1 * z_2 &= (x_1 * x_2 - y_1 * y_2) + (x_1 * y_2 + y_1 * x_2) i \end{aligned} \tag{13.42}$$

Veamos ahora otra forma de expresar el producto de dos números complejos que resulta muy apropiada para conocer que ocurre cuando multiplicamos números complejos. Para este propósito aprovechamos la representación de los números complejos en términos de vectores unitarios, vista en la sección anterior:

$$\begin{aligned} z_1 &= |z_1| * (\cos(\theta_1) + \sin(\theta_1) i) \\ z_2 &= |z_2| * (\cos(\theta_2) + \sin(\theta_2) i) \end{aligned}$$

Ahora desarrollemos $z_1 * z_2$ aprovechando nuevamente la propiedad conmutativa y asociativa del producto y la propiedad distributiva:

$$\begin{aligned} z_1 * z_2 &= (|z_1| * (\cos(\theta_1) + \sin(\theta_1) i)) * (|z_2| * (\cos(\theta_2) + \sin(\theta_2) i)) \\ z_1 * z_2 &= |z_1| * |z_2| * (\cos(\theta_1) + \sin(\theta_1) i) * (\cos(\theta_2) + \sin(\theta_2) i) \\ z_1 * z_2 &= |z_1| * |z_2| * (\cos(\theta_1) * (\cos(\theta_2) + \sin(\theta_2) i) + \sin(\theta_1) i * (\cos(\theta_2) + \sin(\theta_2) i)) \\ z_1 * z_2 &= |z_1| * |z_2| * (\cos(\theta_1) * \cos(\theta_2) + \cos(\theta_1) * \sin(\theta_2) i + \sin(\theta_1) i * \cos(\theta_2) + \sin(\theta_1) i * \sin(\theta_2) i) \\ z_1 * z_2 &= |z_1| * |z_2| * (\cos(\theta_1)\cos(\theta_2) + \cos(\theta_1)\sin(\theta_2) i + \sin(\theta_1)\cos(\theta_2) i + \sin(\theta_1)\sin(\theta_2) i^2) \\ z_1 * z_2 &= |z_1| * |z_2| * (\cos(\theta_1)\cos(\theta_2) + \cos(\theta_1)\sin(\theta_2) i + \sin(\theta_1)\cos(\theta_2) i + \sin(\theta_1)\sin(\theta_2)(-1)) \\ z_1 * z_2 &= |z_1| * |z_2| * (\cos(\theta_1)\cos(\theta_2) + \cos(\theta_1)\sin(\theta_2) i + \sin(\theta_1)\cos(\theta_2) i - \sin(\theta_1)\sin(\theta_2)) \\ z_1 * z_2 &= |z_1| * |z_2| * ((\cos(\theta_1)\cos(\theta_2) - \sin(\theta_1)\sin(\theta_2)) + (\cos(\theta_1)\sin(\theta_2) + \sin(\theta_1)\cos(\theta_2)) i) \\ z_1 * z_2 &= |z_1| * |z_2| * (\cos(\theta_1 + \theta_2) + \sin(\theta_1 + \theta_2) i) \end{aligned} \tag{13.43}$$

Para obtener este resultado hemos utilizado las identidades trigonométricas vistas en la sección 9.3.2:

$$\begin{aligned} \cos(\theta_1 + \theta_2) &= \cos(\theta_1)\cos(\theta_2) - \sin(\theta_1)\sin(\theta_2) \\ \sin(\theta_1 + \theta_2) &= \cos(\theta_1)\sin(\theta_2) + \sin(\theta_1)\cos(\theta_2) \end{aligned}$$

Hemos llegado a un importante resultado para apreciar el producto de dos números complejos:

El producto de dos números complejos z_1 y z_2 esta dado por:

$$\begin{aligned} z_1 * z_2 &= (|z_1| * (\cos(\theta_1) + \sin(\theta_1)i)) * (|z_2| * (\cos(\theta_2) + \sin(\theta_2)i)) \\ z_1 * z_2 &= |z_1| * |z_2| * (\cos(\theta_1 + \theta_2) + \sin(\theta_1 + \theta_2)i) \end{aligned} \tag{13.44}$$

La magnitud del producto es el producto de las magnitudes de los números complejos y la fase del producto es la suma de las fases de los números complejos. Usando la representación polar de los números complejos, tenemos:

$$(|z_1| \angle\theta_1) * (|z_2| \angle\theta_2) = (|z_1||z_2|) \angle(\theta_1 + \theta_2)$$

Por ejemplo, si $z_1 = 1 + i = \sqrt{2}(\cos(45°) + \sin(45°)i)$ y $z_2 = 1 + i = \sqrt{2}(\cos(45°) + \sin(45°)i)$, tenemos:

$$\begin{aligned} z_1 * z_2 &= \sqrt{2} * \sqrt{2} * (\cos(45° + 45°) + \sin(45° + 45°)i) \\ z_1 * z_2 &= 2 * (\cos(90°) + \sin(90°)i) \\ z_1 * z_2 &= 2 * (0 + i) \\ z_1 * z_2 &= 2i \end{aligned}$$

Resultado que coincide con el calculado anteriormente. La figura 13.6 ilustra el producto realizado.

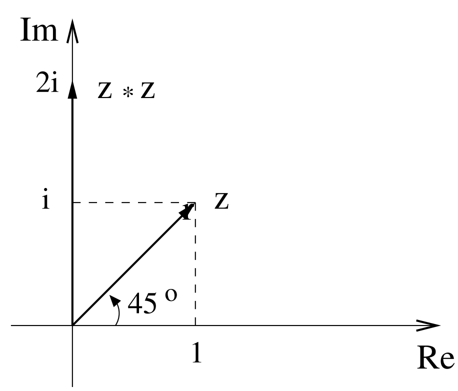


Figura 13.6: El producto $z * z = (1 + i) * (1 + i) = 2i$.

Para abordar la operación de división de números complejos, necesitamos introducir el concepto de los números complejos conjugados.

13.9. Números complejos conjugados

Sea $z = x + yi$ un número complejo. Decimos que el **número complejo conjugado** de z, denotado como $\overline{z}$, se expresa como:

$$\overline{z} = x - yi \tag{13.45}$$

La figura 13.7 muestra a $z = 1 + i$ y su conjugado $\overline{z} = 1 - i$. Observe que la magnitud se conserva, pero la fase del número conjugado es $-45°$. Veamos porque sucede esto.

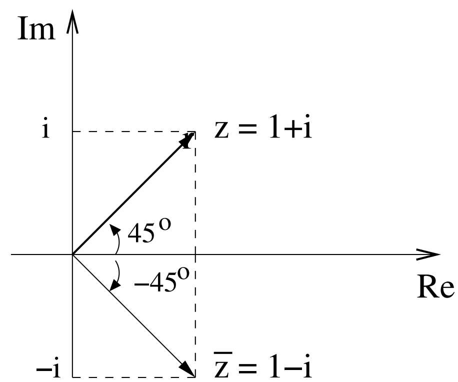


Figura 13.7: El número complejo $z = 1 + i$ y su conjugado $\overline{z} = 1 - i$.

Recordemos que el número z también lo podemos representar utilizando su magnitud y ángulo ($|z|\ \angle\theta$) como sigue:

$$z = (|z|\cos(\theta) + |z|\sin(\theta)i)$$

De manera que su número conjugado se expresar como sigue:

$$\begin{aligned} \overline{z} &= (|z|\cos(\theta) - |z|\sin(\theta)i) \\ \overline{z} &= |z| * (\cos(\theta) - \sin(\theta)i) \\ \overline{z} &= |z| * (\cos(-\theta) + \sin(-\theta)i) \end{aligned} \tag{13.46}$$

En este desarrollo se han utilizado las identidades trigonométricas $\cos(-\theta) = \cos(\theta)$ y $\sin(-\theta) = -\sin(\theta)$, vistas en la sección 9.3.2. Es decir, si el ángulo de z es θ, el ángulo de $\overline{z}$ es $-\theta$.

Número complejo conjugado. Sea z un número complejo en su forma binomial: $z = x + yi$ o en su forma polar: $z = |z|(\cos(\theta) + \sin(\theta)i)$. Se define el número complejo conjugado de z, denotado como $\overline{z}$, como:

$$\overline{z} = x - yi \tag{13.47}$$

$$\overline{z} = |z| * (\cos(\theta) - \sin(\theta)i) \tag{13.48}$$

$$\overline{z} = |z| * (\cos(-\theta) + \sin(-\theta)i) \tag{13.49}$$

Si $z = |z|\ \angle\theta$, entonces:

$$\overline{z} = |z|\ \angle - \theta$$

Como z tiene un ángulo (θ) y $\overline{z}$ tiene un ángulo ($-\theta$), cuando se multiplican el resultado va a tener un ángulo de

0, es decir, vamos a tener como producto a un número real. Veamos,

$$\begin{aligned}
z * \overline{z} &= |z| * (\cos(\theta) + \sin(\theta)i) * |z| * (\cos(-\theta) + \sin(-\theta)i) \\
z * \overline{z} &= |z| * |z|(\cos(\theta - \theta) + \sin(\theta - \theta)i) \\
z * \overline{z} &= |z| * |z|(\cos(0) + \sin(0)i) \\
z * \overline{z} &= |z| * |z|(1 + 0i) \\
z * \overline{z} &= |z| * |z|(1) \\
z * \overline{z} &= |z| * |z| \qquad (13.50) \\
z * \overline{z} &= |z|^2 \qquad (13.51)
\end{aligned}$$

Es decir, ya tenemos otra forma de calcular la magnitud $|z|$ de un número complejo:

$$|z| = \sqrt{z * \overline{z}} \qquad (13.52)$$

Magnitud de un número complejo. Si z y $\overline{z}$ son números complejos conjugados, se cumplen las siguientes propiedades:

$$\begin{aligned}
|z| &= |\overline{z}| \qquad (13.53) \\
|z|^2 &= z * \overline{z} \qquad (13.54) \\
|z| &= \sqrt{z * \overline{z}} \qquad (13.55)
\end{aligned}$$

Ya tenemos todos los elementos para abordar la división de números complejos.

13.10. División de números complejos

Para calcular la división del número complejo z_1 entre el número complejo z_2, aprovecharemos el hecho de que al multiplicar z_2 por su complejo conjugado $\overline{z_2}$, el resultado es un número real. Llevemos a cabo este proceso:

$$\begin{aligned}
\frac{z_1}{z_2} &= \frac{z_1}{z_2} \\
\frac{z_1}{z_2} &= \frac{z_1}{z_2} * \frac{\overline{z_2}}{\overline{z_2}} \\
\frac{z_1}{z_2} &= \frac{z_1 * \overline{z_2}}{z_2 * \overline{z_2}} \qquad (13.56) \\
\frac{z_1}{z_2} &= \frac{z_1 * \overline{z_2}}{|z_2|^2} \\
\frac{z_1}{z_2} &= \frac{1}{|z_2|^2} * (z_1 * \overline{z_2}) \qquad (13.57)
\end{aligned}$$

En este desarrollo se asume que las fracciones de números complejos cumplen las mismas propiedades de las fracciones que ya conocemos: $\overline{z_2}/\overline{z_2} = 1$ y se aplica el mismo procedimiento para multiplicar dos fracciones.

Como $|z_2|^2$ es un número real, la división de dos números complejos se convierte en el producto del número real $(\frac{1}{|z_2|^2})$ por el número complejo $(z_1 * \overline{z_2})$.

Veamos un ejemplo. Si $z_1 = 1 + i$ y $z_2 = i$, tenemos que $\overline{z_2} = -i$ y $|z_2| = 1$. Calculemos ahora z_1/z_2:

$$\begin{aligned}
\frac{z_1}{z_2} &= \frac{1}{|z_2|^2} * (z_1 * \overline{z_2}) \\
\frac{z_1}{z_2} &= \frac{1}{1^2} * ((1+i) * (-i)) \\
\frac{z_1}{z_2} &= -i - i^2 \\
\frac{z_1}{z_2} &= 1 - i
\end{aligned}$$

En Octave este calculo se puede efectuar de la siguiente manera:

```
>> z1 = 1 + i;
>> z2 = i;
>> z1 / z2
ans =  1 - 1i
```

La división de dos números complejos z_1 y z_2 está dada por:

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{z_1}{z_2} * \frac{\overline{z_2}}{\overline{z_2}} \tag{13.58}$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{1}{|z_2|^2} * (z_1 * \overline{z_2}) \tag{13.59}$$

Si expresamos los números complejos en sus parámetros como vectores:

$$\begin{aligned}
z_1 &= |z_1| * (\cos(\theta_1) + \sin(\theta_1)i) \\
z_2 &= |z_2| * (\cos(\theta_2) + \sin(\theta_2)i) \\
\overline{z_2} &= |z_2| * (\cos(-\theta_2) + \sin(-\theta_2)i)
\end{aligned}$$

Podemos continuar el desarrollo para ver que sucede realmente al dividir números complejos,

$$\begin{aligned}
\frac{z_1}{z_2} &= \frac{z_1}{z_2} \\
\frac{z_1}{z_2} &= \frac{1}{|z_2|^2} * (z_1 * \overline{z_2}) \\
\frac{z_1}{z_2} &= \frac{1}{|z_2|^2} * (|z_1||z_2|(\cos(\theta_1 - \theta_2) + \sin(\theta_1 - \theta_2)i) \\
\frac{z_1}{z_2} &= \frac{|z_1|}{|z_2|} * (\cos(\theta_1 - \theta_2) + \sin(\theta_1 - \theta_2)i)
\end{aligned} \tag{13.60}$$

Es decir, la magnitud del resultado es la división de las magnitudes ($|z_1|/|z_2|$) y la fase del resultado es la resta de las fases ($\theta_1 - \theta_2$).

Volvamos al ejemplo anterior. Si $z_1 = 1 + i$ y $z_2 = i$, tenemos que $|z_1| = \sqrt{2}$, $\theta_1 = 45°$, $|z_2| = 1$ y $\theta_2 = 90°$. Calculemos ahora la fracción z_1/z_2:

$$
\begin{aligned}
\frac{z_1}{z_2} &= \frac{\sqrt{2}}{1} * (\cos(45° - 90°) + \sin(45° - 90°)i) \\
\frac{z_1}{z_2} &= \sqrt{2} * (\cos(-45°) + \sin(-45°)i) \\
\frac{z_1}{z_2} &= \sqrt{2} * (\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}}i) \\
\frac{z_1}{z_2} &= 1 - i
\end{aligned}
$$

La división de dos números complejos z_1 y z_2 esta dada por:

$$
\begin{aligned}
\frac{z_1}{z_2} &= \frac{|z_1| * (\cos(\theta_1) + \sin(\theta_1)i)}{|z_2| * (\cos(\theta_2) + \sin(\theta_2)i)} \\
\frac{z_1}{z_2} &= \frac{|z_1|}{|z_2|} * (\cos(\theta_1 - \theta_2) + \sin(\theta_1 - \theta_2)i) \qquad (13.61)
\end{aligned}
$$

La magnitud del resultado es la división de las magnitudes de los números complejos y la fase del resultado es la resta de las fases de los números complejos. Usando la representación polar de los números complejos, tenemos:

$$\frac{|z_1|\ \angle\theta_1}{|z_2|\ \angle\theta_2} = \frac{|z_1|}{|z_2|}\ \angle(\theta_1 - \theta_2) \qquad (13.62)$$

13.10.1. Inverso multiplicativo de un número complejo

Veamos si $\frac{1}{z}$ sigue siendo el inverso multiplicativo del número complejo z. El producto $(z * \frac{1}{z})$ debe ser igual a la unidad:

$$\begin{aligned}
z * \frac{1}{z} &= z * \left(\frac{1}{z} * \frac{\overline{z}}{\overline{z}}\right) \\
z * \frac{1}{z} &= z * \frac{\overline{z}}{z * \overline{z}} \\
z * \frac{1}{z} &= z * \frac{\overline{z}}{|z|^2} \\
z * \frac{1}{z} &= z * \frac{1}{|z|^2} * \overline{z} \\
z * \frac{1}{z} &= \frac{1}{|z|^2} * (z * \overline{z}) \\
z * \frac{1}{z} &= \frac{1}{|z|^2} * |z|^2 \\
z * \frac{1}{z} &= 1 \qquad (13.63)
\end{aligned}$$

¡Efectivamente! Demos el siguiente paso, con el inverso multiplicativo podemos expresar la división de números complejos como una multiplicación, como lo hicimos con los números reales.

13.10.2. La división como una multiplicación

Veamos si la división de los números complejos z_1 y z_2 es igual al producto del número z_1 por el inverso multiplicativo de z_2. En el siguiente desarrollo vamos a comprobar que en realidad así sucede:

$$\begin{aligned}
z_1 * \frac{1}{z_2} &= z_1 * \frac{1}{z_2}\frac{\overline{z_2}}{\overline{z_2}} \\
z_1 * \frac{1}{z_2} &= z_1 * \frac{\overline{z_2}}{z_2 * \overline{z_2}} \\
z_1 * \frac{1}{z_2} &= z_1 * \frac{\overline{z_2}}{|z_2|^2} \\
z_1 * \frac{1}{z_2} &= z_1 * \frac{1}{|z_2|^2} * \overline{z_2} \\
z_1 * \frac{1}{z_2} &= \frac{1}{|z_2|^2} * (z_1 * \overline{z_2}) \\
z_1 * \frac{1}{z_2} &= \frac{z_1}{z_2} \qquad (13.64)
\end{aligned}$$

Para obtener la última expresión hemos utilizado el resultado de la ecuación 13.59.

13.11. Potencias de números complejos

En forma similar a como definimos la potencia de un número real, se pueden definir las potencias de un número complejo, aprovechando que ya sabemos multiplicar y dividir números complejos.

El número complejo z elevado a la potencia entera positiva n se define como:

$$z^n = 1 * z * z * \ldots * z \tag{13.65}$$

donde la z se repite como factor n veces. Por ejemplo:

$$\begin{aligned}
z^0 &= 1 \\
z^1 &= 1 * z \\
z^2 &= 1 * z * z \\
z^3 &= 1 * z * z * z
\end{aligned}$$

Ahora bien, si n es un entero negativo, tenemos :

$$z^{-n} = \frac{1}{z^n} \tag{13.66}$$

Las primeras potencias negativas son las siguientes: $z^{-1} = \frac{1}{z}$, $z^{-2} = \frac{1}{z^2}$, $z^{-3} = \frac{1}{z^3}$, etc. Como ejemplo calculemos $(1+i)^{-1}$:

$$\begin{aligned}
(1+i)^{-1} &= \frac{1}{1+i} \\
(1+i)^{-1} &= \frac{1}{1+i} * \frac{1-i}{1-i} \\
(1+i)^{-1} &= \frac{1-i}{(1+i)*(1-i)} \\
(1+i)^{-1} &= \frac{1-i}{1*(1-i)+i*(1-i)} \\
(1+i)^{-1} &= \frac{1-i}{1-i+i-i^2} \\
(1+i)^{-1} &= \frac{1-i}{1-i^2} \\
(1+i)^{-1} &= \frac{1-i}{1-(-1)} \\
(1+i)^{-1} &= \frac{1-i}{2} \\
(1+i)^{-1} &= \frac{1}{2} - \frac{1}{2}i
\end{aligned}$$

En Octave este calculo se puede efectuar de la siguiente manera:

```
>> (1 + i)^(-1)
ans =  0.50000 - 0.50000i
```

Veamos otro ejemplo al calcular las potencias enteras de i:

$$\begin{array}{rcl}
i^{-1} & = & \frac{1}{i} = \frac{1}{i} * \frac{-i}{-i} = \frac{-i}{-i^2} = \frac{-i}{-(-1)} = \frac{-i}{1} = -i \\
i^0 & = & 1 \\
i^1 & = & 1 * i = i \\
i^2 & = & -1 \\
i^3 & = & i^2 * i = (-1) * i = -i \\
i^4 & = & i^3 * i = (-i) * i = -i^2 = -(-1) = 1 \\
i^5 & = & i^4 * i = 1 * i = i \\
i^6 & = & i^4 * i^2 = 1 * i^2 = -1 \\
i^7 & = & i^4 * i^3 = 1 * i^3 = -i \\
i^8 & = & i^4 * i^4 = 1 * 1 = 1 \\
\ldots & = & \ldots \\
i^{4k+n} & = & i^n
\end{array}$$

Esta última igualdad se cumple si k es un entero. Veamos ahora las potencias enteras de i en función de los parámetros polares $(1, \theta)$:

$$\begin{array}{rcl}
i^{-1} & = & 1 * (\cos(-90^\circ) + \sin(-90^\circ)i) \\
i^0 & = & i^{-1} * i = 1 * (\cos(0^\circ) + \sin(0^\circ)i) \\
i^1 & = & i^0 * i = 1 * (\cos(90^\circ) + \sin(90^\circ)i) \\
i^2 & = & i^1 * i = 1 * (\cos(180^\circ) + \sin(180^\circ)i) \\
i^3 & = & i^2 * i = 1 * (\cos(270^\circ) + \sin(270^\circ)i) \\
i^4 & = & i^3 * i = 1 * (\cos(0^\circ) + \sin(0^\circ)i) \\
i^5 & = & i^4 * i = 1 * (\cos(90^\circ) + \sin(90^\circ)i) \\
i^6 & = & i^5 * i = 1 * (\cos(180^\circ) + \sin(180^\circ)i) \\
i^7 & = & i^6 * i = 1 * (\cos(270^\circ) + \sin(270^\circ)i) \\
i^8 & = & i^7 * i = 1 * (\cos(0^\circ) + \sin(0^\circ)i) \\
\ldots & = & \ldots \\
i^{4k+n} & = & i^{4k} * i^n = 1 * (\cos(n * 90^\circ) + \sin(n * 90^\circ)i)
\end{array}$$

En el caso general, si n es un entero positivo, tenemos que z^n se puede calcular como sigue:

$$\begin{array}{rcl}
z^n & = & 1 * z * z * z * \ldots * z \\
z^n & = & 1 * (|z| * (\cos(\theta) + \sin(\theta)i)) * (|z| * (\cos(\theta) + \sin(\theta)i)) * (|z| * (\cos(\theta) + \sin(\theta)i)) * \ldots \\
z^n & = & (|z|^2 * (\cos(2\theta) + \sin(2\theta)i)) * (|z| * (\cos(\theta) + \sin(\theta)i)) * \ldots \\
z^n & = & (|z|^3 * (\cos(3\theta) + \sin(3\theta)i)) * \ldots \\
z^n & = & |z|^n * (\cos(n\theta) + \sin(n\theta)i)
\end{array} \qquad (13.67)$$

Si $-n$ es un entero negativo, tenemos que z^{-n} se puede calcular como sigue:

$$\begin{aligned} z^{-n} &= \frac{1}{z^n} \\ z^{-n} &= \frac{1 * (\cos(0) + \sin(0)i)}{|z|^n * (\cos(n\theta) + \sin(n\theta)i)} \\ z^{-n} &= \frac{1}{|z|^n} * (\cos(0 - n\theta) + \sin(0 - n\theta)i) \\ z^{-n} &= |z|^{-n} * (\cos(-n\theta) + \sin(-n\theta)i) \end{aligned} \tag{13.68}$$

Potencias de un número complejo. Si $z = |z| * (\cos(\theta) + \sin(\theta)i)$ y n es un entero positivo o negativo, se cumple:

$$z^n = |z|^n * (\cos(n\theta) + \sin(n\theta)i) \tag{13.69}$$

El resultado tiene una magnitud $|z|^n$ y ángulo $n\theta$. Usando la representación polar de los números complejos, tenemos:

$$(|z| \angle\theta)^n = (|z|^n) \angle(n\theta) \tag{13.70}$$

Pasemos ahora a la operación inversa de elevación a una potencia, obtener las raíces de un número complejo.

13.12. Raíces de números complejos

Intentemos obtener una raíz cúbica del número complejo:

$$z = 8 * (\cos(60°) + \sin(60°)i)$$

Si z_0 fuera una raíz cubica de z, se tiene que cumplir que: $z = z_0^3$. Es decir

$$\begin{aligned} z &= z_0^3 \\ z &= (|z_0| * (\cos(\theta_0) + \sin(\theta_0)i))^3 \\ 8 * (\cos(60°) + \sin(60°)i) &= |z_0|^3 * (\cos(3\theta_0) + \sin(3\theta_0)i) \end{aligned}$$

Para que el número complejo del lado izquierdo de la igualdad sea el mismo número complejo del lado derecho, se debe cumplir que sus partes reales e imaginarias sean las mismas. Es decir, sus magnitudes y ángulos deben ser iguales. De esta manera tenemos que se deben de cumplir las siguientes restricciones:

$$\begin{aligned} 8 &= |z_0|^3 \\ 60° &= 3\ \theta_0 \end{aligned}$$

De la primera ecuación obtenemos: $|z_0| = \sqrt[3]{8} = 2$, y de la segunda ecuación obtenemos: $\theta_0 = 60°/3 = 20°$. Tenemos la primera raíz:

$$z_0 = 2 * (\cos(20°) + \sin(20°)i)$$

Ya sabemos que la raíz cuadrada de 1 tiene dos valores: 1 y -1. El número 1 tiene un ángulo de 0 y el -1 tiene un ángulo de $180° = 360°/2$. Utilizaremos el hecho de que las raíces están separadas por 180 grados, para probar si las raíces cúbicas difieren en múltiplos de $360°/3 = 120°$.

Probemos con $\theta_1 = 20° + 120°$:

$$\begin{aligned}
z_1 &= 2*(\cos(20° + 120°) + \sin(20° + 120°)i)\\
z_1^3 &= 2^3*(\cos(3*(20° + 120°)) + \sin(3*(20° + 120°))i)\\
z_1^3 &= 2^3*(\cos(3*20° + 3*120°) + \sin(3*20° + 3*120°)i)\\
z_1^3 &= 2^3*(\cos(3*20° + 360°) + \sin(3*20° + 360°)i)\\
z_1^3 &= 2^3*(\cos(3*20°) + \sin(3*20°)i)\\
z_1^3 &= 8*(\cos(60°) + \sin(60°)i)\\
z_1^3 &= z
\end{aligned}$$

¡Efectivamente! z_1 es otra raíz cúbica de z. Ahora probemos con $\theta_2 = 20° + 2*120°$:

$$\begin{aligned}
z_2 &= 2*(\cos(20° + 2*120°) + \sin(20° + 2*120°)i)\\
z_2^3 &= 2^3*(\cos(3*(20° + 2*120°)) + \sin(3*(20° + 2*120°))i)\\
z_2^3 &= 2^3*(\cos(3*20° + 3*2*120°) + \sin(3*20° + 3*2*120°)i)\\
z_2^3 &= 2^3*(\cos(3*20° + 720°) + \sin(3*20° + 720°)i)\\
z_2^3 &= 2^3*(\cos(3*20°) + \sin(3*20°)i)\\
z_2^3 &= 8*(\cos(60°) + \sin(60°)i)\\
z_2^3 &= z
\end{aligned}$$

Como era de esperarse, también z_2 es otra raíz cúbica de z. Las raíces tienen ángulos:

$$\begin{aligned}
\theta_0 &= 20° + 0*120° = 20°\\
\theta_1 &= 20° + 1*120° = 140°\\
\theta_2 &= 20° + 2*120° = 260°
\end{aligned}$$

Este procedimiento se puede generalizar para calcular las n raíces n-ésimas: z_0, z_1, ..., z_{n-1}, del número complejo z. En el caso anterior, $n = 3$ y las tres raíces cúbicas expresadas en forma polar son:

$$\begin{aligned}
z_0 &= 2\angle 20°\\
z_1 &= 2\angle 140°\\
z_2 &= 2\angle 260°
\end{aligned}$$

Raíces de un número complejo. Las n raíces n-ésimas de número complejo $z = |z|*(\cos(\theta)+\sin(\theta)i)$, denotada como $\sqrt[n]{z}$ o también como $z^{\frac{1}{n}}$, se pueden calcular como:

$$z_k = |z|^{\frac{1}{n}} * (\cos\left(\frac{\theta}{n} + k * \frac{360^\circ}{n}\right) + \sin\left(\frac{\theta}{n} + k * \frac{360^\circ}{n}\right) i) \tag{13.71}$$

Para valores de $k = 0, 1, \ldots (n-1)$. Usando la representación polar, tenemos:

$$z_k = |z|^{\frac{1}{n}} \angle \left(\frac{\theta}{n} + k * \frac{360^\circ}{n}\right) \tag{13.72}$$

Como ejemplo encontremos todos los valores de z que cumplen la ecuación:

$$z^4 = 16$$

Si elevamos a la potencia $\frac{1}{4}$ los dos lados de la ecuación, tenemos:

$$\begin{aligned} z^4 &= 16 \\ (z^4)^{1/4} &= (16)^{1/4} \\ z &= (16)^{1/4} \end{aligned}$$

El numero 16 tiene una magnitud $|z| = 16$ y un ángulo $\theta = 0$. Por lo tanto sus raíces son:

$$\begin{aligned} z_k &= |z|^{\frac{1}{n}} * (\cos\left(\frac{\theta}{n} + k * \frac{360}{n}\right) + \sin\left(\frac{\theta}{n} + k * \frac{360}{n}\right) i) \\ z_k &= 16^{\frac{1}{4}} * (\cos\left(\frac{0}{4} + k * \frac{360}{4}\right) + \sin\left(\frac{0}{4} + k * \frac{360}{4}\right) i) \\ z_k &= 2 * (\cos(0 + k * 90) + \sin(0 + k * 90) i) \\ z_k &= 2 * (\cos(k * 90) + \sin(k * 90) i) \\ z_0 &= 2 * (\cos(0) + \sin(0) i) = 2 * (1 + 0i) = 2 \\ z_1 &= 2 * (\cos(90) + \sin(90) i) = 2 * (0 + i) = 2i \\ z_2 &= 2 * (\cos(180) + \sin(180) i) = 2 * (-1 + 0i) = -2 \\ z_3 &= 2 * (\cos(270) + \sin(270) i) = 2 * (0 - i) = -2i \end{aligned}$$

Comprobemos que estos resultados son correctos:

$$\begin{aligned} z_0^4 &= 2^4 = 2 * 2 * 2 * 2 = 16 \\ z_1^4 &= (2i)^4 = 2^4 * i^4 = 16 * i^2 * i^2 = 16 * (-1) * (-1) = 16 \\ z_2^4 &= (-2)^4 = (-2) * (-2) * (-2) * (-2) = 16 \\ z_3^4 &= (-2i)^4 = (-2)^4 * i^4 = 16 * i^2 * i^2 = 16 * (-1) * (-1) = 16 \end{aligned}$$

13.13. Aplicaciones de los números complejos

13.13.1. Aplicación en geometría

El siguiente problema se describe en un libro de acertijos matemáticos (Gardner, 1981). Si tenemos tres cuadrados, como se muestra en la figura 13.8, demostrar que se cumple la relación de los ángulos:

$$\gamma + \beta = \alpha$$

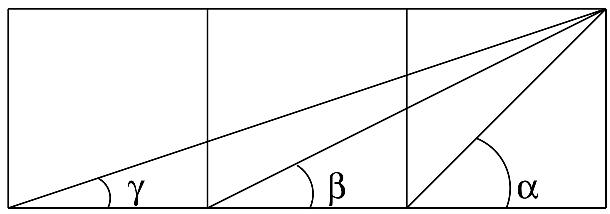


Figura 13.8: El problema de demostrar que $\gamma + \beta = \alpha$.

Para resolver este problema aplicando lo que hemos aprendido de números complejos, sea z_1, z_2 y z_3 los números complejos que se muestran en la figura 13.9.

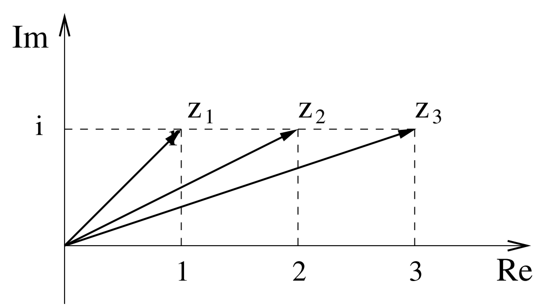


Figura 13.9: El problema equivalente de demostrar que $\theta_3 + \theta_2 = \theta_1$, donde θ_i corresponde al ángulo del número complejo z_i.

Estos números complejos los podemos expresar como sigue en la forma binomial y como vector:

- $z_1 = 1 + i$, $z_1 = (|z_1|, \theta_1)$. De las figuras 13.8 y 13.9 podemos ver que se cumple que: $\theta_1 = \alpha$.
- $z_2 = 2 + i$, $z_2 = (|z_2|, \theta_2)$. En este caso podemos ver que: $\theta_2 = \beta$.
- $z_3 = 3 + i$, $z_3 = (|z_3|, \theta_3)$. Finalmente tenemos que: $\theta_3 = \gamma$.

En términos de los ángulos de estos vectores, el problema es demostrar que:

$$\theta_3 + \theta_2 = \theta_1$$

Para determinar $\theta_3 + \theta_2$ podemos multiplicar los números complejos $z_3 * z_2$, puesto que sabemos que el ángulo del producto es la suma de los ángulos de los factores:

$$\begin{aligned}
z_3 * z_2 &= (3+i)*(2+i) \\
z_3 * z_2 &= (3)(2) + 3i + 2i + i^2 \\
z_3 * z_2 &= 6 + 3i + 2i + (-1) \\
z_3 * z_2 &= (6-1) + (3+2)i \\
z_3 * z_2 &= 5 + 5i \\
z_3 * z_2 &= 5*(1+i) \\
z_3 * z_2 &= 5z_1
\end{aligned}$$

Llegamos al resultado deseado, el ángulo de $z_3 * z_2$ es el mismo que el ángulo de z_1, puesto que $5z_1$ tiene el mismo ángulo que z_1, sólo cambia la magnitud. Es decir, se cumple que $\theta_3 + \theta_2 = \theta_1$.

13.13.2. Solución general de ecuaciones cuadráticas

Calculemos la solución de la ecuación cuadrática: $x^2 + 2x + 2 = 0$, usando la fórmula general:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2*a}$$

Recordemos que la ecuación cuadrática general se define como:

$$ax^2 + bx + c = 0$$

En este caso, $a = 1$, $b = 2$ y $c = 2$. Procedamos a calcular las raíces:

$$\begin{aligned}
x &= \frac{-2 \pm \sqrt{2^2 - 4(1)(2)}}{2*(1)} \\
x &= \frac{-2 \pm \sqrt{-4}}{2} \\
x &= \frac{-2 \pm \sqrt{4*(-1)}}{2} \\
x &= \frac{-2 \pm \sqrt{4}\sqrt{-1}}{2} \\
x &= \frac{-2 \pm 2i}{2} \\
x &= -1 \pm i
\end{aligned}$$

Las raíces son: $x_1 = -1 + i$ y $x_2 = -1 - i$, dos números complejos conjugados. Como ejercicio, probemos que efectivamente la raíz $x = -1 + i$, cumple la ecuación cuadrática:

$$\begin{aligned}
x^2 + 2x + 2 &= x^2 + 2x + 2 \\
x^2 + 2x + 2 &= (-1 + i)^2 + 2 * (-1 + i) + 2 \\
x^2 + 2x + 2 &= (-1 + i) * (-1 + i) + 2 * (-1 + i) + 2 \\
x^2 + 2x + 2 &= ((-1)^2 + (-1)i + (-1)i + i^2) + 2 * (-1 + i) + 2 \\
x^2 + 2x + 2 &= (1 - 2i + (-1)) + 2 * (-1) + 2i + 2 \\
x^2 + 2x + 2 &= -2i + -2 + 2i + 2 \\
x^2 + 2x + 2 &= 0
\end{aligned}$$

Al igual que ocurre con las raíces reales, comprobemos ahora que efectivamente el polinomio original $x^2 + 2x + 2$ se puede factorizar como el producto de $(x - x_1) * (x - x_2)$:

$$\begin{aligned}
(x - x_1) * (x - x_2) &= (x - x_1) * (x - x_2) \\
(x - x_1) * (x - x_2) &= (x - (-1 + i)) * (x - (-1 - i)) \\
(x - x_1) * (x - x_2) &= x^2 - x(-1 - i) - x(-1 + i) + (-1 + i) * (1 - i)) \\
(x - x_1) * (x - x_2) &= x^2 - x((-1 - i) + (-1 + i)) + ((-1)^2 - i^2) \\
(x - x_1) * (x - x_2) &= x^2 - x(-2) + (1 - (-1)) \\
(x - x_1) * (x - x_2) &= x^2 + 2x + 2
\end{aligned}$$

Con esto hemos llegado a un resultado muy importante.

Raíces de una ecuación cuadrática. La ecuación cuadrática $x^2 + bx + c = 0$ tiene:

- Dos raíces reales, si $(b^2 - 4ac) \geq 0$.
- Dos raíces complejas conjugadas, si $(b^2 - 4ac) < 0$.

13.14. Ejercicios propuestos

1. Encuentre el valor del número z en la forma de binomio, $z = x + yi$, en las siguientes expresiones:

   a) $z = (1 + 3i) + (3 + 5i)$
   b) $z = (1 + 3i) - 2 * (3 + 5i)$
   c) $z = (-1 + i) * (-1 - i)$
   d) $z = (-1 + i) * \overline{(-1 - i)}$
   e) $z = \frac{-10+10i}{5+5i}$

2. Encuentre el valor del número z en la forma polar, $|z| \angle\theta$, en las siguientes expresiones:

a) $z = \frac{-10+10i}{-2-2i}$

b) $z = (\sqrt{2} + \sqrt{2}\, i)^4$

c) $z = (\sqrt{2} + \sqrt{2}\, i)^{-4}$

d) $z = (-2 + i) * (-2 + i)^3$

e) $z = \frac{(-1+i)*(2+i)}{(3+3i)*(3-3i)}$

3. Encuentre los valores de k_1 y k_2 que satisfacen la siguiente ecuación:

$$(1 + k_1 i) = (k_2 + 5i)$$

4. Encuentre el valor de k que satisface la siguiente ecuación:

$$(1 + ki) * (1 - ki) = 10$$

5. Encuentre todos los valores de z que cumplen las siguientes ecuaciones:

a) $z^2 = 9$

b) $z^2 = -9$

c) $z^{10} = 1024$

d) $z^9 = \sqrt{2} + \sqrt{2}i$

e) $z^2 - 2z = -2$

f) $z^3 - z^2 = 0$

g) $z^4 + z^2 = 0$

6. Encuentre todos los valores de z que cumplen las siguientes ecuaciones:

a) $\frac{1}{z} + z + 1 = 2$

b) $\frac{1}{z} + 2z + 1 = 2 + 5z$

c) $\frac{1}{z+3} + 2z + 1 = 2 + 5z$

d) $\frac{1}{z+1} + (2 + i)(2 - i) = z + 1$

e) $\frac{1}{z} = i$

f) $\frac{2+i}{z} = 3 - i$

g) $z * \frac{2+i}{i} = 1 + i$

Capítulo 14

Evaluación 3

Resuelva los ejercicios propuestos, anotando clara y ordenadamente la secuencia de pasos que le lleva a la solución.

1. Encuentre todos los valores de x que satisfacen la siguiente ecuación. Exprese sus resultados en términos del número a ($a \neq 0$).
$$\frac{a}{-2} + \frac{1}{\frac{-3}{2}(\frac{1}{2a-x} - \frac{1}{2a+x})} = \frac{a}{2}$$

2. Tres baúles contienen monedas. Uno de ellos tiene una etiqueta que dice “oro”, otro presenta una inscripción que se leé “bronce”, y el tercero un letrero que dice “oro o plata”. Uno de los baúles contiene exclusivamente monedas de oro, otro sólo monedas de plata y un tercero sólo monedas de bronce, pero los tres baúles están incorrectamente etiquetados. ¿Cuántos baúles hay que abrir como mínimo para determinar el contenido de cada uno de ellos?

3. Encuentre los conjuntos A y B si $A - B = \{1, 2, 3, a\}$, $A \cap B = \{5, b, c\}$ y $B - A = \{x, y, z, u, v\}$.

4. Considere el conjunto Universo como el conjunto N de los números naturales.
   Sea el conjunto $A = \{x | \frac{x}{2} \in N\}$ y el conjunto $B = \{x | \frac{x}{3} \in N\}$. Determine el resultado de $A^c \cap B$.

5. En una reunión coinciden un total de 125 personas, de los cuales 85 son policías y 57 son delincuentes. ¿Es posible determinar si hay policías delincuentes en la reunión? De ser posible, determine dicha cantidad de personas.

6. Dados los conjuntos $A = \{a, b\}$, $B = \{1, 2, 3\}$ y $C = \{+, -\}$. Calcule: $(A \times B) \times C$.

7. Encuentre el valor de x y y en la siguiente ecuación:
$$(x + y\sqrt{-1})(1 - \sqrt{-4}) = -1 + \sqrt{-64}$$

8. Exprese el valor de x que cumple la siguiente ecuación:
$$\frac{-1 - \sqrt{-4}}{(1 + \sqrt{-3}) * (1 - \sqrt{-3})} = \sqrt{-25} * x$$

Capítulo 15

Sistemas de ecuaciones lineales

En este capítulo se plantean sistemas de m ecuaciones lineales con n variables: x_1, x_2, ..., x_n, de la forma:

$$\begin{array}{ccccccccc} a_{1,1}\,x_1 & + & a_{1,2}\,x_2 & + & \ldots & + & a_{1,n}\,x_n & = & b_1 \\ a_{2,1}\,x_1 & + & a_{2,2}\,x_2 & + & \ldots & + & a_{2,n}\,x_n & = & b_2 \\ \vdots & & & & & & & & \\ a_{m,1}\,x_1 & + & a_{m,2}\,x_2 & + & \ldots & + & a_{m,n}\,x_n & = & b_m \end{array} \tag{15.1}$$

Donde $a_{1,1}$ es el coeficiente que multiplica a la variable x_1 en la primera ecuación y puede ser un número real o complejo; $a_{1,2}$ es el coeficiente que multiplica a la variable x_2 en la primera ecuación. De esta manera $a_{i,j}$ representa, en la ecuación i, el coeficiente de la variable x_j; y b_i es una constante real o compleja ubicada en el lado derecho de la ecuación i, llamada término independiente. Por ejemplo, el siguiente sistema de ecuaciones tiene tres ecuaciones con tres variables:

$$\begin{array}{ccccccc} (0)x_1 & + & (1)x_2 & + & (1)x_3 & = & 5 \\ (2)x_1 & + & (2)x_2 & + & (-2)x_3 & = & 0 \\ (-2)x_1 & + & (1)x_2 & + & (1)x_3 & = & 3 \end{array} \tag{15.2}$$

Decimos que una asignación de un valor para cada una de las variables es una solución del sistema de ecuaciones, cuando todas las igualdades se hacen ciertas. En este caso, el lector puede comprobar que la asignación siguiente de valores a las tres variables: $x_1 = 1$, $x_2 = 2$ y $x_3 = 3$, constituye una solución del sistema de ecuaciones. Cualquier otra asignación de valores a las variables no es una solución de este sistema. Por ejemplo $x_1 = 0$, $x_2 = 0$ y $x_3 = 0$ no es una solución del sistema de ecuaciones porque sólo se hace verdadera la segunda igualdad, pero no las otras dos:

$$\begin{array}{cccccccc} (0)(0) & + & (1)(0) & + & (1)(0) & = & 5 & \text{primera igualdad} \\ & & & & 0 & = & 5 & \text{es falsa} \\ (2)(0) & + & (2)(0) & + & (-2)(0) & = & 0 & \text{segunda igualdad} \\ & & & & 0 & = & 0 & \text{es verdadera} \\ (-2)(0) & + & (1)(0) & + & (1)(0) & = & 3 & \text{tercera igualdad} \\ & & & & 0 & = & 3 & \text{es falsa} \end{array}$$

Como veremos en este capítulo, **un sistema de ecuaciones puede tener una solución, no tener solución o bien tener un número infinito de soluciones**.

La solución de sistemas de ecuaciones lineales es fundamental en la ciencia y en la ingeniería. En muchas ocasiones la solución de problemas reales involucra resolver sistemas de ecuaciones lineales con cientos o miles de variables, usando computadoras para realizar los cálculos.

15.1. Operaciones elementales para resolver sistemas de ecuaciones

Para resolver sistemas de ecuaciones se utilizan las propiedades de la igualdad que se vieron en la sección 8.2. En particular se tienen las siguientes propiedades, que se conocen como **operaciones elementales**:

1. La igualdad se conserva si se multiplican ambos miembros de la igualdad por la misma cantidad (distinta de cero). Utilizando nuestros conocimientos de lógica, podemos decir que la siguiente implicación es cierta:

   $$(a = b) \wedge (k \neq 0) \rightarrow (ka = kb)$$

   Para tener una notación compacta para manejar ecuaciones, vamos a utilizar el símbolo E_i para referirnos a la ecuación i-ésima (ambos miembros de la igualdad). De esta manera, para indicar que la ecuación E_i se multiplica por una constante k y el resultado es la nueva ecuación E_i, se expresa de la siguiente forma [1]:

   $$E_i \leftarrow k * E_i$$

2. Una igualdad se conserva si se le suma un múltiplo k de otra igualdad. Utilizando la representación lógica, si $a = b$ y $c = d$ tenemos que la siguiente implicación es cierta:

   $$(a = b) \wedge (k \neq 0) \wedge (c = d) \rightarrow (a + kc = b + kd)$$

   Con la notación compacta para representar ecuaciones, podemos expresar que a la ecuación E_i se le suma otra ecuación $k * E_j$, de la siguiente manera:

   $$E_i \leftarrow E_i + k * E_j$$

3. Un sistema de ecuaciones no se altera, cuando se intercambian de lugar dos ecuaciones. Esta operación la representamos con la notación:

   $$E_i \leftrightarrow E_j$$

   Por ejemplo, el resultado de la operación $E_1 \leftrightarrow E_2$, intercambia los lugares de las ecuaciones 1 y 2.

Operaciones elementales sobre ecuaciones:

1. La ecuación E_i se multiplica por una constante k:

   $$E_i \leftarrow k * E_i \tag{15.3}$$

2. La ecuación E_j se multiplica por una constante k y se suma a la ecuación E_i:

   $$E_i \leftarrow E_i + k * E_j \tag{15.4}$$

3. Las ecuaciones E_i y E_j se intercambian de lugar:

   $$E_i \leftrightarrow E_j \tag{15.5}$$

[1] Esta notación tiene semejanza con la forma de asignar un valor a una variable en los lenguajes de programación, donde la variable del lado izquierdo se ve reemplazada por el resultado de la operación del lado derecho. Por ejemplo, para expresar que la variable x incrementa su valor en una unidad, se utiliza: $x \leftarrow x + 1$.

Con estas tres sencillas operaciones elementales se pueden resolver los sistemas de ecuaciones lineales. Veamos el caso más sencillo, cuando se tiene igual cantidad de ecuaciones que de incógnitas o variables.

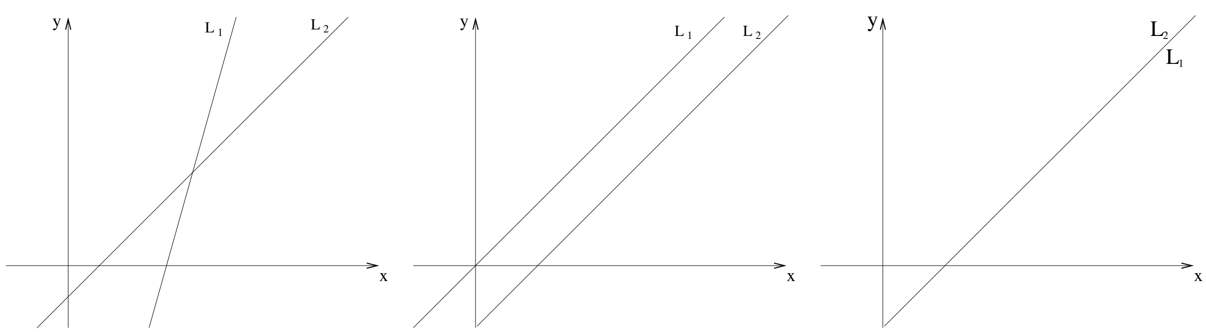
15.2. Sistemas de ecuaciones con igual número de ecuaciones y variables

Veamos el siguiente ejemplo de un sistema de dos ecuaciones y dos variables:

$$\begin{array}{ccccc} a_{1,1}\,x & + & a_{1,2}\,y & = & b_1 \\ a_{2,1}\,x & + & a_{2,2}\,y & = & b_2 \end{array} \tag{15.6}$$

Donde las variables x_1 y x_2 se han reemplazado por las variables más conocidas: x, y. Podemos observar que cada ecuación es la expresión general de una línea recta, como vimos en la sección 8.8.2. De manera que podemos graficar cada ecuación en el plano y observar el comportamiento de las dos rectas. Se pueden tener tres casos posibles, ilustrados en la figura 15.1:

1. Dos líneas rectas que se cruzan en un único punto. Las coordenadas del punto de cruce representa la solución única del sistema de ecuaciones.
2. Dos líneas rectas que son paralelas. En este caso no se cruzan las rectas en ningún punto y por lo tanto no existe ninguna combinación de valores para las variables x, y, que satisfaga el sistema de ecuaciones. Es decir, el sistema de ecuaciones no tiene solución.
3. Dos rectas que son coincidentes. En este caso cualquier punto de la recta es una solución del sistema de ecuaciones. Es decir, existe un número infinito de soluciones.



(a) Rectas secantes, solución única. (b) Rectas paralelas, no hay solución. (c) Rectas coincidentes, infinitas soluciones.

Figura 15.1: Soluciones de un sistema de ecuaciones.

Veamos estos tres casos mediante ejemplos.

15.2.1. Caso de una solución única

Consideremos el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{array}{ccccc} -x & + & y & = & 0 \\ x & + & y & = & 1 \end{array} \tag{15.7}$$

La primera de estas ecuaciones también se puede expresar de la forma:

$$y = x$$

Esta ecuación corresponde a una recta que pasa por el origen, con pendiente unitaria y que tiene un ángulo de inclinación de 45 grados. Recuerde que la ecuación de la recta sigue la forma: $y = mx + b$, donde la pendiente $m = \tan(\theta)$, siendo θ el ángulo de inclinación. El lector interesado puede volver a revisar la sección 9.2.1 para recordar estos conceptos.

La segunda ecuación del sistema también se puede expresar de la forma:

$$y = -x + 1$$

Que corresponde a una recta con un ángulo de inclinación de -45 grados, correspondiente a la pendiente unitaria negativa. Utilizando Octave, podemos graficar fácilmente estas dos rectas:

```
>> x = [0:0.1:2];
>> y1 = x;
>> y2 = -x + 1;
>> plot(x,y1)
>> hold on
>> grid on
>> plot(x,y2)
>> xlabel ('x','fontsize',22)
>> ylabel ('y','fontsize',22)
>> print -color -depsc archivo.eps
```

Es conveniente mencionar que el comando de Octave: "hold on", tiene el efecto de que las siguientes llamadas a la función plot se grafican sobre la primera gráfica. La figura 15.2 muestra la gráfica obtenida. Se han agregado las etiquetas: E1 para indicar la recta que representa a la primera ecuación y la etiqueta E2 para la recta que representa a la segunda ecuación. De la gráfica podemos observar que las coordenadas $x = 0.5, y = 0.5$ corresponde al punto donde se cruzan las dos rectas; y por lo tanto es la solución única del sistema de ecuaciones.

Para encontrar la solución también podemos aplicar algunas de las operaciones elementales que vimos en la sección 15.1, sobre el sistema de ecuaciones original:

$$\begin{array}{rcrcl}
-x & + & y & = & 0 \qquad (E_1) \\
x & + & y & = & 1 \qquad (E_2)
\end{array}$$

- Operación elemental: $E_1 \leftarrow (-1) * E_1$

$$\begin{array}{ccccc}
(-1)*(-x) & + & (-1)*y & = & (-1)*0 \qquad (E_1 \leftarrow (-1)*E_1) \\
x & + & y & = & 1 \qquad (E_2)
\end{array}$$

  Obteniendo como resultado:

$$\begin{array}{ccccc}
x & + & -y & = & 0 \qquad (E_1) \\
x & + & y & = & 1 \qquad (E_2)
\end{array}$$

- Operación elemental: $E_2 \leftarrow E_2 - E_1$

$$\begin{array}{ccccc}
x & + & -y & = & 0 \qquad (E_1) \\
x - x & + & y - (-y) & = & 1 - 0 \qquad (E_2 \leftarrow E_2 - E_1)
\end{array}$$

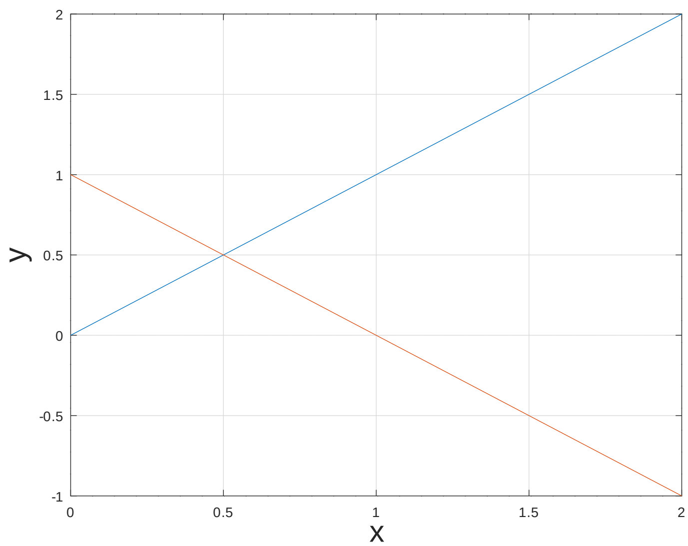


Figura 15.2: Caso de dos rectas que se cruzan en un punto.

Obteniendo como resultado:

$$\begin{array}{cccccc} x & + & -y & = & 0 & \quad (E_1) \\ 0 & + & 2y & = & 1 & \quad (E_2) \end{array}$$

- Operación elemental: $E_2 \leftarrow \frac{1}{2} * E_2$

$$\begin{array}{cccccc} x & + & -y & = & 0 & \quad (E_1) \\ \frac{1}{2}*0 & + & \frac{1}{2}*2y & = & \frac{1}{2}*1 & \quad (E_2 \leftarrow \frac{1}{2}*E_2) \end{array}$$

Obteniendo como resultado:

$$\begin{array}{cccccc} x & + & -y & = & 0 & \quad (E_1) \\ 0 & + & y & = & \frac{1}{2} & \quad (E_2) \end{array}$$

- Operación elemental: $E_1 \leftarrow E_1 + E_2$

$$\begin{array}{cccccc} x+0 & + & -y+y & = & 0+\frac{1}{2} & \quad (E_1 \leftarrow E_1 + E_2) \\ 0 & + & y & = & \frac{1}{2} & \quad (E_2) \end{array}$$

Obteniendo como resultado:

$$\begin{array}{cccccc} x & + & 0 & = & \frac{1}{2} & \quad (E_1) \\ 0 & + & y & = & \frac{1}{2} & \quad (E_2) \end{array}$$

La primera ecuación representa la recta vertical que pasa por $x = \frac{1}{2}$, mientras que la segunda ecuación representa la recta horizontal que pasa por $y = \frac{1}{2}$. De manera que $x = \frac{1}{2}$ y $y = \frac{1}{2}$ constituye la solución única que satisface a las dos ecuaciones.

Utilizando matrices para simplificar las operaciones

El sistema de ecuaciones anterior:

$$\begin{array}{rcrcl} -x & + & y & = & 0 \\ x & + & y & = & 1 \end{array}$$

Se puede simplificar si omitimos las variables y el símbolo de igual, dejando solamente los coeficientes $a_{i,j}$ y b_i, de esta forma:

$$\begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

A un arreglo rectangular de números como éstos se le conoce como una **matriz** y es objeto de estudio del siguiente capítulo. En este caso, esta matriz tiene 2 renglones y 3 columnas y se dice que la matriz tiene una dimensión o tamaño de 2×3. El primer renglón, que nos referiremos como R_1, corresponde a la primera ecuación y el segundo renglón, R_2, corresponde a la segunda ecuación.

En Octave esta matriz se puede asignar a la variable A de la siguiente forma:

```
>> A = [-1 1 0; 1 1 1]
A =
  -1   1   0
   1   1   1
```

Observe que se utiliza el símbolo: “;” para cambiar de renglón. Usando la representación de una matriz, las operaciones elementales para resolver el sistema de ecuaciones se puede representar como sigue:

- Operación elemental: $E_1 \leftarrow (-1) * E_1$

  Operación elemental en la matriz: $R_1 \leftarrow (-1) * R_1$

  En Octave, esta operación se lleva a cabo de la siguiente forma:

  ```
  >> A(1,:) = -1 .* A(1,:)
  A =
     1  -1  -0
     1   1   1
  ```

  Observe que la notación A(1,:) se utiliza para referirse al primer renglón de la matriz; de manera que cuando se multiplica -1 .* A(1,:), se multiplica cada elemento del primer renglón por -1.

- Operación elemental: $E_2 \leftarrow E_2 - E_1$

  Operación elemental en la matriz: $R_2 \leftarrow R_2 - R_1$

  En Octave, esta operación se lleva a cabo de la siguiente forma:

  ```
  >> A(2,:) = A(2,:) - A(1,:)
  A =
     1  -1  -0
     0   2   1
  ```

- Operación elemental: $E_2 \leftarrow \frac{1}{2} * E_2$

  Operación elemental en la matriz: $R_2 \leftarrow \frac{1}{2} * R_2$

  En Octave, esta operación se lleva a cabo de la siguiente forma:

```
>> A(2,:) = 0.5 * A(2,:)
A =
   1.00000  -1.00000  -0.00000
   0.00000   1.00000   0.50000
```

- Operación elemental: $E_1 \leftarrow E_1 + E_2$

  Operación elemental en la matriz: $R_1 \leftarrow R_1 + R_2$

  En Octave, esta operación se lleva a cabo de la siguiente forma:

```
>> A(1,:) = A(1,:) + A(2,:)
A =
   1.00000   0.00000   0.50000
   0.00000   1.00000   0.50000
```

  Si convertimos esta matriz al sistema de ecuaciones equivalente, tenemos:

$$\begin{array}{ccccc} (1)x & + & (0)y & = & 0.5 \\ (0)x & + & (1)y & = & 0.5 \end{array}$$

  Es decir, obtuvimos el mismo resultado: $x = \frac{1}{2}$ y $y = \frac{1}{2}$.

Este resultado se puede generalizar a sistemas de n ecuaciones con n variables.

Sistemas de ecuaciones lineales con solución única. Si al realizar operaciones elementales sobre el sistema de ecuaciones obtenemos un sistema de la forma:

$$\begin{array}{ccccccccc} x_1 & + & (0)x_2 & + & \cdots & (0)x_n & = & b_1 \\ (0)x_1 & + & x_2 & + & \cdots & (0)x_n & = & b_2 \\ \vdots & & & & & & & \\ (0)x_1 & + & (0)x_2 & + & \cdots & x_n & = & b_n \end{array} \tag{15.8}$$

El sistema tiene la solución única: $x_1 = b_1, x_2 = b_2, \cdots, x_n = b_n$.

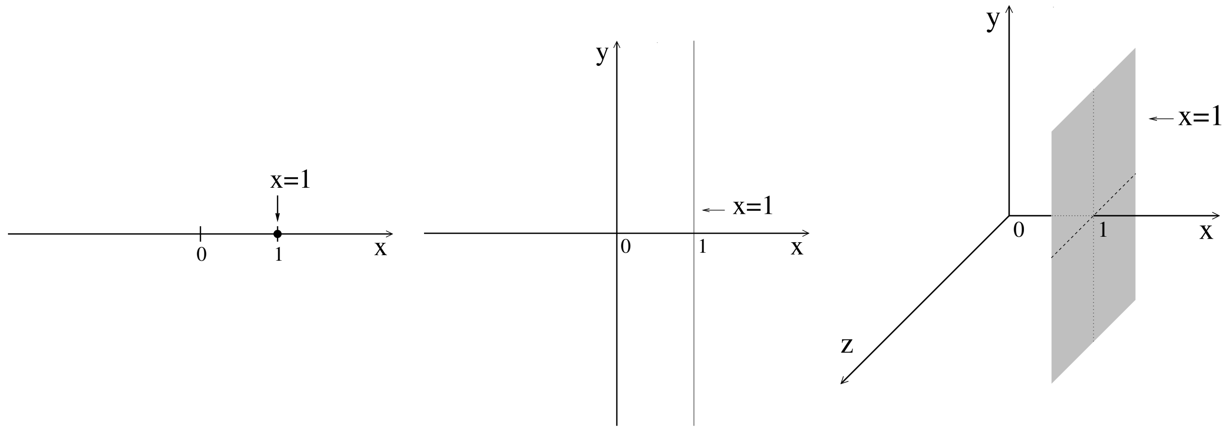
Conviene resaltar que aunque parece lo mismo que:

$$\begin{aligned} x &= 1 \\ x + 0y &= 1 \\ x + 0y + 0z &= 1 \end{aligned}$$

El significado es muy diferente. En el primer caso tenemos que $x = 1$, lo cual representa que la variable x toma el valor de 1 y se representa como un punto en la recta numérica, como lo ilustra la figura 15.3(a).

En el segundo caso tenemos que $x + 0y = 1$. Es decir: $x = 1$, nuevamente la variable x toma el valor de 1, pero la variable y puede tomar cualquier valor real. Esto representa una infinidad de puntos que componen la recta vertical en el plano cartesiano xy, que pasa por el punto $(1, 0)$, como lo muestra la figura 15.3(b).

Finalmente, en el tercer caso tenemos que $x + 0y + 0z = 1$. Nuevamente tenemos que $x = 1$ y la variable x toma el valor de 1. Sin embargo, las variables y y z pueden tomar cualquier valor real. Esto representa una infinidad de puntos de un plano que corta el eje x en el punto $(1, 0, 0)$, como se ilustra en la figura 15.3(c). Este plano es paralelo al plano que forman los ejes y y z.



(a) $x = 1$ (b) $x + 0y = 1$ (c) $x + 0y + 0z = 1$

Figura 15.3: Diferentes interpretaciones para $x = 1$, dependiendo de las variables involucradas en la ecuación.

15.2.2. Caso sin solución

Consideremos el siguiente ejemplo:

$$\begin{array}{rcrcr} -x & + & y = & 0 \\ -2x & + & 2y = & 2 \end{array} \tag{15.9}$$

La primera de estas ecuaciones ya la hemos visto y corresponde a la primera recta del caso anterior: $y = x$, una recta con un ángulo de inclinación de 45 grados que pasa por el origen. La segunda ecuación del sistema también se puede expresar de la forma:

$$y = x + 1$$

Que corresponde también a una recta con un ángulo de inclinación de 45 grados pero que pasa por el punto $(0, 1)$. Utilizando Octave, podemos graficar fácilmente estas dos rectas:

```
>> x = [0:0.1:2];
>> y1 = x;
>> y2 = x + 1;
>> plot(x,y1)
>> hold on
>> plot(x,y2)
>> xlabel ('x')
>> ylabel ('y')
```

La figura 15.4 muestra la gráfica obtenida. Podemos observar claramente que son rectas paralelas, no se cruzan, y por lo tanto no existe una asignación de valores para x, y que haga ciertas ambas igualdades. Es decir, el sistema de ecuaciones no tiene solución.

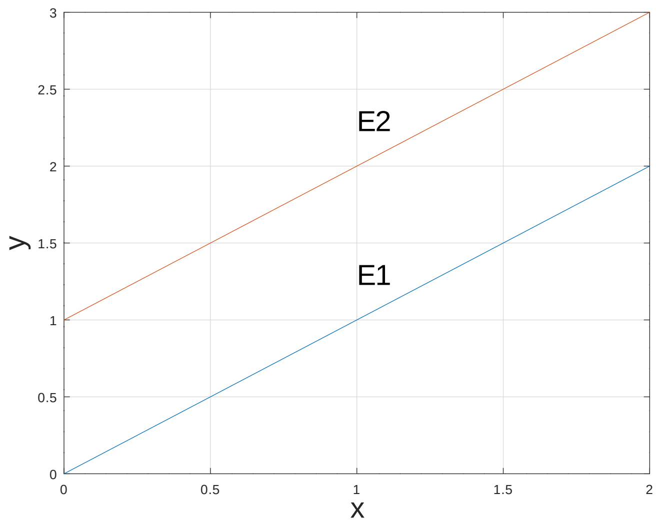


Figura 15.4: Caso de dos rectas paralelas.

Operaciones elementales utilizando matrices

Veamos ahora como resolver este sistema de ecuaciones al utilizar operaciones elementales. El sistema de ecuaciones anterior:

$$\begin{array}{rcrcr} -x & + & y & = & 0 \\ -2x & + & 2y & = & 2 \end{array}$$

Se puede representar por la matriz:

$$\begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ -2 & 2 & 2 \end{bmatrix}$$

En Octave esta matriz se puede asignar a la variable A de la siguiente forma:

```
>> A = [-1 1 0; -2 2 2]
A =
  -1   1   0
  -2   2   2
```

Las operaciones elementales para resolver el sistema de ecuaciones, utilizando las operaciones sobre renglones de la matriz, se pueden expresar como sigue:

- Operación elemental en la matriz: $R_1 \leftarrow (-1) * R_1$

  En Octave, esta operación se lleva a cabo de la siguiente forma:

  ```
  >> A(1,:) = -1 .* A(1,:)
  A =
     1  -1  -0
    -2   2   2
  ```

- Operación elemental en la matriz: $R_2 \leftarrow R_2 + 2 * R_1$

  En Octave, esta operación se lleva a cabo de la siguiente forma:

```
>> A(2,:) = A(2,:) + 2*A(1,:)
A =
    1  -1  -0
    0   0   2
```

  El segundo renglón corresponde a la ecuación:

$$0 * x + 0 * y = 2$$

  Analicemos con mucho cuidado esta ecuación. Para cualquier valor de x y de y, como se multiplican por 0, el resultado del lado izquierdo de la igualdad es 0. Es decir, tenemos:

$$0 = 2$$

  Esta igualdad es falsa y por lo tanto no existe combinación de valores de las variables x, y, que haga que esta igualdad sea verdadera. Es decir, el sistema de ecuaciones no tiene solución.

Sistemas de ecuaciones lineales sin solución. Si al realizar operaciones elementales sobre el sistema de ecuaciones obtenemos alguna ecuación de la forma:

$$(0)x_1 \quad + \quad (0)x_2 \quad \cdots \quad (0)x_n \quad = \quad b \tag{15.10}$$

Si $b \neq 0$, entonces el sistema de ecuaciones no tiene solución.

15.2.3. Caso con infinidad de soluciones

Consideremos el siguiente ejemplo:

$$\begin{array}{rcrcl} -x & + & y & = & 0 \\ -2x & + & 2y & = & 0 \end{array} \tag{15.11}$$

La primera de estas ecuaciones ya la hemos visto y corresponde a la primera recta del caso anterior: $y = x$. La segunda ecuación del sistema también se puede expresar de la forma:

$$y = x$$

Que corresponde a la misma recta anterior. La figura 15.5 muestra la gráfica para este caso. Podemos observar que todos los puntos de la recta corresponden a soluciones del sistema de ecuaciones. Es decir, el sistema de ecuaciones tiene un número infinito de soluciones.

Todos los puntos de la recta definida por la primera ecuación:

$$x - y = 0$$

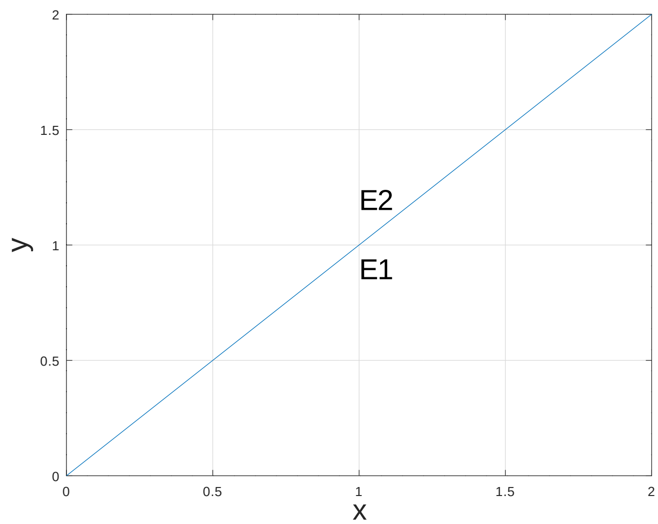


Figura 15.5: Caso de dos rectas coincidentes.

Constituyen soluciones del sistema de ecuaciones original. Como $y = x$, podemos asignar un parámetro α a x y obtener que $y = \alpha$, de manera que la solución del sistema está dada por:

$$\begin{aligned} x &= \alpha \\ y &= \alpha \end{aligned}$$

Siendo α un número real.

Operaciones elementales utilizando matrices

Veamos ahora como resolver este sistema de ecuaciones al utilizar operaciones elementales. El sistema de ecuaciones anterior:

$$\begin{array}{rcrcl} -x & + & y & = & 0 \\ -2x & + & 2y & = & 0 \end{array}$$

Se puede representar por la matriz:

$$\begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ -2 & 2 & 0 \end{bmatrix}$$

En Octave esta matriz se puede asignar a la variable A de la siguiente forma:

```
>> A = [-1 1 0; -2 2 0]
A =
   -1    1    0
   -2    2    0
```

Las operaciones elementales para resolver el sistema de ecuaciones se puede expresar como sigue:

- Operación elemental en la matriz: $R_1 \leftarrow (-1) * R_1$

  En Octave, esta operación se lleva a cabo de la siguiente forma:

```
>> A(1,:) = -1 .* A(1,:)
A =
    1  -1  -0
   -2   2   0
```

- Operación elemental en la matriz: $R_2 \leftarrow R_2 + 2 * R_1$

  En Octave, esta operación se lleva a cabo de la siguiente forma:

```
>> A(2,:) = A(2,:) + 2 * A(1,:)
A =
    1  -1  -0
    0   0   0
```

  Esta matriz corresponde al sistema de ecuaciones:

$$\begin{array}{rcrcl} (1)x & + & (-1)y & = & 0 \\ (0)x & + & (0)y & = & 0 \end{array}$$

  Analicemos con mucho cuidado la segunda ecuación. Para cualquier combinación de valores de x y de y, como se multiplican por 0, el resultado del lado izquierdo de la igualdad es 0. Es decir, obtenemos que la igualdad es siempre cierta: $0 = 0$, para cualquier valor de x y de y.

  Esto significa que el sistema de ecuaciones realmente tiene una única ecuación: la primera, debido a que la segunda ecuación es la primera ecuación multiplicada por una constante. De manera que todos los valores (x, y) que corresponden a puntos de la recta definida por la primera ecuación, son soluciones del sistema de ecuaciones.

Sistemas de ecuaciones lineales con infinitas soluciones. Si al realizar operaciones elementales sobre el sistema de ecuaciones obtenemos alguna ecuación de la forma:

$$(0)x_1 \quad + \quad (0)x_2 \quad \cdots \quad (0)x_n \quad = \quad 0 \tag{15.12}$$

Entonces el sistema de ecuaciones tiene una infinidad de soluciones definidas por las otras ecuaciones del sistema.

Enseguida se presenta un método sistemático para resolver sistemas de ecuaciones lineales aplicando operaciones elementales.

15.3. Método de Gauss-Jordan para resolver sistemas de ecuaciones

El método de Gauss-Jordan para resolver sistemas de ecuaciones se basa en utilizar operaciones elementales para pasar de un sistema de ecuaciones como el mostrado al inicio del capítulo (sistema 15.2):

$$\begin{array}{rcrcrcr} (0)x_1 & + & (1)x_2 & + & (1)x_3 & = & 5 \\ (2)x_1 & + & (2)x_2 & + & (-2)x_3 & = & 0 \\ (-2)x_1 & + & (1)x_2 & + & (1)x_3 & = & 3 \end{array}$$

A otro sistema que representa la solución del sistema:

$$\begin{array}{rcrcrcr} (1)x_1 & + & (0)x_2 & + & (0)x_3 & = & 1 \\ (0)x_1 & + & (1)x_2 & + & (0)x_3 & = & 2 \\ (0)x_1 & + & (0)x_2 & + & (1)x_3 & = & 3 \end{array}$$

Utilizando la representación matricial, tenemos que la matriz $\mathbf{A}$ representa el sistema de ecuaciones original, mientras que la matriz $\mathbf{S}$ representa la solución del sistema:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 5 \\ 2 & 2 & -2 & 0 \\ -2 & 1 & 1 & 3 \end{bmatrix} \quad , \quad \mathbf{S} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

Utilizando Octave para realizar los cálculos, veamos cómo se puede ir transformando la matriz $\mathbf{A}$ para que adopte la forma de la matriz $\mathbf{S}$, aplicando operaciones elementales.

- Operación elemental: $R_1 \leftrightarrow R_2$.

```
>> A = [0 1 1 5; 2 2 -2 0; -2 1 1 3];
>> T = A(1,:);
>> A(1,:) = A(2,:);
>> A(2,:) = T
A =
   2   2  -2   0
   0   1   1   5
  -2   1   1   3
```

  El objetivo de este intercambio de renglones es tener una primera ecuación cuyo coeficiente $a_{1,1}$ sea diferente de 0. En Octave, se utilizó la variable auxiliar T para realizar el intercambio de renglones de la matriz.

- Operación elemental: $R_1 \leftarrow \frac{1}{2} * R_1$.

```
>> A(1,:) = (1/2) * A(1,:)
A =
   1   1  -1   0
   0   1   1   5
  -2   1   1   3
```

  El lector puede comprobar que: $R_1 \leftarrow \frac{1}{a_{1,1}} * R_1$, logra el objetivo de tener una primera ecuación cuyo nuevo coeficiente $a_{1,1}$ sea unitario.

- Operación elemental: $R_3 \leftarrow R_3 - (-2) * R_1$.

```
>> A(3,:) = A(3,:) - (-2) * A(1,:)
A =
   1   1  -1   0
   0   1   1   5
   0   3  -1   3
```

El lector puede comprobar que: $R_3 \leftarrow R_3 + (-a_{3,1}) * R_1$, logra el objetivo de tener una tercera ecuación cuyo nuevo coeficiente $a_{3,1}$ sea cero. Hasta aquí se han logrado obtener los nuevos valores de $a_{1,1} = 1$, $a_{2,1} = 0$, y $a_{3,1} = 0$.

- Operación elemental: $R_1 \leftarrow R_1 - R_2$.

```
>> A(1,:) = A(1,:) - A(2,:)
A =
   1   0  -2  -5
   0   1   1   5
   0   3  -1   3
```

- Operación elemental: $R_3 \leftarrow R_3 - 3 * R_2$.

```
>> A(3,:) = A(3,:) - 3 A(2,:)
A =
     1     0    -2    -5
     0     1     1     5
     0     0    -4   -12
```

Estos dos últimos pasos han logrado que los nuevos valores sean $a_{1,2} = 0$, y $a_{3,2} = 0$.

- Operación elemental: $R_3 \leftarrow \frac{1}{-4} * R_3$.

```
>> A(3,:) = (1/-4) * A(3,:)
A =
     1     0    -2    -5
     0     1     1     5
     0     0     1     3
```

- Operación elemental: $R_2 \leftarrow R_2 - R_3$.

```
>> A(2,:) = A(2,:) - A(3,:)
A =
     1     0    -2    -5
     0     1     0     2
     0     0     1     3
```

- Operación elemental: $R_1 \leftarrow R_1 - (-2) * R_3$.

```
>> A(1,:) = A(1,:) - (-2) * A(3,:)
A =
     1     0     0     1
     0     1     0     2
     0     0     1     3
```

Esta matriz corresponde al sistema de ecuaciones que nos da la solución única: $x_1 = 1$, $x_2 = 2$ y $x_3 = 3$. Recuerde el lector que no siempre es posible tener este resultado de solución única, también están los casos de infinitas soluciones y ninguna solución, como se ha visto en la sección anterior.

El lector puede apreciar que la estrategia ha consistido en que la matriz $\mathbf{A}$ se vaya cambiando poco a poco para tomar la forma de la matriz $\mathbf{S}$, transformando una columna a la vez, iniciando con la primera columna, después la segunda columna, etc.

En resumen, el método de Gauss-Jordan para resolver el sistema de n ecuaciones, realiza lo siguiente:

1. Se forma la matriz $\mathbf{A}$. La matriz $\mathbf{A}$ tiene n renglones: $R_1, R_2, \ldots R_n$. Un elemento en particular del renglón r, columna c, de $\mathbf{A}$ se denota como $a_{r,c}$.
2. Iniciar con un valor de $a_{1,1} \neq 0$, intercambiando renglones de ser necesario.
3. Lograr que el elemento $a_{1,1}$ sea la unidad.

   Para lograr este objetivo se multiplica el renglón 1 de la matriz por $\frac{1}{a_{1,1}}$, es decir:
   $$R_1 \leftarrow \left(\frac{1}{a_{1,1}}\right) R_1$$
4. Convertir en ceros los demás elementos de la primera columna.

   Para lograr este objetivo se aplica en el renglón R_i ($i = 2, \ldots, n$) la siguiente operación elemental:
   $$R_i \leftarrow R_i - (a_{i,1})R_1$$
5. Iniciar con un valor de $a_{2,2} \neq 0$, intercambiando renglones de ser necesario.
6. Lograr que $a_{2,2}$ sea 1.

   Para lograr este objetivo se multiplica el renglón 2 de matriz por $\frac{1}{a_{2,2}}$, es decir:
   $$R_2 \leftarrow \left(\frac{1}{a_{2,2}}\right) R_2$$
7. Convertir en ceros los demás elementos de la segunda columna.

   Para lograr este objetivo se aplica en el renglón R_i ($i = 1, \ldots, n;\ i \neq 2$) la siguiente operación elemental:
   $$R_i \leftarrow R_i - (a_{i,2})R_2$$
8. Los tres pasos anteriores se repiten para lograr que $a_{j,j} = 1$ ($j = 3, 4 \ldots, n$) y los demás elementos de la columna j sean todos 0. Al final la solución del sistema de ecuaciones queda definido por la última columna de la matriz.

Veamos el método en acción en un sistema de ecuaciones con coeficientes reales y en otro con coeficientes complejos.

15.3.1. Ejemplo: sistema de ecuaciones con números reales

Consideremos el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{array}{ccccccccc}
2x_1 & + & 4x_2 & + & 6x_3 & + & 2x_4 & = & 2 \\
2x_1 & + & 2x_2 & + & (-1)x_3 & + & 3x_4 & = & 9 \\
x_1 & + & (-1)x_2 & + & 4x_3 & + & x_4 & = & -3 \\
(-2)x_1 & + & 2x_2 & + & 4x_3 & + & 4x_4 & = & 6
\end{array}$$

El cual puede representarse por la siguiente matriz $\mathbf{A}$ en Octave:

```
A=[2 4 6 2 2; 2 2 -1 3 9; 1 -1 4 1 -3; -2 2 4 4 6]
A =
   2   4   6   2   2
   2   2  -1   3   9
   1  -1   4   1  -3
  -2   2   4   4   6
```

Realicemos operaciones elementales para transformar las columnas de **A**, aprovechando la facilidad que nos proporciona Octave para realizar operaciones con renglones completos de la matriz.

1. Operaciones sobre la primera columna de la matriz **A**.

   a) Operación elemental: $R_1 \leftarrow \frac{1}{a_{1,1}} * R_1$

   ```
   >> A(1,:) = 1/A(1,1) * A(1,:)
   A =
      1   2   3   1   1
      2   2  -1   3   9
      1  -1   4   1  -3
     -2   2   4   4   6
   ```

   Observe que A(1,1) representa al elemento $a_{1,1}$ de la matriz **A**.

   b) Operación elemental: $R_2 \leftarrow R_2 - a_{2,1} * R_1$

   ```
   >> A(2,:) = A(2,:) - A(2,1) * A(1,:)
   A =
      1   2   3   1   1
      0  -2  -7   1   7
      1  -1   4   1  -3
     -2   2   4   4   6
   ```

   c) Operación elemental: $R_3 \leftarrow R_3 - a_{3,1} * R_1$

   ```
   >> A(3,:) = A(3,:) - A(3,1) * A(1,:)
   A =
      1   2   3   1   1
      0  -2  -7   1   7
      0  -3   1   0  -4
     -2   2   4   4   6
   ```

   d) Operación elemental: $R_4 \leftarrow R_4 - a_{4,1} * R_1$

   ```
   >> A(4,:) = A(4,:) - A(4,1) * A(1,:)
   A =
       1    2    3    1    1
       0   -2   -7    1    7
       0   -3    1    0   -4
       0    6   10    6    8
   ```

2. Operaciones sobre la segunda columna de la matriz **A**.

   a) Operación elemental: $R_2 \leftarrow \frac{1}{a_{2,2}} * R_2$

   ```
   >> A(2,:) = 1/A(2,2) * A(2,:)
   A =
       1.00000    2.00000    3.00000    1.00000    1.00000
   ```

```
    -0.00000    1.00000    3.50000   -0.50000   -3.50000
     0.00000   -3.00000    1.00000    0.00000   -4.00000
     0.00000    6.00000   10.00000    6.00000    8.00000
```

b) Operación elemental: $R_1 \leftarrow R_1 - a_{1,2} * R_2$

```
>> A(1,:) = A(1,:) - A(1,2) * A(2,:)
A =
     1.00000    0.00000   -4.00000    2.00000    8.00000
    -0.00000    1.00000    3.50000   -0.50000   -3.50000
     0.00000   -3.00000    1.00000    0.00000   -4.00000
     0.00000    6.00000   10.00000    6.00000    8.00000
```

c) Operación elemental: $R_3 \leftarrow R_3 - a_{3,2} * R_2$

```
>> A(3,:) = A(3,:) - A(3,2) * A(2,:)
A =
     1.00000    0.00000   -4.00000    2.00000    8.00000
    -0.00000    1.00000    3.50000   -0.50000   -3.50000
     0.00000    0.00000   11.50000   -1.50000  -14.50000
     0.00000    6.00000   10.00000    6.00000    8.00000
```

d) Operación elemental: $R_4 \leftarrow R_4 - a_{4,2} * R_2$

```
>> A(4,:) = A(4,:) - A(4,2) * A(2,:)
A =
     1.00000    0.00000   -4.00000    2.00000    8.00000
    -0.00000    1.00000    3.50000   -0.50000   -3.50000
     0.00000    0.00000   11.50000   -1.50000  -14.50000
     0.00000    0.00000  -11.00000    9.00000   29.00000
```

3. Operaciones sobre la tercera columna de la matriz $\mathbf{A}$.

a) Operación elemental: $R_3 \leftarrow \frac{1}{a_{3,3}} * R_3$

```
>> A(3,:) = 1/A(3,3) * A(3,:)
A =
     1.00000    0.00000   -4.00000    2.00000    8.00000
    -0.00000    1.00000    3.50000   -0.50000   -3.50000
     0.00000    0.00000    1.00000   -0.13043   -1.26087
     0.00000    0.00000  -11.00000    9.00000   29.00000
```

b) Operación elemental: $R_1 \leftarrow R_1 - a_{1,3} * R_3$

```
>> A(1,:) = A(1,:) - A(1,3) * A(3,:)
A =
     1.00000    0.00000    0.00000    1.47826    2.95652
    -0.00000    1.00000    3.50000   -0.50000   -3.50000
     0.00000    0.00000    1.00000   -0.13043   -1.26087
     0.00000    0.00000  -11.00000    9.00000   29.00000
```

c) Operación elemental: $R_2 \leftarrow R_2 - a_{2,3} * R_3$

```
>> A(2,:) = A(2,:) - A(2,3) * A(3,:)
A =
     1.00000    0.00000    0.00000    1.47826    2.95652
    -0.00000    1.00000    0.00000   -0.04348    0.91304
     0.00000    0.00000    1.00000   -0.13043   -1.26087
     0.00000    0.00000  -11.00000    9.00000   29.00000
```

d) Operación elemental: $R_4 \leftarrow R_4 - a_{4,3} * R_3$

```
>> A(4,:) = A(4,:) - A(4,3) * A(3,:)
A =
    1.00000    0.00000    0.00000    1.47826    2.95652
   -0.00000    1.00000    0.00000   -0.04348    0.91304
    0.00000    0.00000    1.00000   -0.13043   -1.26087
    0.00000    0.00000    0.00000    7.56522   15.13043
```

4. Operaciones sobre la cuarta columna de la matriz **A**.

a) Operación elemental: $R_4 \leftarrow \frac{1}{a_{4,4}} * R_4$

```
>> A(4,:) = 1/A(4,4) * A(4,:)
A =
   1.00000   0.00000   0.00000   1.47826   2.95652
  -0.00000   1.00000   0.00000  -0.04348   0.91304
   0.00000   0.00000   1.00000  -0.13043  -1.26087
   0.00000   0.00000   0.00000   1.00000   2.00000
```

b) Operación elemental: $R_1 \leftarrow R_1 - a_{1,4} * R_4$

```
>> A(1,:) = A(1,:) - A(1,4) * A(4,:)
A =
   1.00000   0.00000   0.00000   0.00000   0.00000
  -0.00000   1.00000   0.00000  -0.04348   0.91304
   0.00000   0.00000   1.00000  -0.13043  -1.26087
   0.00000   0.00000   0.00000   1.00000   2.00000
```

c) Operación elemental: $R_2 \leftarrow R_2 - a_{2,4} * R_4$

```
>> A(2,:) = A(2,:) - A(2,4) * A(4,:)
A =
   1.00000   0.00000   0.00000   0.00000   0.00000
   0.00000   1.00000   0.00000   0.00000   1.00000
   0.00000   0.00000   1.00000  -0.13043  -1.26087
   0.00000   0.00000   0.00000   1.00000   2.00000
```

d) Operación elemental: $R_3 \leftarrow R_3 - a_{3,4} * R_4$

```
>> A(3,:) = A(3,:) - A(3,4) * A(4,:)
A =
   1.00000   0.00000   0.00000   0.00000   0.00000
   0.00000   1.00000   0.00000   0.00000   1.00000
   0.00000   0.00000   1.00000   0.00000  -1.00000
   0.00000   0.00000   0.00000   1.00000   2.00000
```

De esta forma la solución de este sistema de ecuaciones está dada por la última columna de la matriz: $x_1 = 0$, $x_2 = 1$, $x_3 = -1$ y $x_4 = 2$.

15.3.2. Ejemplo: sistema de ecuaciones con números complejos

Consideremos el siguiente sistema de ecuaciones lineales que contiene coeficientes y términos independientes complejos:

$$\begin{array}{rcrcl} (i)\,x_1 & + & (1+i)\,x_2 & = & 2 \\ (1+i)\,x_1 & + & (2-i)\,x_2 & = & 1+i \end{array}$$

El cual puede representarse por la siguiente matriz **A** en Octave:

```
>> A=[i (1+i) 2; (1+i) (2-i) 1+i]
A =
   0 + 1i   1 + 1i   2 + 0i
   1 + 1i   2 - 1i   1 + 1i
```

Realicemos operaciones elementales para transformar las columnas de **A**, aprovechando la facilidad que nos proporciona Octave de realizar operaciones con números complejos:

1. Operaciones sobre la primera columna de la matriz **A**.

   a) Operación elemental: $R_1 \leftarrow \frac{1}{a_{1,1}} * R_1$

   ```
   >> A(1,:) = 1/A(1,1) * A(1,:)
   A =
      1 + 0i   1 - 1i   0 - 2i
      1 + 1i   2 - 1i   1 + 1i
   ```

   b) Operación elemental: $R_2 \leftarrow R_2 - a_{2,1} * R_1$

   ```
   >> A(2,:) = A(2,:) - A(2,1) * A(1,:)
   A =
      1 + 0i   1 - 1i   0 - 2i
      0 + 0i   0 - 1i  -1 + 3i
   ```

2. Operaciones sobre la segunda columna de la matriz **A**.

   a) Operación elemental: $R_2 \leftarrow \frac{1}{a_{2,2}} * R_2$

   ```
   >> A(2,:) = 1/A(2,2) * A(2,:)
   A =
      1 + 0i   1 - 1i   0 - 2i
     -0 + 0i   1 + 0i  -3 - 1i
   ```

   b) Operación elemental: $R_1 \leftarrow R_1 - a_{1,2} * R_2$

   ```
   >> A(1,:) = A(1,:) - A(1,2) * A(2,:)
   A =
      1 + 0i   0 + 0i   4 - 4i
     -0 + 0i   1 + 0i  -3 - 1i
   ```

El lector puede observar que se sigue el mismo procedimiento para una matriz con números reales o con números complejos. La única diferencia es que las operaciones involucradas de producto, resta y división se realizan entre números complejos. De esta forma, la solución de este sistema de ecuaciones está dada por la última columna de la matriz: $x_1 = 4 - 4i$ y $x_2 = -3 - i$.

15.4. Sistemas de ecuaciones con menos ecuaciones que variables

En un sistema de ecuaciones con menos ecuaciones que variables se excluye la posibilidad de obtener una solución única y sólo quedan las opciones de infinitas soluciones o ninguna solución.

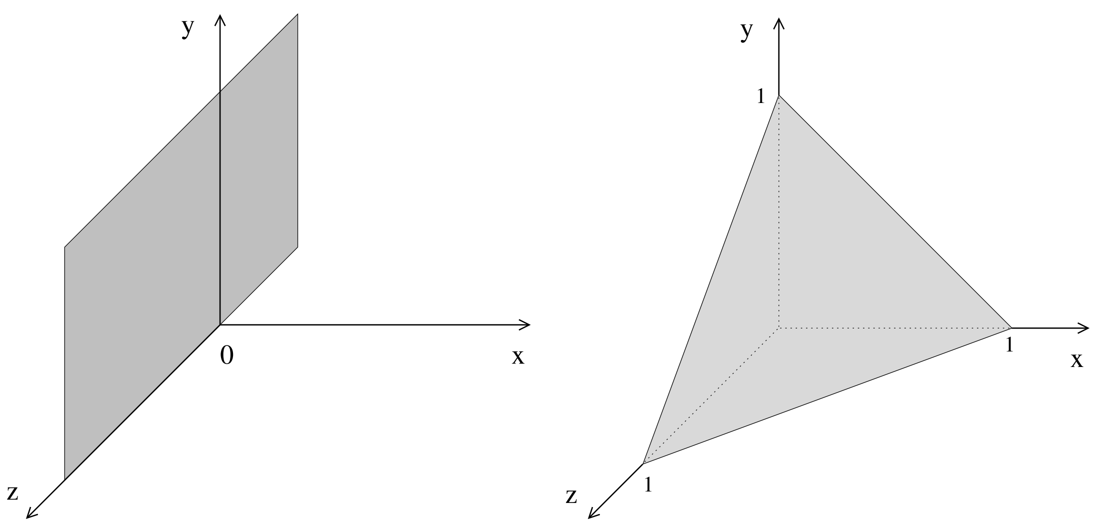
15.4.1. Caso de infinitas soluciones

Consideremos el siguiente sistema de 2 ecuaciones con 3 variables (x, y, z):

$$\begin{array}{ccccccc} x & + & (0)y & + & (0)z & = & 0 \\ x & + & y & + & z & = & 1 \end{array}$$

Es conveniente indicar que la ecuación $ax + by + cz = d$ es la ecuación general de un plano en un espacio de tres dimensiones. Veamos cada ecuación por separado:

- La primera ecuación $x = 0$ indica el plano compuesto por todos los puntos $(0, \alpha, \beta)$, donde α y β son números reales. Es decir, son los puntos contenidos en el plano que forman los ejes y y z y que pasa por la coordenada $x = 0$, como se observa en la figura 15.6(a).
- La segunda ecuación $x + y + z = 1$ indica un plano que pasa por los puntos $P_1 = (1, 0, 0)$, $P_2 = (0, 1, 0)$ y $P_3 = (0, 0, 1)$, como se indica en la figura 15.6(b). El punto P_1 se obtiene al hacer $y = 0$ y $z = 0$ en la ecuación del plano $x + y + z = 1$, obteniendo $x = 1$. El punto P_2 se obtiene al hacer $x = 0$ y $z = 0$ en la ecuación del plano, obteniendo $y = 1$. El punto P_3 se obtiene al hacer $x = 0$ y $y = 0$ en la ecuación del plano, obteniendo $z = 1$.



(a) $x = 0$ (b) $x + y + z = 1$

Figura 15.6: Planos definidos por las ecuaciones.

Como se puede observar en las figuras, los dos planos se interceptan en una línea que contiene los puntos $(0, 1, 0)$ y $(0, 0, 1)$. Para encontrar las infinitas soluciones de este sistema de ecuaciones restemos la primera ecuación a la segunda, para tener el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{array}{ccccccc} x & + & (0)y & + & (0)z & = & 0 \\ 0 & + & y & + & z & = & 1 \end{array}$$

Llegamos a las ecuaciones: $x = 0$, $y + z = 1$. Si $y = \alpha$, tenemos que $z = 1 - \alpha$. Así, las soluciones de este sistema de ecuaciones se pueden expresar en función del parámetro α (un número real):

$$\begin{array}{rcl} x & = & 0 \\ y & = & \alpha \\ z & = & 1 - \alpha \end{array}$$

Esto quiere decir que todos los puntos $(0, \alpha, 1 - \alpha)$ forman la línea que expresa la solución de este sistema de ecuaciones.

15.4.2. Caso de no existencia de soluciones

Consideremos el siguiente sistema de 2 ecuaciones con 3 variables (x, y, z):

$$\begin{array}{ccccccc} x & + & y & + & z & = & 1 \\ x & + & y & + & z & = & 2 \end{array}$$

Ya conocemos que la primera ecuación representa el plano representado en la figura 15.6(b). El lector puede comprobar fácilmente que la segunda ecuación representa un plano paralelo al plano anterior, pero que pasa por los puntos $P_1 = (2, 0, 0)$, $P_2 = (0, 2, 0)$ y $P_3 = (0, 0, 2)$. Como son planos paralelos, no se tocan y por lo tanto no existen soluciones a este sistema de ecuaciones.

Si restamos la primera ecuación a la segunda, tenemos el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{array}{ccccccc} x & + & y & + & z & = & 1 \\ 0 & + & 0 & + & 0 & = & 1 \end{array}$$

La última de estas ecuaciones expresa: $0 = 1$. Esta igualdad es falsa, sin importar los valores que se les asignen a las variables. Es decir, no existe solución a este sistema de ecuaciones.

15.5. Sistemas de ecuaciones lineales homogéneas

Abordemos ahora la situación del siguiente sistema de n ecuaciones con n variables, donde los valores del lado derecho de las igualdades son ceros:

$$\begin{array}{ccccccccc} a_{1,1}\, x_1 & + & a_{1,2}\, x_2 & + & \ldots & + & a_{1,n}\, x_n & = & 0 \\ a_{2,1}\, x_1 & + & a_{2,2}\, x_2 & + & \ldots & + & a_{2,n}\, x_n & = & 0 \\ \vdots & & & & & & & & \\ a_{m,1}\, x_1 & + & a_{m,2}\, x_2 & + & \ldots & + & a_{m,n}\, x_n & = & 0 \end{array} \tag{15.13}$$

A estos sistemas se les conoce como **sistemas homogéneos**.

Si todas las variables asumen un valor de 0, el sistema de ecuaciones se satisface. A esta solución se le conoce como solución trivial.

En general se presentan dos casos:

- La solución única es la trivial, si el resultado de aplicar el método de Gauss-Jordan es el siguiente:

$$\begin{array}{ccccccccc} x_1 & + & 0*\ x_2 & + & \dots & + & 0*\ x_n & = & 0 \\ 0*\ x_1 & + & x_2 & + & \dots & + & 0*\ x_n & = & 0 \\ \vdots & & & & & & & & \\ 0*\ x_1 & + & 0*\ x_2 & + & \dots & + & x_n & = & 0 \end{array} \tag{15.14}$$

- Soluciones infinitas si al aplicar el método de Gauss-Jordan nos encontramos con al menos una ecuación del tipo $0 = 0$ (o su equivalente con al menos un renglón de ceros en la matriz), indicando que existe un número infinito de soluciones.

Veamos un ejemplo, para ilustrar ambos casos.

Ejemplo de un sistema homogéneo

Consideremos el sistema de ecuaciones:

$$\begin{array}{ccccc} x & + & y & = & 0 \\ x & - & ky & = & 0 \end{array}$$

El problema consiste en determinar el valor de k para que este sistema de ecuaciones tenga sólo la solución trivial o un número infinito de soluciones.

Si a la segunda ecuación le restamos la primera ecuación, tenemos el sistema:

$$\begin{array}{ccccc} x & + & y & = & 0 \\ 0 & + & (-k-1)y & = & 0 \end{array}$$

Para que la segunda ecuación sea del tipo $0 = 0$ se requiere que: $-k - 1 = 0$. Es decir, si $k = -1$ entonces el sistema tiene infinitas soluciones dadas por la primera ecuación: $x + y = 0$ (o su forma equivalente $y = -x$). En este caso, las soluciones están dadas por:

$$\begin{array}{ccc} x & = & \alpha \\ y & = & -\alpha \end{array}$$

donde α es un número real.

Por otro lado, si $k \neq -1$ podemos dividir la segunda ecuación por $(-k - 1)$, para obtener $y = 0$ y finalmente $x = 0$, la solución trivial.

15.6. Comentarios finales

Una última categoría son los sistemas de ecuaciones que contienen más ecuaciones que variables. Sin embargo, para su solución se requiere avanzar en el conocimiento de las matrices y su aplicación a los sistemas de ecuaciones, objeto de estudio del siguiente capítulo. En la sección 16.9 abordaremos los sistemas que tienen más ecuaciones que variables.

15.7. Ejercicios

1. Un bat y una pelota de beisbol cuestan 110 pesos. Si el costo del bat menos el costo de la pelota da como resultado 100 pesos. Determine el costo del bat y el costo de la pelota.

2. Una familia tiene dos hijas y un hijo. Considere la siguiente información: la edad del hijo menos la edad de la hija menor es 10 años, la suma de edades de los tres es 45 años y la suma de edades de las hijas es 25 años. Determine las edades de las hijas y del hijo. Utilice el método de Gauss-Jordan para resolver el sistema de ecuaciones que resulta.

3. Resuelva el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{aligned} y+z &= 3\\ 2x+z &= 2\\ 3x+3y+z &= 5 \end{aligned}$$

4. Resuelva el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{aligned} x+y+z &= 5\\ 2x+y+z &= 4\\ x+y+2z &= 9 \end{aligned}$$

5. Determine las soluciones del siguiente sistema de ecuaciones dependiendo del valor de k, un número real. ¿Se presentan los casos de única solución, múltiples soluciones o ninguna solución?

$$\begin{aligned} 3x+2y+z &= k\\ x+2y+3z &= -k\\ x+z &= k \end{aligned}$$

6. Determine las soluciones del siguiente sistema de ecuaciones dependiendo del valor de k, un número real. ¿Se presentan los casos de única solución, múltiples soluciones o ninguna solución?

$$\begin{aligned} 3x+2y+3z &= 1\\ x+2y+z &= 1\\ 2x+kz &= 1 \end{aligned}$$

7. Encuentre todas las soluciones del siguiente sistema de ecuaciones, dependiendo del valor de k:

$$\begin{aligned} x+y+z &= k\\ x+2y+z &= -k\\ x+y+2z &= k \end{aligned}$$

8. Encuentre todas las soluciones del siguiente sistema de ecuaciones, dependiendo del valor de k:

$$\begin{aligned} x+y+z &= k\\ 4x+4y+6z &= -k\\ x+y+2z &= k \end{aligned}$$

9. Encuentre todas las soluciones del siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{aligned} x+y+z &= 0 \\ y+z &= 0 \\ x+2y+2z &= 0 \end{aligned}$$

10. Encuentre todas las soluciones del siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{aligned} x+y+z &= 0 \\ y+z &= 0 \\ x+z &= 0 \end{aligned}$$

Capítulo 16

Conceptos básicos de matrices

Una **matriz** es un arreglo bidimensional de números en forma rectangular o cuadrada, como por ejemplo:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix}$$

En este capítulo veremos que podemos realizar operaciones sobre matrices, como la suma y la multiplicación. Anteriormente hemos visto que la ecuación:

$$a\,x = b$$

Tiene como solución:

$$x = a^{-1}b$$

siendo a^{-1} el inverso multiplicativo del número a. De manera análoga, si tenemos más ecuaciones, hablaremos de las matrices: A, X y B, de manera que el sistema de ecuaciones será representado por:

$$\mathbf{A}\,\mathbf{x} = \mathbf{B}$$

y la solución estará dada por:

$$\mathbf{x} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{B}$$

En este capítulo se desarrollará esta nueva forma de resolver un sistema de ecuaciones lineales, abordando también el caso que quedó pendiente en el capítulo anterior: el de sistemas con más ecuaciones que variables. Es importante resaltar que las matrices se utilizan ampliamente en la ciencia y en la ingeniería, para representar sistemas de ecuaciones con decenas, cientos o miles de variables.

16.1. Definición de una matriz

Una **matriz** $\mathbf{A}$ de m renglones y n columnas tiene la forma:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & a_{2,n} \\ \cdots & & & \\ a_{m,1} & a_{m,2} & \cdots & a_{m,n} \end{bmatrix}$$

Para representar matrices se utilizará una letra mayúscula en negrita, por ejemplo $\mathbf{A}$, para representar a una matriz completa; mientras que una letra minúscula de la forma, $a_{i,j}$, para representar un elemento del renglón i, columna

j de la matriz $\mathbf{A}$. El tamaño o dimensión de una matriz se representa por $m \times n$ y en ocasiones se pone como subíndice de la matriz: $\mathbf{A}_{m \times n}$.

La matriz $\mathbf{A}$ siguiente tiene 2 renglones y 3 columnas:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix}$$

El renglón 1 se compone por los elementos $\mathbf{r}_1 = [1 \ \ 2 \ \ 3]$ y el renglón 2 por $\mathbf{R}_2 = [4 \ \ 5 \ \ 6]$. De manera similar, la columnas $\mathbf{c}_1$, $\mathbf{c}_2$ y $\mathbf{c}_3$ son las siguientes:

$$\mathbf{c}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \end{bmatrix} \quad , \quad \mathbf{c}_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \end{bmatrix} \quad , \quad \mathbf{C}_3 = \begin{bmatrix} 3 \\ 6 \end{bmatrix}$$

> Una matriz $\mathbf{A}_{m \times n}$ de tamaño $m \times n$ es un arreglo rectangular de números dispuestos en m renglones y n columnas. $a_{i,j}$ representa el número situado en el renglón i, columna j.

16.2. Igualdad de matrices

Dos matrices $\mathbf{A}_{m \times n}$ y $\mathbf{B}_{r \times s}$ son iguales si tienen el mismo tamaño y todos sus correspondientes elementos son iguales. En términos lógicos tenemos:

> La siguiente expresión define la igualdad de matrices $\mathbf{A}_{m \times n}$ y $\mathbf{B}_{r \times s}$ (denotada como $\mathbf{A} = \mathbf{B}$):
>
> $$((m = r) \wedge (n = s) \wedge (\forall_i \forall_j (a_{i,j} = b_{i,j}))) \leftrightarrow (\mathbf{A} = \mathbf{B}) \tag{16.1}$$

Cuando las matrices no son iguales, se denota como $\mathbf{A} \neq \mathbf{B}$.

16.3. Matrices especiales

Es conveniente introducir algunos tipos de matrices que serán muy útiles.

- Un **vector renglón** es una matriz de tamaño $1 \times n$, el cual contiene un único renglón. El tamaño del vector es el número de columnas que contiene. En adelante, para representar un vector renglón se utilizará una letra minúscula en negrita. Por ejemplo el vector $\mathbf{a}$ es de tamaño 3:

$$\mathbf{a}_{1 \times 3} = [1 \quad 2 \quad 3]$$

- Un **vector columna** es una matriz de tamaño $n \times 1$, el cual contiene una única columna. Al igual que en el caso del vector renglón, en renglones columna también se utilizará una letra minúscula en negrita. El tamaño del vector es el número de renglones que contiene. Por ejemplo el vector $\mathbf{b}$ es de tamaño 3:

$$\mathbf{b}_{3\times 1} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$$

- Una **matriz cuadrada** es una matriz que contiene igual número de renglones y de columnas.

- La **matriz identidad**, denotada como $\mathbf{I}_n$, es una matriz cuadrada de tamaño $n \times n$ cuyos elementos se definen de la siguiente forma:

  - Diagonal principal unitaria. Esto significa que los elementos $i_{k,k} = 1$, para $k = 1, 2, \ldots, n$ (recuerde que $i_{k,k}$ significa un elemento de la matriz I).
  - Otros elementos son cero. Los elementos $i_{r,c} = 0$, para $r \neq c$, $r = 1, 2 \ldots n$, $c = 1, 2 \ldots n$.

  De esta forma tenemos:

$$\mathbf{I}_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad , \quad \mathbf{I}_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad , \quad \mathbf{I}_4 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

  En Octave existe la función especial eye(n) para generar una matriz identidad de tamaño n, como en el siguiente ejemplo:

```
>> A=eye(3)
A =
Diagonal Matrix
   1   0   0
   0   1   0
   0   0   1
```

- Una **matriz nula** de tamaño $m \times n$, denotada como $\mathbf{0}_{m\times n}$, es una matriz con todos sus elementos cero.

  En Octave la función zeros(m,n) devuelve una matriz nula de m renglones y n columnas, como se muestra en el siguiente ejemplo:

```
>> A=zeros(2,3)
A =
   0   0   0
   0   0   0
```

16.4. Operaciones sobre matrices

En esta sección veremos que las matrices se pueden sumar, restar y multiplicar. Al final de esta sección veremos como se puede modelar un sistema de ecuaciones lineales mediante matrices.

16.4.1. Suma y resta de matrices

Para **sumar dos matrices** $\mathbf{A}$ y $\mathbf{B}$ deben ser del mismo tamaño y el resultado es otra matriz $\mathbf{C}$ del mismo tamaño:

$$\mathbf{C}_{m\times n} = \mathbf{A}_{m\times n} + \mathbf{B}_{m\times n} \tag{16.2}$$

donde los elementos se calculan como sigue:

$$c_{i,j} = a_{i,j} + b_{i,j} \tag{16.3}$$

Para **restar dos matrices** $\mathbf{A}$ y $\mathbf{B}$ también deben ser del mismo tamaño, y el resultado es otra matriz $\mathbf{C}$ del mismo tamaño:

$$\mathbf{C}_{m\times n} = \mathbf{A}_{m\times n} - \mathbf{B}_{m\times n} \tag{16.4}$$

donde los elementos se calculan como sigue:

$$c_{i,j} = a_{i,j} - b_{i,j} \tag{16.5}$$

Por ejemplo:

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

En Octave esta operación de suma la podemos realizar de la siguiente manera:

```
>> A = [1 1 1; 0 1 1; 0 0 1] + [1 0 0; 0 2 0; 0 0 3]
A =
   2   1   1
   0   3   1
   0   0   4
```

La **suma o resta de dos matrices** $\mathbf{A}$ y $\mathbf{B}$, denotadas como $(\mathbf{A}+\mathbf{B})$ y $(\mathbf{A}-\mathbf{B})$ respectivamente, sólo se puede realizar cuando son del mismo tamaño. El resultado es una matriz del mismo tamaño con los correspondientes elementos sumados o restados:

$$\mathbf{C} = \mathbf{A}+\mathbf{B} \quad , \quad c_{i,j} = a_{i,j} + b_{i,j} \tag{16.6}$$

$$\mathbf{C} = \mathbf{A}-\mathbf{B} \quad , \quad c_{i,j} = a_{i,j} - b_{i,j} \tag{16.7}$$

16.4.2. Multiplicación de un escalar por una matriz

El producto de un escalar (un número real o complejo), k, por una matriz $\mathbf{A}$ se define de la siguiente forma:

$$\mathbf{C}_{m\times n} = k * \mathbf{A}_{m\times n} \tag{16.8}$$

donde los elementos de la matriz $\mathbf{C}$ se calculan como sigue:

$$c_{i,j} = k * a_{i,j} \tag{16.9}$$

Es decir, el resultado es una nueva matriz del mismo tamaño que la matriz $\mathbf{A}$ y cada elemento $c_{i,j}$ es el resultado de multiplicar el elemento $a_{i,j}$ por el escalar k. Por ejemplo:

$$2 * \mathbf{I}_3 = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

En Octave esta operación la podemos realizar de la siguiente manera:

```
>> A = 2 * eye(3)
A =
Diagonal Matrix
   2   0   0
   0   2   0
   0   0   2
```

Utilizando el producto de un escalar por una matriz, la resta de dos matrices se puede expresar de la siguiente forma:

$$\mathbf{A} - \mathbf{B} = \mathbf{A} + (-1) * \mathbf{B} \tag{16.10}$$

Observe que se sigue la misma convención que en el álgebra de números: primero se hacen las multiplicaciones y después las sumas.

La **multiplicación de un escalar** k **por una matriz** $\mathbf{A}$ denotada como $k * \mathbf{A}$, es una matriz del mismo tamaño de $\mathbf{A}$ con los correspondientes elementos multiplicados por k:

$$\mathbf{C} \;=\; k * \mathbf{A} \quad , \quad c_{i,j} = k * a_{i,j} \tag{16.11}$$

16.4.3. Multiplicación de un vector renglón por un vector columna

La multiplicación de un vector renglón, $\mathbf{a}_{1\times n}$, por un vector columna, $\mathbf{b}_{n\times 1}$, se denota como $\mathbf{a} * \mathbf{b}$, es un escalar p que se calcula como sigue:

$$p \;=\; \mathbf{a}_{1\times n} * \mathbf{b}_{n\times 1} \tag{16.12}$$

$$p \;=\; \begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,n} \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} b_{1,1} \\ b_{2,1} \\ \cdots \\ b_{n,1} \end{bmatrix} \tag{16.13}$$

$$p \;=\; a_{1,1} * b_{1,1} + a_{1,2} * b_{2,1} + \ldots a_{1,n} * b_{n,1} \tag{16.14}$$

$$p \;=\; \sum_{k=1}^{n} a_{1,k} * b_{k,1} \tag{16.15}$$

Es conveniente resaltar que ambos vectores deben tener el mismo número de elementos. Veamos un ejemplo:

$$\begin{aligned} 1*10+2*20+3*30 &= \begin{bmatrix}1 & 2 & 3\end{bmatrix} * \begin{bmatrix}10\\20\\30\end{bmatrix} \\ 140 &= \begin{bmatrix}1 & 2 & 3\end{bmatrix} * \begin{bmatrix}10\\20\\30\end{bmatrix} \end{aligned}$$

En Octave esta operación la podemos realizar de la siguiente manera:

```
>> A = [1 2 3] * [10; 20; 30]
A = 140
```

La multiplicación de un vector renglón $\mathbf{a}$ por un vector columna $\mathbf{b}$, denotada como $\mathbf{a} * \mathbf{b}$, es un escalar definido como:

$$\mathbf{a}_{1\times n} * \mathbf{b}_{n\times 1} = \sum_{k=1}^{n} a_{1,k} * b_{k,1} \tag{16.16}$$

16.4.4. Multiplicación de matrices

La multiplicación de un matriz $\mathbf{A}_{m\times c}$ por otra matriz $\mathbf{B}_{c\times n}$, se denota como $\mathbf{A} * \mathbf{B}$ (o también como $\mathbf{AB}$) es una matriz $\mathbf{D}_{m\times n}$. Observe que se requieren dos condiciones para que sea posible multiplicar la matriz $\mathbf{A}$ por la matriz $\mathbf{B}$:

- El número de columnas de $\mathbf{A}$ debe ser igual al número de renglones de $\mathbf{B}$.
- La matriz $\mathbf{D}$ resultado de la multiplicación tiene el número de renglones de $\mathbf{A}$ y el número de columnas de $\mathbf{B}$.

Para calcular los elementos de $\mathbf{D}$ es conveniente representar a la matriz $\mathbf{A}$ compuesta por los vectores renglones: $\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \ldots, \mathbf{r}_m$; y a la matriz B compuesta por los vectores columnas: $\mathbf{c}_1, \mathbf{c}_2, \ldots, \mathbf{c}_n$; de la siguiente forma:

$$\mathbf{A}_{m\times c} = \begin{bmatrix} \leftarrow \mathbf{r}_1 \rightarrow \\ \leftarrow \mathbf{r}_2 \rightarrow \\ \vdots \\ \leftarrow \mathbf{r}_m \rightarrow \end{bmatrix} \quad , \quad \mathbf{B}_{c\times n} = \begin{bmatrix} \uparrow & \uparrow & & \uparrow \\ \mathbf{c}_1 & \mathbf{c}_2 & \cdots & \mathbf{c}_n \\ \downarrow & \downarrow & & \downarrow \end{bmatrix}$$

Así, el elemento $d_{i,j}$ es calcula como la multiplicación del vector renglón $\mathbf{r}_i$ de la matriz $\mathbf{A}$ por el vector columna

$\mathbf{c}_j$ de la matriz $\mathbf{B}$. Como vimos en la sección anterior, los elementos de $\mathbf{D}$ se calculan como sigue:

$$
\begin{aligned}
d_{i,j} &= \mathbf{r}_i * \mathbf{c}_j && (16.17)\\
d_{i,j} &= \begin{bmatrix} a_{i,1} & a_{i,2} & \cdots & a_{i,c} \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} b_{1,j} \\ b_{2,j} \\ \cdots \\ b_{c,j} \end{bmatrix} && (16.18)\\
d_{i,j} &= a_{i,1} * b_{1,j} + a_{i,2} * b_{2,j} + \ldots a_{i,c} * b_{c,j} && (16.19)\\
d_{i,j} &= \sum_{k=1}^{c} a_{i,k} * b_{k,j} && (16.20)
\end{aligned}
$$

Veamos un ejemplo paso a paso, donde se utiliza letra negrita para indicar el vector renglón de $\mathbf{A}$ y el vector columna de $\mathbf{B}$ para cada cálculo de los elementos de la matriz resultante:

$$
\begin{aligned}
\begin{bmatrix} \mathbf{c_{1,1} = 1 * 5 + 2 * 7} & c_{1,2} \\ c_{2,1} & c_{2,2} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{2} \\ 3 & 4 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} \mathbf{5} & 6 \\ \mathbf{7} & 8 \end{bmatrix}\\
\begin{bmatrix} 19 & \mathbf{c_{1,2} = 1 * 6 + 2 * 8} \\ c_{2,1} & c_{2,2} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{2} \\ 3 & 4 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} 5 & \mathbf{6} \\ 7 & \mathbf{8} \end{bmatrix}\\
\begin{bmatrix} 19 & 22 \\ \mathbf{c_{2,1} = 3 * 5 + 4 * 7} & c_{2,2} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ \mathbf{3} & \mathbf{4} \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} \mathbf{5} & 6 \\ \mathbf{7} & 8 \end{bmatrix}\\
\begin{bmatrix} 19 & 22 \\ 43 & \mathbf{c_{2,2} = 3 * 6 + 4 * 8} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ \mathbf{3} & \mathbf{4} \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} 5 & \mathbf{6} \\ 7 & \mathbf{8} \end{bmatrix}\\
\begin{bmatrix} 19 & 22 \\ 43 & 50 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{bmatrix}
\end{aligned}
$$

En Octave esta operación la podemos realizar fácilmente de la siguiente manera:

```
>> A = [1 2; 3 4] * [5 6; 7 8]
A =
   19   22
   43   50
```

La multiplicación de dos matrices $\mathbf{A}$ y $\mathbf{B}$, denotada como $(\mathbf{A} * \mathbf{B})$ ó $(\mathbf{AB})$, se define como:

$$
\mathbf{C}_{r,c} = \mathbf{A}_{r,n}\mathbf{B}_{n,c} \quad , \quad c_{i,j} = \sum_{k=1}^{n} a_{i,k} * b_{k,j} \qquad (16.21)
$$

Utilizando la multiplicación de matrices ya podemos representar un sistema de ecuaciones lineales como una expresión más sencilla, como veremos a continuación.

16.4.5. Modelando un sistema de ecuaciones lineales con matrices

Utilicemos como ejemplo el sistema de ecuaciones que vimos en la aplicación del método Gauss-Jordan (sección 15.3).

$$\begin{array}{ccccccc} (0)x_1 & + & (1)x_2 & + & (1)x_3 & = & 5 \\ (2)x_1 & + & (2)x_2 & + & (-2)x_3 & = & 0 \\ (-2)x_1 & + & (1)x_2 & + & (1)x_3 & = & 3 \end{array}$$

Este sistema de ecuaciones lineales puede escribirse en forma matricial de la forma:

$$\mathbf{A} * \mathbf{x} = \mathbf{b}$$

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & -2 \\ -2 & 1 & 1 \end{bmatrix} \quad , \quad \mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \quad , \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 5 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix}$$

Si efectuamos el producto de $\mathbf{A} * \mathbf{x}$ en la ecuación matricial $\mathbf{A} * \mathbf{x} = \mathbf{b}$, tenemos:

$$\begin{bmatrix} (0)x_1 + (1)x_2 + (1)x_3 \\ (2)x_1 + (2)x_2 + (-2)x_3 \\ (-2)x_1 + (1)x_2 + (1)x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix}$$

De manera que si los vectores columna del lado izquierdo y del lado derecho del símbolo de igualdad son iguales, corresponden exactamente al sistema de ecuaciones deseado.

En las siguientes dos secciones se revisan las propiedades de las matrices y el cálculo de una matriz especial, llamada matriz inversa, que permitirá resolver la ecuación matricial $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$.

16.5. Propiedades de las matrices

Es conveniente revisar las propiedades de la igualdad cuando el lado izquierdo y el lado derecho del símbolo de igualdad son matrices. Veamos enseguida que se conservan algunas de las propiedades ya conocidas de la igualdad para números. Si $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$ y $\mathbf{C}$ son matrices, tenemos las siguientes propiedades:

- **Reflexiva**. $\mathbf{A} = \mathbf{A}$.

  Toda matriz es idéntica a si misma.
- **Simétrica**. Si $\mathbf{A} = \mathbf{B}$, entonces $\mathbf{B} = \mathbf{A}$.

  Podemos intercambiar los lados de la igualdad.
- **Transitiva**. Si $\mathbf{A} = \mathbf{B}$ y $\mathbf{B} = \mathbf{C}$, entonces $\mathbf{A} = \mathbf{C}$.
- **de Sustitución**. Si $\mathbf{A} = \mathbf{B}$, entonces $\mathbf{A}$ se puede sustituir por $\mathbf{B}$ en cualquier otra igualdad.

Ahora consideremos las propiedades de la igualdad considerando las operaciones matriciales.

- **Suma**. Si $\mathbf{A} = \mathbf{B}$, entonces $\mathbf{A} + \mathbf{C} = \mathbf{B} + \mathbf{C}$.

  Si la matriz $\mathbf{C}$ es del mismo tamaño de $\mathbf{A}$ y $\mathbf{B}$, entonces se puede sumar a ambos lados de la igualdad.

- **Producto**. Si $\mathbf{A} = \mathbf{B}$ y $\mathbf{C}$ es del tamaño adecuado para realizar la multiplicación, se cumple lo siguiente:
  - $\mathbf{CA} = \mathbf{CB}$.
  - $\mathbf{AC} = \mathbf{BC}$

  Es decir, podemos premultiplicar o postmultiplicar por una misma matriz ambos lados de la igualdad. Esta distinción de premultiplicar o postmultiplicar es importante porque en general el producto matricial no es conmutativo.

Enseguida también se presentan algunas de las propiedades más importantes de las matrices:

- **La suma de matrices es conmutativa**:

$$\mathbf{A} + \mathbf{B} = \mathbf{B} + \mathbf{A}$$

- **La suma de matrices es asociativa**:

$$(\mathbf{A} + \mathbf{B}) + \mathbf{C} = \mathbf{A} + (\mathbf{B} + \mathbf{C})$$

- **La matriz nula $\mathbf{0}$ es el neutro aditivo**:

$$\mathbf{A} + \mathbf{0} = \mathbf{A}$$

$$\mathbf{0} + A = \mathbf{A}$$

- **El inverso aditivo de una matriz $\mathbf{A}$ es único y está dado por** $(-1) * \mathbf{A}$:

$$\mathbf{A} + (-1 * \mathbf{A}) = \mathbf{0}$$

$$(-1 * \mathbf{A}) + \mathbf{A} = \mathbf{0}$$

- **El producto por un escalar se distribuye sobre la suma de matrices**:

$$k * (\mathbf{A} + \mathbf{B}) = k * \mathbf{A} + k * \mathbf{B}$$

- **La suma de escalares se distribuye sobre la multiplicación por una matriz**:

$$(k + t) * \mathbf{A} = k * \mathbf{A} + t * \mathbf{A}$$

- **La multiplicación por escalares es asociativa**:

$$(k * t) * \mathbf{A} = k * (t * \mathbf{A})$$

- **El escalar 1 multiplicado por una matriz $\mathbf{A}$ es igual a la matriz $\mathbf{A}$**:

$$1 * \mathbf{A} = \mathbf{A}$$

- **El escalar 0 multiplicado por una matriz resulta en una matriz nula**:

$$0 * \mathbf{A} = \mathbf{0}$$

- **El producto no es conmutativo** (en el caso general):

$$\mathbf{A} * \mathbf{B} \neq \mathbf{B} * \mathbf{A}$$

En ocasiones, inclusive es posible que el producto $\mathbf{B} * \mathbf{A}$ no se pueda efectuar por las dimensiones de las matrices.

- **El producto de matrices es asociativo**:

$$(\mathbf{A} * \mathbf{B}) * \mathbf{C} = \mathbf{A} * (\mathbf{B} * \mathbf{C})$$

El lector puede comprobar fácilmente esta propiedad para matrices pequeñas, por ejemplo de 2×2.

- **La multiplicación de matrices se distribuye sobre la suma de matrices**:

$$\mathbf{A} * (\mathbf{B} + \mathbf{C}) = \mathbf{A} * \mathbf{B} + \mathbf{A} * \mathbf{C}$$

$$(\mathbf{A} + \mathbf{B}) * \mathbf{C} = \mathbf{A} * \mathbf{C} + \mathbf{B} * \mathbf{C}$$

- **En la multiplicación de un escalar por un producto de matrices se cumple**:

$$k * (\mathbf{A} * \mathbf{B}) = (k * \mathbf{A}) * \mathbf{B}$$

$$k * (\mathbf{A} * \mathbf{B}) = \mathbf{A} * (k * \mathbf{B})$$

- **La matriz identidad es el neutro multiplicativo**. Si $\mathbf{A}_{n \times n}$ es una matriz cuadrada e $\mathbf{I}_n$ es la matriz identidad, se cumple que:

$$\mathbf{A} * \mathbf{I} = \mathbf{A}$$

$$\mathbf{I} * \mathbf{A} = \mathbf{A}$$

- **Cuando se multiplica la matriz nula, de dimensión adecuada, por cualquier matriz, el resultado es una matriz nula**:

$$\mathbf{0} * \mathbf{A} = \mathbf{0}$$

$$\mathbf{A} * \mathbf{0} = \mathbf{0}$$

16.6. Inversa de una matriz

La **inversa de una matriz cuadrada $\mathbf{A}$** es otra matriz, denotada como $\mathbf{A}^{-1}$, tal que se verifica lo siguiente:

$$\mathbf{A} * \mathbf{A}^{-1} = \mathbf{I}$$

$$\mathbf{A}^{-1} * \mathbf{A} = \mathbf{I}$$

Es decir, una matriz multiplicada por su inversa nos da como resultado la matriz identidad. Para poder calcular la inversa de una matriz es necesario ver primero la representación matricial de las operaciones elementales sobre renglones de una matriz, conocidas como matrices elementales. Recordemos que ya utilizamos las operaciones elementales en el método de Gauss-Jordan que vimos en el capítulo anterior.

Matrices elementales

Veamos como podemos expresar las operaciones elementales mediante un tipo especial de matrices conocidas como **matrices elementales**. Supongamos que deseamos aplicar una operación elemental a la matriz:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} \end{bmatrix}$$

Consideremos ahora los tres tipos de operaciones elementales que ya conocemos:

- Operación elemental: $R_1 \leftarrow k * R_1$

  Apliquemos esta operación elemental a la matriz identidad $\mathbf{I}_3$, obteniendo como resultado la matriz $\mathbf{E}_1$:

  $$\mathbf{I}_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad , \quad \mathbf{E}_1 = \begin{bmatrix} k & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

  Si ahora calculamos el producto $\mathbf{E}_1 * \mathbf{A}$, obtenemos como resultado la aplicación de la operación elemental sobre la matriz $\mathbf{A}$. Veamos:

  $$\begin{bmatrix} k * a_{1,1} & k * a_{1,2} & k * a_{1,3} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} \end{bmatrix}$$

- Operación elemental: $R_2 \leftarrow k * R_1 + R_2$

  Apliquemos esta operación elemental a la matriz identidad $\mathbf{I}_3$, obteniendo como resultado $\mathbf{E}_2$:

  $$\mathbf{I}_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad , \quad \mathbf{E}_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ k & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

  Si ahora calculamos el producto $\mathbf{E}_2 * \mathbf{A}$, obtenemos como resultado la aplicación de la operación elemental a la matriz $\mathbf{A}$. Veamos:

  $$\begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} \\ k * a_{1,1} + a_{2,1} & k * a_{1,2} + a_{2,2} & k * a_{1,3} + a_{2,3} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ k & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} \end{bmatrix}$$

- Operación elemental: $R_1 \leftrightarrow R_2$

  Apliquemos esta operación elemental a la matriz identidad $\mathbf{I}_3$, obteniendo como resultado $\mathbf{E}_3$:

  $$\mathbf{I}_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad , \quad \mathbf{E}_3 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

  Si ahora calculamos el producto $\mathbf{E}_3 * \mathbf{A}$, obtenemos como resultado la aplicación de la operación elemental a la matriz $\mathbf{A}$. Veamos:

  $$\begin{bmatrix} a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} \\ a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} \end{bmatrix}$$

Para visualizar una forma de obtener la matriz inversa, consideremos la siguiente matriz:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

Veamos el proceso para realizar operaciones elementales de tal manera que la matriz $\mathbf{A}$ se transforme en la matriz identidad, aprovechando la multiplicación con matrices elementales.

- Operación elemental: $R_3 \leftarrow -2 * R_1 + R_3$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

- Operación elemental: $R_3 \leftarrow \frac{1}{2} * R_3$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

Si expresamos todos los productos juntos, tenemos:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

En forma compacta esta igualdad la podemos expresar como:

$$\mathbf{I} = \mathbf{E}_2 * \mathbf{E}_1 * \mathbf{A}$$

Donde $\mathbf{E}_1$ es la primera matriz elemental utilizada y $\mathbf{E_2}$ es la segunda matriz elemental. Como sabemos que el producto es asociativo, podemos ver fácilmente que la matriz $\mathbf{E}_2 * \mathbf{E}_1$ es la inversa de la matriz $\mathbf{A}$:

$$\begin{aligned} \mathbf{I} &= (\mathbf{E}_2 * \mathbf{E}_1) * \mathbf{A} \\ \mathbf{I} &= \mathbf{A}^{-1} * \mathbf{A} \end{aligned}$$

Para este ejemplo, tenemos que la matriz $\mathbf{A}^{-1}$ es:

$$\begin{aligned} \mathbf{A}^{-1} &= \mathbf{E}_2 * \mathbf{E}_1 \\ \mathbf{A}^{-1} &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\ \mathbf{A}^{-1} &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Cálculo de la matriz inversa

En forma práctica, podemos calcular la inversa de una matriz $\mathbf{A}$ aplicando las operaciones elementales requeridas: $\mathbf{E}_1$, $\mathbf{E}_2$, ..., $\mathbf{E}_f$ que transforman la matriz $\mathbf{A}$ en la matriz identidad. La matriz inversa estará dada por:

$$\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{E}_f * \ldots (\mathbf{E}_2 * (\mathbf{E}_1 * \mathbf{I})) \tag{16.22}$$

Es decir, podemos partir de la matriz inicial $\mathbf{A}$ ampliada con la matriz identidad $\mathbf{I}$, denotada como $(\mathbf{A}|\mathbf{I})$, de la forma:

$$(\mathbf{A}|\mathbf{I}) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Realizar operaciones elementales sobre los renglones de esta matriz, de manera que al final tengamos la matriz:

$$(\mathbf{I}|\mathbf{A}^{-1}) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

Podemos observar, de izquierda a derecha, que las primeras tres columnas forman la matriz identidad y en las siguientes tres columnas se encuentra la matriz inversa deseada.

Sin embargo, se debe resaltar que si mediante las operaciones elementales no se obtiene la matriz identidad (en el lado izquierdo), y en su lugar obtenemos un renglón de ceros, entonces la matriz no tiene inversa.

En Octave la función inv(A) calcula la matriz inversa de $\mathbf{A}$. Comprobemos en Octave que inv(A) nos devuelve la matriz calculada anteriormente.

```
>> A = [1 0 0; 0 1 0; 2 0 2];
>> B = inv(A)
B =
   1.00000   0.00000   0.00000
  -0.00000   1.00000   0.00000
  -1.00000  -0.00000   0.50000
>> C = A*B
C =
   1   0   0
   0   1   0
   0   0   1
```

Propiedades de la matriz inversa

- La inversa de un producto de matrices esta dado por:

$$(\mathbf{A} * \mathbf{B})^{-1} = \mathbf{B}^{-1} * \mathbf{A}^{-1}$$

- Si la matriz $\mathbf{A}$ tiene inversa, se cumple que:

$$(\mathbf{A}^{-1})^{-1} = \mathbf{A}$$

Si $\mathbf{A}^{-1}$ **es la matriz inversa de la matriz** $\mathbf{A}$, entonces se cumple que la matriz inversa $\mathbf{A}^{-1}$ tiene el papel de inverso multiplicado de la matriz $\mathbf{A}$:

$$\mathbf{A}\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{I} \quad (16.23)$$

$$\mathbf{A}^{-1}\mathbf{A} = \mathbf{I} \quad (16.24)$$

Solamente nos falta abordar enseguida la matriz transpuesta, la cual será muy útil en la sección 16.9 para resolver sistemas con más ecuaciones que variables.

16.7. Matriz transpuesta

Si tenemos una matriz $\mathbf{A}_{m\times n}$, la **matriz transpuesta** de $\mathbf{A}$, denotada como $\mathbf{A}^t_{n\times m}$ es otra matriz con las siguientes propiedades:

- $\mathbf{A}^t$ tiene n renglones y m columnas.
- El renglón 1 de $\mathbf{A}$ se convierte en la columna 1 de $\mathbf{A}^t$, el renglón 2 de $\mathbf{A}$ se convierte en la columna 2 de $\mathbf{A}^t$, y así sucesivamente. En otras palabras, si $\mathbf{B} = \mathbf{A}^t$, tenemos que los elementos de $\mathbf{B}$ se calculan como sigue:

$$b_{i,j} = a_{j,i} \quad (16.25)$$

Veamos algunos ejemplos en Octave, donde se utiliza A' y C' para calcular las transpuestas de las matrices $\mathbf{A}$ y $\mathbf{C}$.

```
>> A = [1 2 3];
>> B = A'
B =
   1
   2
   3
>> C = [1 2; 3 4; 5 6; 7 8]
C =
   1   2
   3   4
   5   6
   7   8
>> C'
C =
   1   3   5   7
   2   4   6   8
```

Propiedades de la matriz transpuesta

- $(\mathbf{A}^t)^t = \mathbf{A}$

- $(\mathbf{A}+\mathbf{B})^t = \mathbf{A}^t + \mathbf{B}^t$
- $(k * \mathbf{A})^t = k * \mathbf{A}^t$.
- $(\mathbf{A} * \mathbf{B})^t = \mathbf{B}^t * \mathbf{A}^t$

La matriz traspuesta de la matriz $\mathbf{A}$, denotada como $\mathbf{A}^t$ se define como:

$$\mathbf{B}_{n\times m} = (\mathbf{A}_{m\times n})^t \quad , \quad b_{i,j} = a_{j,i} \tag{16.26}$$

16.8. Resolviendo sistemas de ecuaciones usando matrices

Volvamos al ejemplo del sistema de ecuaciones que vimos en la sección del método de Gauss-Jordan:

$$\begin{array}{rcrcrcl} (0)x_1 & + & (1)x_2 & + & (1)x_3 & = & 5 \\ (2)x_1 & + & (2)x_2 & + & (-2)x_3 & = & 0 \\ (-2)x_1 & + & (1)x_2 & + & (1)x_3 & = & 3 \end{array}$$

Como ya lo hemos visto, este sistema se puede representar en forma matricial de la forma:

$$\mathbf{A} * \mathbf{x} = \mathbf{b}$$

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & -2 \\ -2 & 1 & 1 \end{bmatrix} \quad , \quad \mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \quad , \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 5 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix}$$

Para resolver esta ecuación matricial, podemos premultiplicar a ambos lados de la igualdad por la matriz $\mathbf{A}^{-1}$ y dejar del lado izquierdo solo la matriz $\mathbf{x}$:

$$\begin{array}{rll} \mathbf{A}\mathbf{x} = & \mathbf{b} & \text{Ecuación original} \\ \mathbf{A}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{x} = & \mathbf{A}^{-1}\mathbf{b} & \text{Premultiplicando por la matriz inversa de A} \\ (\mathbf{A}^{-1}\mathbf{A})\mathbf{x} = & \mathbf{A}^{-1}\mathbf{b} & \text{Propiedad asociativa del producto} \\ (\mathbf{I})\mathbf{x} = & \mathbf{A}^{-1}\mathbf{b} & \text{Propiedad de la matriz inversa} \\ \mathbf{x} = & \mathbf{A}^{-1}\mathbf{b} & \text{Propiedad de la matriz identidad} \end{array}$$

En octave podemos resolver fácilmente este sistema de ecuaciones:

```
>> A = [0 1 1; 2 2 -2; -2 1 1];
>> B = [5; 0; 3];
>> X = inv(A) * B
X =
   1
   2
   3
```

Si la matriz $\mathbf{A}$ tiene inversa, el sistema de ecuaciones $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$ tiene una solución única dada por:

$$\mathbf{x} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{b} \tag{16.27}$$

Veamos enseguida como la matriz inversa nos puede ayudar a resolver sistemas homogéneos.

16.8.1. Sistemas homogéneos

Consideremos el **sistema homogeneo**:

$$\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{0}$$

donde el vector columna $\mathbf{0}$ es un vector nulo. Estos sistemas siempre tienen la solución trivial: $\mathbf{x} = \mathbf{0}$, es decir todas las variables asumen un valor de 0.

Dependiendo de si matriz $\mathbf{A}$ tiene inversa, tenemos dos casos:

- Solución única $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ si $\mathbf{A}$ tiene inversa. Esto se desprende del siguiente razonamiento:

$$\begin{aligned}
\mathbf{A}\mathbf{x} &= \mathbf{0} \\
\mathbf{A}^{-1} * \mathbf{A} * \mathbf{x} &= \mathbf{A}^{-1} * \mathbf{0} \\
\mathbf{I} * \mathbf{x} &= \mathbf{A}^{-1} * \mathbf{0} \\
\mathbf{x} &= \mathbf{A}^{-1} * \mathbf{0} \\
\mathbf{x} &= \mathbf{0}
\end{aligned}$$

- Soluciones infinitas si $\mathbf{A}$ no tiene inversa. En este caso podemos proceder a resolverlo mediante operaciones elementales en las ecuaciones o bien mediante el método de Gauss-Jordan. En algún momento nos vamos a encontrar con al menos una ecuación del tipo $0 = 0$ (o su equivalente con al menos un renglón de ceros en la matriz), indicando que existe un número infinito de soluciones.

Veamos enseguida el cálculo de la inversa de una matriz de tamaño 2×2, que nos será muy útil para resolver rápidamente un sistema de dos ecuaciones lineales con dos variables.

16.8.2. La inversa de una matriz de tamaño 2×2

Veamos ahora cómo determinar la inversa de la matriz $\mathbf{A}$ siguiente:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

Procedemos formando una nueva matriz, que denotaremos como $\mathbf{A}|\mathbf{I}$, con la matriz $\mathbf{A}$ del lado izquierdo y la matriz $\mathbf{I}_2$ del lado derecho,

$$\mathbf{A}|\mathbf{I} = \begin{bmatrix} a & b & 1 & 0 \\ c & d & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Aplicando la operación elemental: $R_1 \leftarrow \frac{1}{a} * R_1$ (asumiendo que $a \neq 0$), tenemos que la matriz $\mathbf{A}|\mathbf{I}$ se transforma en la siguiente:

$$\mathbf{A}|\mathbf{I} = \begin{bmatrix} 1 & \frac{b}{a} & \frac{1}{a} & 0 \\ c & d & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Para aplicar la operación elemental: $R_2 \leftarrow R_2 + (-c) * R_1$, hagamos primero el producto $(-c) * R_1$:

$$\begin{aligned} (-c) * R_1 &= \begin{bmatrix} (-c)(1) & (-c)\frac{b}{a} & (-c)\frac{1}{a} & (-c) * 0 \end{bmatrix} \\ (-c) * R_1 &= \begin{bmatrix} -c & \frac{-cb}{a} & \frac{-c}{a} & 0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Sumando este nuevo renglón al renglón R_2 de la matriz $\mathbf{A}|\mathbf{I}$, y simplificando un poco, tenemos:

$$\begin{aligned} \mathbf{A}|\mathbf{I} &= \begin{bmatrix} 1 & \frac{b}{a} & \frac{1}{a} & 0 \\ (c + (-c)) & \left(d + \frac{-cb}{a}\right) & \left(0 + \frac{-c}{a}\right) & (1 + 0) \end{bmatrix} \\ \mathbf{A}|\mathbf{I} &= \begin{bmatrix} 1 & \frac{b}{a} & \frac{1}{a} & 0 \\ 0 & \frac{d*a-c*b}{a} & \frac{-c}{a} & 1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Aplicando la operación elemental: $R_2 \leftarrow \frac{a}{d*a-c*b} * R_2$ tenemos:

$$\begin{aligned} \mathbf{A}|\mathbf{I} &= \begin{bmatrix} 1 & \frac{b}{a} & \frac{1}{a} & 0 \\ \left(\frac{a}{d*a-c*b} * 0\right) & \left(\frac{a}{d*a-c*b}\frac{d*a-c*b}{a}\right) & \left(\frac{a}{d*a-c*b} * \frac{-c}{a}\right) & \left(\frac{a}{d*a-c*b} * 1\right) \end{bmatrix} \\ \mathbf{A}|\mathbf{I} &= \begin{bmatrix} 1 & \frac{b}{a} & \frac{1}{a} & 0 \\ 0 & 1 & \frac{-c}{d*a-c*b} & \frac{a}{d*a-c*b} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Finalmente, aplicando la operación elemental: $R_1 \leftarrow R_1 + (-\frac{b}{a}) * R_2$ obtenemos el resultado deseado. Hagamos primero el producto $(-\frac{b}{a}) * R_2$:

$$\begin{aligned} \left(-\frac{b}{a}\right) * R_2 &= \begin{bmatrix} ((-\frac{b}{a}) * 0) & ((-\frac{b}{a}) * 1) & \left((-\frac{b}{a}) * \frac{-c}{d*a-c*b}\right) & \left((-\frac{b}{a}) * \frac{a}{d*a-c*b}\right) \end{bmatrix} \\ \left(-\frac{b}{a}\right) * R_2 &= \begin{bmatrix} 0 & -\frac{b}{a} & \frac{bc}{a(d*a-c*b)} & \frac{-b}{d*a-c*b} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Sumando este nuevo renglón al renglón 1 de la matriz anterior $\mathbf{A}|\mathbf{I}$, tenemos:

$$\mathbf{A}|\mathbf{I} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \left(\frac{1}{a} + \frac{bc}{a(d*a-c*b)}\right) & \frac{-b}{d*a-c*b} \\ 0 & 1 & \frac{-c}{d*a-c*b} & \frac{a}{d*a-c*b} \end{bmatrix}$$

Simplifiquemos el nuevo término en la posición $(1, 3)$:

$$\begin{aligned} \frac{1}{a} + \frac{bc}{a(d*a-c*b)} &= \frac{(d*a-c*b)}{a(d*a-c*b)} + \frac{bc}{a(d*a-c*b)} \\ \frac{1}{a} + \frac{bc}{a(d*a-c*b)} &= \frac{d*a-c*b+b*c}{a(d*a-c*b)} \\ \frac{1}{a} + \frac{bc}{a(d*a-c*b)} &= \frac{d*a}{a(d*a-c*b)} \\ \frac{1}{a} + \frac{bc}{a(d*a-c*b)} &= \frac{d}{d*a-c*b} \end{aligned}$$

Escribiendo este resultado en la matriz tenemos:

$$\mathbf{A}|\mathbf{I} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \frac{d}{d*a-c*b} & \frac{-b}{d*a-c*b} \\ 0 & 1 & \frac{-c}{d*a-c*b} & \frac{a}{d*a-c*b} \end{bmatrix}$$

En la expresión anterior, al valor $(ad - bc)$ se le conoce como **determinante** de la matriz $\mathbf{A}$ y se le denota como $|\mathbf{A}|$.

La inversa de la matriz $\mathbf{A}$, de tamaño 2×2, es la matriz $\mathbf{A}^{-1}$ siguiente:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \quad , \quad \mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{|\mathbf{A}|} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix} \tag{16.28}$$

Donde $|\mathbf{A}| = (ad - bc)$ es el determinante de la matriz $\mathbf{A}$. Para que exista la inversa de la matriz $\mathbf{A}$, es necesario que el valor del determinante de la matriz sea diferente de cero. Si es cero, la inversa de esa matriz no existe.

El lector puede comprobar que $\mathbf{A} * \mathbf{A}^{-1} = \mathbf{I}_2$ y también que $\mathbf{A}^{-1} * \mathbf{A} = \mathbf{I}_2$.

16.8.3. Solución de un sistema de 2 ecuaciones con 2 variables

Resolvamos ahora el sistema de ecuaciones $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ siguiente:

$$\begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} \\ a_{2,1} & a_{2,2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix}$$

Utilizando la matriz inversa tenemos que la solución está dada por: $\mathbf{x} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{b}$. Es decir:

$$\begin{aligned}
\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} &= \frac{1}{(a_{1,1} * a_{2,2} - a_{1,2} * a_{2,1})} \begin{bmatrix} a_{2,2} & -a_{1,2} \\ -a_{2,1} & a_{1,1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix} \\
\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} &= \frac{1}{(a_{1,1} * a_{2,2} - a_{1,2} * a_{2,1})} \begin{bmatrix} a_{2,2} * b_1 - a_{1,2} * b_2 \\ -a_{2,1} * b_1 + a_{1,1} * b_2 \end{bmatrix} \\
\begin{bmatrix} x_1 \\ \\ x_2 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \frac{a_{2,2}*b_1 - a_{1,2}*b_2}{(a_{1,1}*a_{2,2} - a_{1,2}*a_{2,1})} \\ \\ \frac{-a_{2,1}*b_1 + a_{1,1}*b_2}{(a_{1,1}*a_{2,2} - a_{1,2}*a_{2,1})} \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

El sistema de 2 ecuaciones con 2 variables:

$$\begin{aligned} a_{1,1} * x_1 + a_{1,2} * x_2 &= b_1 \\ a_{2,1} * x_1 + a_{2,2} * x_2 &= b_2 \end{aligned}$$

Si se cumple que $(a_{1,1} * a_{2,2} - a_{1,2} * a_{2,1} \neq 0)$, entonces el sistema de ecuaciones tiene como solución única:

$$x_1 = \frac{a_{2,2} * b_1 - a_{1,2} * b_2}{a_{1,1} * a_{2,2} - a_{1,2} * a_{2,1}} \quad (16.29)$$

$$x_2 = \frac{-a_{2,1} * b_1 + a_{1,1} * b_2}{a_{1,1} * a_{2,2} - a_{1,2} * a_{2,1}} \quad (16.30)$$

Es conveniente recordar que si el determinante de la matriz es cero, significa que la inversa no existe y que el sistema de ecuaciones **no tiene una solución única**. En ese caso, el sistema no tiene solución o bien tiene un número infinito de soluciones.

16.8.4. Ejemplo de solución de un sistema de 2 ecuaciones y 2 variables

Como ejercicio, resolvamos el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{aligned} 2x_1 + 3x_2 &= 11 \\ 5x_1 + 4x_2 &= 17 \end{aligned}$$

En este caso tenemos que: $a_{1,1} = 2$, $a_{1,2} = 3$, $a_{2,1} = 5$, $a_{2,2} = 4$, $b_1 = 11$ y $b_2 = 17$. De manera que las variables x_1 y x_2 las podemos calcular a partir de las ecuaciones 16.29 y 16.30:

$$\begin{aligned} x_1 &= \frac{4 * 11 - 3 * 17}{2 * 4 - 3 * 5} = \frac{44 - 51}{8 - 15} = \frac{-7}{-7} = 1 \\ x_2 &= \frac{-5 * 11 + 2 * 17}{2 * 4 - 3 * 5} = \frac{-55 + 34}{-7} = \frac{-21}{-7} = 3 \end{aligned}$$

El lector puede verificar que efectivamente $x_1 = 1$ y $x_2 = 3$ es la solución del sistema de ecuaciones.

Enseguida se presenta una aplicación muy interesante y útil en geometría, que involucra la solución de un sistema de dos ecuaciones con dos variables.

16.8.5. Cálculo de la distancia de un punto a una recta

Anteriormente, en el capítulo de trigonometría abordamos el cálculo de la circunferencia que pasa por los tres vértices de un triángulo. Ahora abordaremos un problema similar.

Sea $P_1 = (x_1, y_1)$ un punto en el plano cartesiano y L_0 una recta definida en su forma general como:

$$Ax + By + C = 0$$

El problema consiste en determinar la distancia mínima d del punto P_1 a la recta L_0. La figura 16.1 ilustra la situación y también plantea la solución del problema. Para obtener la solución es necesario llevar a cabo los siguientes pasos:

1. Calcular la ecuación de la recta L_1 que es perpendicular a L_0 y pasa por el punto P_1.
2. Calcular el punto de intersección P_0 de las dos rectas.
3. Calcular la distancia d entre los puntos P_1 y P_0.

Veamos en detalle cada uno de estos pasos.

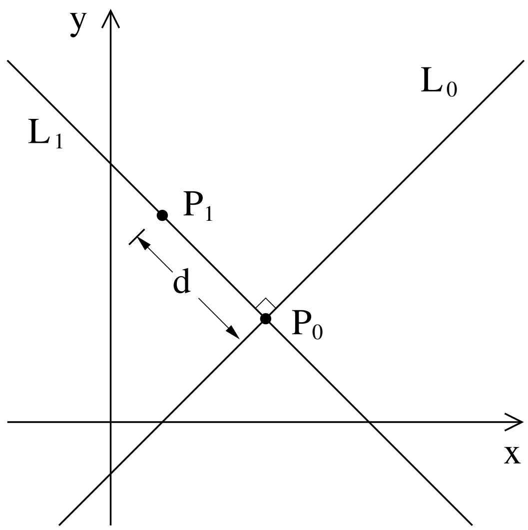


Figura 16.1: Distancia del punto P_1 a la línea L_0. La distancia mínima d del punto P a la línea L_0 es la distancia entre los puntos P_0 y P_1, siendo L_1 perpendicular a L_0.

Calcular la ecuación de la recta L_1 que es perpendicular a L_0 y pasa por el punto P_1

En el capítulo de trigonometría, en la sección 9.4.2 abordamos el cálculo de una recta perpendicular a otra cuando se expresan en su forma general. Las ecuaciones 9.37 y 9.38, de la página 149 nos resuelven este problema. Si L_0 tiene la forma:

$$Ax + By + C = 0 \tag{16.31}$$

Entonces L_1 debe tener la forma:

$$-Bx + Ay + D = 0 \tag{16.32}$$

Donde se ha utilizado el parámetro D para no confundirlo con el parámetro C de la recta L_0. Si L_1 debe pasar por el punto P_1, se debe cumplir que el punto $P_1 = (x_1, y_1)$ satisface la ecuación de la recta L_1; es decir:

$$\begin{aligned} -Bx_1 + Ay_1 + D &= 0 \\ D &= Bx_1 - Ay_1 \end{aligned}$$

De manera que al sustituir D en la ecuación 16.32, la recta L_1 tiene la forma:

$$-Bx + Ay + (Bx_1 - Ay_1) = 0 \tag{16.33}$$

Calcular el punto de intersección P_0 de las dos rectas

Expresemos las ecuaciones 16.31 y 16.33 en la forma acostumbrada de un sistema de ecuaciones en las variables x, y,

$$
\begin{aligned}
Ax + By &= -C && (16.34)\\
-Bx + Ay &= -Bx_1 + Ay_1 && (16.35)
\end{aligned}
$$

Anteriormente ya resolvimos de forma general un sistema de dos ecuaciones lineales con dos variables y obtuvimos las ecuaciones 16.29 y 16.30, para calcular la primera y segunda variable, respectivamente. En este caso, tenemos que las constantes del sistema son: $a_{1,1} = A$, $a_{1,2} = B$, $b_1 = -C$, $a_{2,1} = -B$, $a_{2,2} = A$ y $b_2 = -Bx_1 + Ay_1$; y obtenemos las siguientes expresiones para el punto $P_0 = (x_0, y_0)$, las coordenadas del punto de intersección de las dos rectas:

$$
\begin{aligned}
x_0 &= \frac{a_{2,2} * b_1 - a_{1,2} * b_2}{a_{1,1} * a_{2,2} - a_{1,2} * a_{2,1}}\\
x_0 &= \frac{A * (-C) - B * (-Bx_1 + Ay_1)}{A * A - B * (-B)}\\
x_0 &= \frac{-AC + B^2x_1 - ABy_1}{A^2 + B^2} && (16.36)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
y_0 &= \frac{-a_{2,1} * b_1 + a_{1,1} * b_2}{a_{1,1} * a_{2,2} - a_{1,2} * a_{2,1}}\\
y_0 &= \frac{-(-B) * (-C) + A * (-Bx_1 + Ay_1)}{A * A - B * (-B)}\\
y_0 &= \frac{-BC - ABx_1 + A^2y_1}{A^2 + B^2} && (16.37)
\end{aligned}
$$

Calcular la distancia d entre los puntos P_1 y P_0

Solo falta calcular la distancia d entre los puntos $P_1 = (x_1, y_1)$ y $P_0 = (x_0, y_0)$. Por simplicidad primero vamos a calcular d^2 y al final d. La distancia d^2 se puede expresar como la suma de las diferencias al cuadrado de x y de y, de la siguiente forma:

$$
\begin{aligned}
d^2 &= (x_1 - x_0)^2 + (y_1 - y_0)^2\\
d^2 &= \left(x_1 - \frac{-AC + B^2x_1 - ABy_1}{A^2 + B^2}\right)^2 + \left(y_1 - \frac{-BC - ABx_1 + A^2y_1}{A^2 + B^2}\right)^2\\
d^2 &= \left(\frac{x_1(A^2 + B^2)}{A^2 + B^2} + \frac{AC - B^2x_1 + ABy_1}{A^2 + B^2}\right)^2 + \left(\frac{y_1(A^2 + B^2)}{A^2 + B^2} + \frac{BC + ABx_1 - A^2y_1}{A^2 + B^2}\right)^2\\
d^2 &= \left(\frac{A^2x_1 + B^2x_1 + AC - B^2x_1 + ABy_1}{A^2 + B^2}\right)^2 + \left(\frac{A^2y_1 + B^2y_1 + BC + ABx_1 - A^2y_1}{A^2 + B^2}\right)^2\\
d^2 &= \left(\frac{A^2x_1 + AC + ABy_1}{A^2 + B^2}\right)^2 + \left(\frac{B^2y_1 + BC + ABx_1}{A^2 + B^2}\right)^2\\
d^2 &= \frac{(A^2x_1 + AC + ABy_1)^2}{(A^2 + B^2)^2} + \frac{(B^2y_1 + BC + ABx_1)^2}{(A^2 + B^2)^2}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
d^2 &= \frac{(A(Ax_1+By_1+C))^2}{(A^2+B^2)^2} + \frac{(B(Ax_1+By_1+C))^2}{(A^2+B^2)^2} \\
d^2 &= \frac{A^2(Ax_1+By_1+C)^2}{(A^2+B^2)^2} + \frac{B^2(Ax_1+By_1+C)^2}{(A^2+B^2)^2} \\
d^2 &= \frac{A^2(Ax_1+By_1+C)^2 + B^2(Ax_1+By_1+C)^2}{(A^2+B^2)^2} \\
d^2 &= \frac{(A^2+B^2)(Ax_1+By_1+C)^2}{(A^2+B^2)^2} \\
d^2 &= \frac{(Ax_1+By_1+C)^2}{A^2+B^2} \\
\sqrt{d^2} &= \sqrt{\frac{(Ax_1+By_1+C)^2}{A^2+B^2}} \\
d &= \frac{\sqrt{(Ax_1+By_1+C)^2}}{\sqrt{A^2+B^2}} \\
d &= \frac{|Ax_1+By_1+C|}{\sqrt{A^2+B^2}}
\end{aligned}
$$

El último paso de tomar el valor absoluto a la cantidad $(Ax_1 + By_1 + C)$ se justifica al tener en cuenta que al elevarlo al cuadrado el resultado es positivo, de manera que el resultado de la raíz cuadrada es el valor absoluto de $(Ax_1 + By_1 + C)$, un número no negativo. De esta manera, la distancia d siempre será un número positivo o cero. Hagamos ahora una aplicación de este resultado obtenido.

La distancia mínima d del punto $P_1 = (x_1, y_1)$ a la línea $Ax + By + C = 0$ esta dada por:

$$d = \frac{|Ax_1+By_1+C|}{\sqrt{A^2+B^2}} \tag{16.38}$$

Ejercicio numérico de cálculo de la distancia de un punto a una línea

Consideremos el punto $P_1 = (2, 2)$ y la línea definida por la ecuación: $x + y - 1 = 0$. En este caso, $x_1 = 2$, $y_1 = 2$, $A = 1$, $B = 1$, $C = -1$ y la distancia d del punto P_1 a la línea es:

$$
\begin{aligned}
d &= \frac{|Ax_1+By_1+C|}{\sqrt{A^2+B^2}} && (16.39)\\
d &= \frac{|(1)(2)+(1)(2)+(-1)|}{\sqrt{1^2+1^2}} && (16.40)\\
d &= \frac{3}{\sqrt{2}} && (16.41)\\
d &= 2.1213 && (16.42)
\end{aligned}
$$

En los ejercicios se propone al lector utilizar el cálculo de la distancia de un punto a una línea para determinar el área de un triángulo definido por las coordenadas de sus vértices.

16.9. Sistemas con más ecuaciones lineales que variables

Abordemos en esta sección, como ejemplo, el problema de determinar la mejor recta que se ajuste a un conjunto de n puntos. Si partimos de la ecuación de la recta:

$$xm + b = y$$

Si consideramos $n = 2$, tenemos los puntos $P_1 = (x_1, y_1)$, $P_2 = (x_2, y_2)$ y podemos formar el sistema de dos ecuaciones, con dos variables (m, b):

$$\begin{array}{ccccc} x_1\, m & + & b & = & y_1 \\ x_2\, m & + & b & = & y_2 \end{array}$$

Usando matrices, podemos expresar el sistema como sigue:

$$\mathbf{A} * \mathbf{x} = \mathbf{b}$$

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} x_1 & 1 \\ x_2 & 1 \end{bmatrix} \quad , \quad \mathbf{x} = \begin{bmatrix} m \\ b \end{bmatrix} \quad , \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}$$

Si los dos puntos son distintos y no se ubican en una línea vertical, el sistema siempre tiene una única solución: $\mathbf{x} = \mathbf{A}^{-1} * \mathbf{b}$.

Veamos ahora que pasa cuando el número de puntos n es mayor que 2. Tenemos n ecuaciones, una por cada punto, y por lo tanto tenemos el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\mathbf{A}_{n\times 2} * \mathbf{x}_{2\times 1} = \mathbf{b}_{n\times 1}$$

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} x_1 & 1 \\ x_2 & 1 \\ x_3 & 1 \\ \dots & \\ x_n & 1 \end{bmatrix} \quad , \quad \mathbf{x} = \begin{bmatrix} m \\ b \end{bmatrix} \quad , \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ \dots \\ y_n \end{bmatrix}$$

Para resolver este tipo de sistemas de ecuaciones con más ecuaciones que variables, se utiliza la pseudoinversa de una matriz, que veremos a continuación.

16.9.1. Solución mediante la pseudoinversa de una matriz

Para resolver el sistema de n ecuaciones anterior:

$$\mathbf{A}_{n\times 2} * \mathbf{x}_{2\times 1} = \mathbf{b}_{n\times 1}$$

se siguen los siguientes pasos:

- Se premultiplica ambos lados de la igualdad por la matriz traspuesta de $\mathbf{A}$, es decir por la matriz $\mathbf{A}^t_{2\times n}$:

$$\mathbf{A}^t_{2\times n} * \mathbf{A}_{n\times 2} * \mathbf{x}_{2\times 1} = \mathbf{A}^t_{2\times n} * \mathbf{b}_{n\times 1}$$

- Se asocia el producto $(\mathbf{A}^t * \mathbf{A})$, que resulta ser una matriz de tamaño 2×2.

$$(\mathbf{A}^t_{2\times n} * \mathbf{A}_{n\times 2}) * \mathbf{x}_{2\times 1} = \mathbf{A}^t_{2\times n} * \mathbf{b}_{n\times 1}$$

- Del lado derecho de la igualdad el producto $(\mathbf{A}^t * \mathbf{b})$ resulta ser una matriz de tamaño 2×1.

$$(\mathbf{A}^t * \mathbf{A})_{2\times 2} * \mathbf{x}_{2\times 1} = (\mathbf{A}^t * \mathbf{b})_{2\times 1}$$

  De esta manera ya tenemos un sistema de dos ecuaciones con dos variables y se puede resolver como ya sabemos.

- Se premultiplican ambos lados de la igualdad por la matriz inversa de $(\mathbf{A}^t * \mathbf{A})$.

$$(\mathbf{A}^t * \mathbf{A})^{-1} * (\mathbf{A}^t * \mathbf{A}) * \mathbf{x} = (\mathbf{A}^t * \mathbf{A})^{-1} * (\mathbf{A}^t * \mathbf{b})$$

- Se simplifica la ecuación.

$$\begin{aligned} ((\mathbf{A}^t * \mathbf{A})^{-1} * (\mathbf{A}^t * \mathbf{A})) * \mathbf{x} &= (\mathbf{A}^t * \mathbf{A})^{-1} * (\mathbf{A}^t * \mathbf{b}) \\ \mathbf{I} * \mathbf{x} &= (\mathbf{A}^t * \mathbf{A})^{-1} * (\mathbf{A}^t * \mathbf{b}) \\ \mathbf{x} &= ((\mathbf{A}^t * \mathbf{A})^{-1} * \mathbf{A}^t) * \mathbf{b} \\ \mathbf{x} &= \mathbf{A}^+ * \mathbf{b} \end{aligned}$$

En el último paso se introdujo una matriz conocida como **pseudoinversa**, denotada como $\mathbf{A}^+$ y definida como:

$$\mathbf{A}^+ = (\mathbf{A}^t * \mathbf{A})^{-1} * \mathbf{A}^t$$

En el apéndice B se justifica la utilización de esta matriz para resolver este tipo de sistemas de ecuaciones con más ecuaciones que variables.

16.9.2. Ejemplo de aplicación de la pseudoinversa

Veamos que pasa si queremos encontrar la mejor recta que pase por los puntos: $P_1 = (1,1)$, $P_2 = (2,2)$, $P_3 = (3,4)$, $P_4 = (4,4)$ y $P_5 = (5,5)$. Con estos puntos se forma el sistema de ecuaciones siguiente:

$$\mathbf{A} * \mathbf{x} = \mathbf{b}$$

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \\ 3 & 1 \\ 4 & 1 \\ 5 & 1 \end{bmatrix} \quad , \quad \mathbf{x} = \begin{bmatrix} m \\ b \end{bmatrix} \quad , \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \\ 4 \\ 5 \end{bmatrix}$$

Hagamos los cálculos en Octave:

```
>> A = [1 1; 2 1; 3 1; 4 1; 5 1];
>> B = [1; 2; 4; 4; 5];
>> X = inv(A' * A) * A' * B
X =
   1.00000
   0.20000
```

Hemos encontrado la ecuación de la mejor línea que se ajusta a los puntos dados:

$$y = x + 0.2$$

En la figura 16.2 se muestran los 5 puntos y la línea encontrada. Esta figura se obtuvo en Octave con los siguientes comandos:

```
>> x=[1 2 3 4 5];
>> y=[1 2 4 4 5];
>> plot(x,y,'*');
>> hold on
>> grid on
>> axis equal
>> x1 =[0, 6];
>> y1 =x1 + 0.2;
>> plot(x1,y1)
>> for i=[1:5]
>>   plot([x(i) x(i)], [y(i) x(i) + 0.2], 'color', 'red')
>> endfor
>> xlabel('x', 'fontsize',22)
>> ylabel('y', 'fontsize',22)
>> text(3,2.9,'y = x + 0.2','fontsize',22)
>>print -color -depsc archivo.eps
```

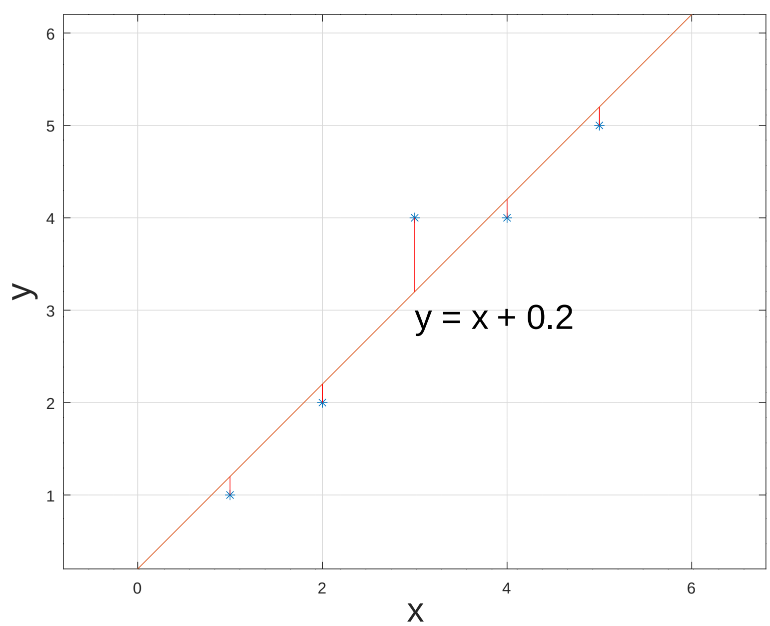


Figura 16.2: Ajuste de puntos a una línea recta.

Es necesario destacar que cuando utilizamos la pseudoinversa de la matriz, la **mejor** recta se obtiene utilizando el **criterio de mínimos cuadrados** descrito en el apéndice B.2.2. Se busca la recta que minimice la suma de las distancias al cuadrado de los puntos $P_i = (x_i, y_i)$ a los puntos correspondientes por donde pasa el polinomio lineal calculado: $(x_i, P(x_1))$. Es decir se busca un polinomio lineal que minimice el error total, E_t, siguiente:

$$E_t = (y_1 - P(x_1))^2 + (y_2 - P(x_2))^2 + \ldots + (y_k - P(x_k))^2 \tag{16.43}$$

$$E_t = \sum_{i=1}^{k} (y_i - P(x_i))^2 \tag{16.44}$$

En este caso el mejor polinomio es $P(x) = x + 0.2$. Las distancias entre los puntos dados, marcados en la figura 16.2 con asteriscos, y los puntos calculados utilizando la recta encontrada, se muestran con 5 segmentos de líneas rojas verticales. La suma de los cuadrados de dichas distancias es el error total E_t.

Finalizaremos este capítulo con un tema muy interesante llamado valores y vectores propios de una matriz. Esperamos despertar el interés del lector por adentrarse en esta rama de las matemáticas conocida como álgebra lineal.

16.10. Valores y vectores propios de una matriz

Sean $\mathbf{x}$ y $\mathbf{y}$ vectores columna del mismo tamaño. Si los valores de $\mathbf{y}$ se calculan a partir de los valores de $\mathbf{x}$ de acuerdo a la relación:

$$\mathbf{A} * \mathbf{x} = \mathbf{y} \tag{16.45}$$

Decimos que la matriz $\mathbf{A}$ transforma el vector de entrada $\mathbf{x}$ en un nuevo vector de salida $\mathbf{y}$, o que $\mathbf{y}$ es una **transformación lineal** de $\mathbf{x}$, definida por la matriz $\mathbf{A}$.

El **valor propio** (también llamado eigenvalor), λ, asociado al **vector propio** (también llamado eigenvector), $\mathbf{v}$, de la matriz $\mathbf{A}$ cumple la siguiente relación:

$$\mathbf{A} * \mathbf{v} = \lambda * \mathbf{v} \tag{16.46}$$

donde λ es un número real o complejo.

Si $\mathbf{v}$ es de tamaño 2, podemos verlo como $\mathbf{v} = [x \quad y]^t$ donde (x, y) son las coordenadas de un punto en el plano cartesiano. Es decir, $\mathbf{v}$ se puede ver como el vector que une el origen del sistema de coordenadas al punto (x, y), como cuando vimos un número complejo representado como un vector en la sección 13.3.2 de la página 205.

De esta manera, la transformación lineal de un vector propio solamente hace que el vector nuevo sea más grande o más pequeño que el vector propio original, conservando su dirección (o que invierta su sentido si λ es negativo). La figura 16.3 ilustra la situación con un vector propio $\mathbf{v} = [x \quad y]^t$ y un valor propio $\lambda = 2$.

> Dada la matriz cuadrada $\mathbf{A}$, el vector propio $\mathbf{v}$ y el correspondiente valor propio λ cumplen la igualdad siguiente:
>
> $$\mathbf{A} * \mathbf{v} = \lambda * \mathbf{v} \tag{16.47}$$
>
> donde λ es un número real o complejo.

Veamos un ejemplo numérico. Sea la matriz $\mathbf{A}$ siguiente:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$$

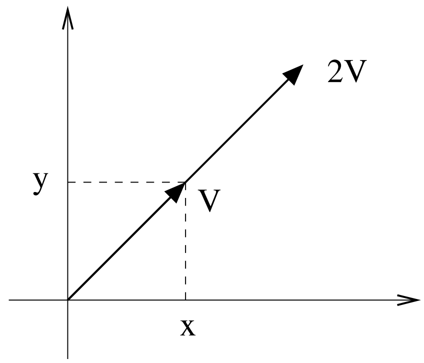


Figura 16.3: Visualización de un vector propio y un valor propio de 2. El vector propio $\mathbf{v} = [x \quad y]^t$ se transforma en el vector $2\mathbf{v}$, simplemente duplicó su longitud.

El lector puede comprobar que $\lambda_1 = 2$ y $\mathbf{v}_1 = [1 \quad 1]^t$ satisfacen la ecuación $A * \mathbf{v}_1 = \lambda_1 * \mathbf{v}_1$,

$$\begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = 2 * \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

De forma similar podemos comprobar que $\lambda_2 = 4$ y $\mathbf{v}_2 = [-1 \quad 1]^t$ satisfacen también la ecuación $\mathbf{A} * \mathbf{v}_2 = \lambda_2 * \mathbf{v}_2$,

$$\begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} = 4 * \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

De manera que la matriz $\mathbf{A}$ tiene los valores propios $\lambda_1 = 2$ y $\lambda_2 = 4$ y los correspondientes vectores propios $\mathbf{v}_1 = [1 \quad 1]^t$ y $\mathbf{v}_2 = [-1 \quad 1]^t$. Sin embargo, los vectores propios no son únicos, cualquier múltiplo del vector propio también cumple la condición requerida. Por ejemplo, veamos los casos de $2 * \mathbf{v}_1 = [2 \quad 2]^t$ y $(-1) * \mathbf{v}_1 = [-1 \quad -1]^t$,

$$\begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix} = 2 * \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \end{bmatrix} = 2 * \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

Por esta razón los vectores propios se expresan como vectores de **magnitud unitaria**, donde la **magnitud de un vector**, denotada como $|\mathbf{v}|$, mide la distancia del vector al origen del plano cartesiano y se calcula como:

$$|\mathbf{v}| = \sqrt{\mathbf{v}^t * \mathbf{v}} \tag{16.48}$$

El lector interesado puede revisar la sección B.1.1 donde se presenta el cálculo de la magnitud de un vector.

Continuando con nuestro ejemplo numérico, las magnitudes de $\mathbf{v}_1$ y $\mathbf{v}_2$ son:

$$\begin{aligned} |\mathbf{v}_1| &= \sqrt{[1 \quad 1] * [1 \quad 1]^t} \\ |\mathbf{v}_1| &= \sqrt{2} \\ |\mathbf{v}_2| &= \sqrt{[-1 \quad 1] * [-1 \quad 1]^t} \\ |\mathbf{v}_2| &= \sqrt{2} \end{aligned}$$

De esta manera podemos calcular los vectores unitarios $\mathbf{u}_1$ y $\mathbf{u}_2$ que corresponderán a los vectores $\mathbf{v}_1$ y $\mathbf{v}_2$ respectivamente,

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_1 &= \frac{1}{\sqrt{2}} * [1 \quad 1]^t \\ \mathbf{u}_1 &= \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}^t \\ \mathbf{u}_2 &= \frac{1}{\sqrt{2}} * [-1 \quad 1]^t \\ \mathbf{u}_2 &= \begin{bmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}^t \end{aligned}$$

De tal manera que se sigue cumpliendo que: $\mathbf{A} * \mathbf{u}_1 = 2 * \mathbf{u}_1$ y $\mathbf{A} * \mathbf{u}_2 = 4 * \mathbf{u}_2$.

Volviendo al caso general, de una matriz $\mathbf{A}_{2\times 2}$ y vectores propios unitarios $\mathbf{u}_1 = [u_{1x} \quad u_{1y}]^t$, y $\mathbf{u}_2 = [u_{2x} \quad u_{2y}]^t$, asociados respectivamente a los valores propios λ_1 y λ_2, tenemos que se cumplen las dos condiciones requeridas:

$$\begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} \\ a_{2,1} & a_{2,2} \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} u_{1x} \\ u_{1y} \end{bmatrix} = \lambda_1 * \begin{bmatrix} u_{1x} \\ u_{1y} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} \\ a_{2,1} & a_{2,2} \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} u_{2x} \\ u_{2y} \end{bmatrix} = \lambda_2 * \begin{bmatrix} u_{2x} \\ u_{2y} \end{bmatrix}$$

El lector puede comprobar que estas dos ecuaciones se pueden escribir como una ecuación única de la siguiente forma:

$$\begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} \\ a_{2,1} & a_{2,2} \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} u_{1x} & u_{2x} \\ u_{1y} & u_{2y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_1 * u_{1x} & \lambda_2 * u_{2x} \\ \lambda_1 * u_{1y} & \lambda_2 * u_{2y} \end{bmatrix}$$

La cual se puede simplificar como sigue:

$$\begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} \\ a_{2,1} & a_{2,2} \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} u_{1x} & u_{2x} \\ u_{1y} & u_{2y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_{1x} & u_{2x} \\ u_{1y} & u_{2y} \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix}$$

Sea $\mathbf{U}$ la matriz que contiene como columnas a los vectores propios unitarios y $\mathbf{D}$ la matriz diagonal que contiene los correspondientes valores propios. La ecuación anterior se puede representar en forma compacta como:

$$\mathbf{A} * \mathbf{U} = \mathbf{U} * \mathbf{D}$$

Si posmultiplicamos a ambos lados de la igualdad por $\mathbf{U}^{-1}$ llegamos a un resultado muy importante:

$$\begin{aligned} \mathbf{A} * \mathbf{U} &= \mathbf{U} * \mathbf{D} \\ \mathbf{A} * \mathbf{U} * \mathbf{U}^{-1} &= \mathbf{U} * \mathbf{D} * \mathbf{U}^{-1} \\ \mathbf{A} * (\mathbf{U} * \mathbf{U}^{-1}) &= \mathbf{U} * \mathbf{D} * \mathbf{U}^{-1} \\ \mathbf{A} * \mathbf{I} &= \mathbf{U} * \mathbf{D} * \mathbf{U}^{-1} \\ \mathbf{A} &= \mathbf{U} * \mathbf{D} * \mathbf{U}^{-1} \end{aligned}$$

La matriz $\mathbf{A}$ se puede expresar en la forma:

$$\mathbf{A} = \mathbf{U} * \mathbf{D} * \mathbf{U}^{-1} \tag{16.49}$$

Donde la matriz $\mathbf{U}$ tiene como columnas a los vectores propios de $\mathbf{A}$ y la matriz $\mathbf{D}$ es una matriz diagonal que contiene los correspondientes valores propios de $\mathbf{A}$.

Comprobemos que los valores propios y sus correspondientes vectores propios del ejemplo numérico que estamos viendo satisfacen la ecuación 16.49. Para este propósito nos auxiliaremos de Octave:

```
>> U = [1/sqrt(2)  -1/sqrt(2); 1/sqrt(2)  1/sqrt(2)]
U =
   0.70711  -0.70711
   0.70711   0.70711
>> D = [2 0; 0 4]
D =
   2   0
   0   4
>> A = U * D * inv(U)
A =
   3  -1
  -1   3
```

16.10.1. Ejemplos de aplicación de valores y vectores propios

Veamos ahora algunas aplicaciones de lo que hemos visto hasta ahora.

Evaluación rápida de $\mathbf{A}^k$

Sea $\mathbf{x}_0$ un vector en el tiempo t_0, el cual sufre una transformación lineal dada por:

$$\mathbf{A} * \mathbf{x}_0 = \mathbf{x}_1$$

Siendo $\mathbf{x}_1$ el vector en el tiempo t_1. Si a $\mathbf{x}_1$ se aplica la misma transformación lineal tenemos:

$$\begin{aligned} \mathbf{A} * \mathbf{x}_1 &= \mathbf{x}_2 \\ \mathbf{A} * (\mathbf{A} * \mathbf{x}_0) &= \mathbf{x}_2 \\ (\mathbf{A} * \mathbf{A}) * \mathbf{x}_0 &= \mathbf{x}_2 \\ \mathbf{A}^2 * \mathbf{x}_0 &= \mathbf{x}_2 \end{aligned}$$

Si se repite otra vez el proceso tenemos:

$$\begin{aligned} \mathbf{A} * \mathbf{x}_2 &= \mathbf{x}_3 \\ \mathbf{A} * (\mathbf{A}^2 * \mathbf{x}) &= \mathbf{x}_3 \\ (\mathbf{A} * \mathbf{A}^2) * \mathbf{x}_0 &= \mathbf{x}_3 \\ \mathbf{A}^3 * \mathbf{x}_0 &= \mathbf{x}_3 \end{aligned}$$

De manera que si se repite k veces, tenemos el siguiente resultado:

$$\mathbf{A}^k * \mathbf{x}_0 \quad = \quad \mathbf{x}_k \tag{16.50}$$

Para calcular $\mathbf{x}_k$ a partir del vector inicial $\mathbf{x}_0$ y de la matriz $\mathbf{A}$ tenemos que evaluar $\mathbf{A}^k$. Por la ecuación 16.49 sabemos que la matriz $\mathbf{A}$ se puede expresar como:

$$\mathbf{A} = \mathbf{U}\mathbf{D}\mathbf{U}^{-1}$$

De manera que podemos calcular $\mathbf{A}^2$ como sigue:

$$\begin{aligned}
\mathbf{A}^2 &= \mathbf{A} * \mathbf{A} \\
\mathbf{A}^2 &= (\mathbf{U}\mathbf{D}\mathbf{U}^{-1}) * (\mathbf{U}\mathbf{D}\mathbf{U}^{-1}) \\
\mathbf{A}^2 &= \mathbf{U}\mathbf{D}(\mathbf{U}^{-1}\mathbf{U})\mathbf{D}\mathbf{U}^{-1} \\
\mathbf{A}^2 &= \mathbf{U}\mathbf{D}\mathbf{I}\mathbf{D}\mathbf{U}^{-1} \\
\mathbf{A}^2 &= \mathbf{U}\mathbf{D}\mathbf{D}\mathbf{U}^{-1} \\
\mathbf{A}^2 &= \mathbf{U}\mathbf{D}^2\mathbf{U}^{-1}
\end{aligned}$$

Si continuamos el proceso podemos calcular $\mathbf{A}^3$ como sigue:

$$\begin{aligned}
\mathbf{A}^3 &= \mathbf{A}^2 * \mathbf{A} \\
\mathbf{A}^3 &= (\mathbf{U}\mathbf{D}^2\mathbf{U}^{-1}) * (\mathbf{U}\mathbf{D}\mathbf{U}^{-1}) \\
\mathbf{A}^3 &= \mathbf{U}\mathbf{D}^2(\mathbf{U}^{-1}\mathbf{U})\mathbf{D}\mathbf{U}^{-1} \\
\mathbf{A}^3 &= \mathbf{U}\mathbf{D}^2\mathbf{I}\mathbf{D}\mathbf{U}^{-1} \\
\mathbf{A}^3 &= \mathbf{U}\mathbf{D}^2\mathbf{D}\mathbf{U}^{-1} \\
\mathbf{A}^3 &= \mathbf{U}\mathbf{D}^3\mathbf{U}^{-1}
\end{aligned}$$

De manera que podemos inferir el resultado deseado para calcular $\mathbf{A}^k$ como:

$$\mathbf{A}^k \quad = \quad \mathbf{U}\mathbf{D}^k\mathbf{U}^{-1} \tag{16.51}$$

El lector puede comprobar que $\mathbf{D}^k$ se puede calcular muy fácilmente al ser $\mathbf{D}$ una matriz diagonal con los n valores propios de la matriz cuadrada $\mathbf{A}$ de tamaño $n \times n$.

$$\mathbf{D}^k = \begin{bmatrix} \lambda_1^k & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2^k & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_n^k \end{bmatrix} \tag{16.52}$$

Podemos hacer un ejercicio numérico de calcular $\mathbf{A}^4$ con las ecuaciones obtenidas (16.51 y 16.52) y comparar el resultado con los productos matriciales directos. Analicemos el siguiente código en Octave que retoma las matrices $\mathbf{A}$, $\mathbf{U}$ y $\mathbf{D}$ que hemos utilizado como ejemplo al inicio de esta sección:

```
>> A=[3 -1; -1 3]
A =
```

```
   3  -1
  -1   3
>> U=[1/sqrt(2) -1/sqrt(2); 1/sqrt(2) 1/sqrt(2)]
U =
   0.70711  -0.70711
   0.70711   0.70711
>> D4=[2^4 0; 0 4^4]
D4 =
    16    0
     0   256
>> A4 = U * D4 * inv(U)
A4 =
   136  -120
  -120   136
>> A*A*A*A
%
$$\mat{A} = \mat{U} \mat{D} \mat{U}^{-1}$$
%
ans =
   136  -120
  -120   136
```

Comprobamos que efectivamente se obtiene el mismo resultado.

Vector de salida desacoplado de todas las componentes del vector de entrada

Sea la transformación lineal del vector $\mathbf{x}$ de entrada en el vector $\mathbf{y}$ de salida definida por:

$$\mathbf{A} * \mathbf{x} = \mathbf{y}$$

Utilizando la ecuación 16.49, la matriz A se puede expresar como:

$$\mathbf{A} = \mathbf{U}\mathbf{D}\mathbf{U}^{-1}$$

Si sustituimos este resultado en la ecuación anterior, tenemos:

$$\begin{aligned}
\mathbf{A} * \mathbf{x} &= \mathbf{y} \\
(\mathbf{U}\mathbf{D}\mathbf{U}^{-1}) * \mathbf{x} &= \mathbf{y} \\
\mathbf{U}\mathbf{D}(\mathbf{U}^{-1} * \mathbf{x}) &= \mathbf{y} \\
\mathbf{U}^{-1}\mathbf{U}\mathbf{D}(\mathbf{U}^{-1} * \mathbf{x}) &= \mathbf{U}^{-1}\mathbf{y} \\
(\mathbf{U}^{-1}\mathbf{U})\mathbf{D}(\mathbf{U}^{-1} * \mathbf{x}) &= \mathbf{U}^{-1}\mathbf{y} \\
\mathbf{I}\mathbf{D}(\mathbf{U}^{-1} * \mathbf{x}) &= \mathbf{U}^{-1}\mathbf{y} \\
\mathbf{D}(\mathbf{U}^{-1} * \mathbf{x}) &= \mathbf{U}^{-1}\mathbf{y} \\
\mathbf{D}\mathbf{x}' &= \mathbf{y}' \qquad (16.53)
\end{aligned}$$

Donde $\mathbf{x}' = \mathbf{U}^{-1} * \mathbf{x}$ y $\mathbf{y}' = \mathbf{U}^{-1}\mathbf{y}$, son los vectores de entrada y salida transformados por $\mathbf{U}^{-1}$. La ecuación 16.53 obtenida la podemos representar como sigue:

$$\begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_n \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ \dots \\ x'_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y'_1 \\ y'_2 \\ \dots \\ y'_n \end{bmatrix} \qquad (16.54)$$

La cual se simplifica a solamente n ecuaciones sencillas:

$$\begin{aligned} \lambda_1 * x'_1 &= y'_1 \\ \lambda_2 * x'_2 &= y'_2 \\ \ldots & \\ \lambda_n * x'_n &= y'_n \end{aligned} \quad (16.55)$$

Hemos llegado al resultado deseado, la componente y'_i del vector de salida solo depende del producto del valor propio λ_i y de la correspondiente componente x'_i del vector de entrada modificado.

Tendencia de un transformación lineal

Consideremos que una empresa esta analizando las preferencias de los clientes por tres marcas distintas de un determinado producto. Sea el vector de entrada $\mathbf{x}_0$ definido como:

$$\mathbf{x}_0 = \begin{bmatrix} 0.45 \\ 0.25 \\ 0.30 \end{bmatrix}$$

El primer valor (0.45) define la preferencia por el producto de la marca A, el segundo valor (0.25) define la preferencia por el producto de la marca B y el tercer valor (0.30) la preferencia por el producto de la marca C. Estos números definen la probabilidad de adquirir el producto indicado, de manera que la suma de todos los números es 1. Mientras más cercano es el valor al 1, la preferencia va aumentando; de manera similar, mientras más cercano es el valor al 0, la preferencia va disminuyendo.

Asumamos que podemos calcular la preferencia al cabo de un mes, $\mathbf{x}_1$ por la transformación lineal dada por:

$$\mathbf{A} * \mathbf{x}_0 = \mathbf{x}_1$$

Donde la matriz $\mathbf{A}$ es la siguiente:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0.8 & 0.03 & 0.20 \\ 0.10 & 0.95 & 0.05 \\ 0.10 & 0.02 & 0.75 \end{bmatrix}$$

De igual forma tenemos que para el segundo mes:

$$\mathbf{A} * \mathbf{x}_1 = \mathbf{x}_2$$

Si efectuamos los cálculos en Octave tenemos:

```
>> X0 = [0.45; 0.25; 0.30]
X0 =
   0.45000
   0.25000
   0.30000
>>  A=[0.8 0.03 0.20; 0.10 0.95 0.05; 0.10 0.02 0.75]
A =
   0.800000   0.030000   0.200000
   0.100000   0.950000   0.050000
   0.100000   0.020000   0.750000
```

```
>> X1 = A*X0
X1 =
   0.42750
   0.29750
   0.27500
>> X2 = A*X1
X2 =
   0.40593
   0.33912
   0.25495
```

Observamos que las preferencias por las diferentes marcas empiezan a cambiar. Si queremos determinar si existe un vector en donde se estabilicen las preferencias, tenemos que responder la pregunta: ¿es posible satisfacer la siguiente ecuación?

$$\mathbf{A} * \mathbf{x} = \mathbf{x}$$

El lector reconocerá que esta ecuación tiene relación con el vector propio $\mathbf{x}$ correspondiente al valor propio unitario de la matriz $\mathbf{A}$. De manera que la pregunta equivalente es si la matriz $\mathbf{A}$ tiene algún valor propio unitario.

Para resolver este problema utilizaremos la función eig de Octave que realiza el cálculo de valores y vectores propios. La función eig recibe la matriz $\mathbf{A}$ y regresa la matriz $\mathbf{U}$ y la matriz diagonal $\mathbf{D}$, como se muestra a continuación:

```
>> [U D] = eig(A)
U =
  -0.76770   0.34973   0.51126
   0.14306   0.91234  -0.80696
   0.62464   0.21288   0.29569
D =
Diagonal Matrix
   0.63168         0         0
         0   1.00000         0
         0         0   0.86832
```

Podemos observar que el segundo valor propio es 1.0, el cual corresponde al vector propio de U ubicado en la segunda columna. Pasemos a $\mathbf{x}$ el contenido de dicha columna:

```
X=U(:,2)
X =
   0.34973
   0.91234
   0.21288
```

El problema todavía no está resuelto, debido a que la suma de los valores de $\mathbf{x}$ no es la unidad. Debemos encontrar un valor k tal que multiplicado por $\mathbf{x}$ nos de la suma unitaria. Es decir:

$$\begin{aligned}
k * (0.34973 + 0.91234 + 0.21288) &= 1 \\
k * 1.4750 &= 1 \\
k * 1.4750 * \frac{1}{1.4750} &= 1 * \frac{1}{1.4750} \\
k &= 0.67799
\end{aligned}$$

De manera que el vector deseado es $\mathbf{x}_d = k * \mathbf{x}$,

```
>>k =  0.67799;
>>X_d = k * X
X_d =
   0.23711
   0.61856
   0.14433
```

El lector puede comprobar que este resultado es correcto al evaluar la preferencia en el mes k mediante la expresión:

$$\mathbf{A}^k * \mathbf{x}_0 = \mathbf{x}_k$$

Al utilizar Octave, podemos observar que en $k = 90$ ya se estabilizó en el resultado obtenido anteriormente:

```
>> X90 = A^90 * X0
X90 =
   0.23711
   0.61856
   0.14433
```

16.10.2. Cálculo de valores y vectores propios

Para calcular los valores y vectores propios de una matriz A procederemos a partir de su definición:

$$\begin{aligned}
\mathbf{A} * \mathbf{v} &= \lambda * \mathbf{v} \\
\mathbf{A} * \mathbf{v} - \lambda * \mathbf{v} &= \lambda * \mathbf{x} - \lambda * \mathbf{v} \\
\mathbf{A} * \mathbf{v} - \lambda * \mathbf{v} &= \mathbf{0} \\
\mathbf{A} * \mathbf{v} - \lambda * \mathbf{I} * \mathbf{v} &= \mathbf{0} \\
(\mathbf{A} - \lambda * \mathbf{I})\mathbf{v} &= \mathbf{0} \qquad (16.56)
\end{aligned}$$

De manera que es necesario encontrar los posibles valores de λ en la ecuación matricial homogénea obtenida, de manera que obtenga una infinidad de soluciones para $\mathbf{v}$. Esto se logra cuando el determinante de la matriz $(\mathbf{A} - \lambda * \mathbf{I})$ es cero.

Veamos un ejemplo numérico, aprovechando la matriz $\mathbf{A}$ con que iniciamos esta sección:

$$\begin{aligned}
\mathbf{A} &= \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} \\
\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I} &= \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} - \lambda * \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \\
\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I} &= \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix} \\
\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I} &= \begin{bmatrix} 3-\lambda & -1 \\ -1 & 3-\lambda \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

De esta última expresión podemos calcular su determinante:

$$\begin{aligned}
|\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}| &= (3-\lambda)(3-\lambda) - (-1)(-1) \\
|\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}| &= 9 - 3\lambda - 3\lambda + \lambda^2 - 1 \\
|\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}| &= \lambda^2 - 6\lambda + 8
\end{aligned}$$

Como el determinante debe ser 0, tenemos: $\lambda^2 - 6\lambda + 8 = 0$. Si resolvemos esta ecuación cuadrática, obtenemos los valores propios $\lambda_1 = 2$ y $\lambda_2 = 4$. Ahora calculemos el vector propio que corresponde al valor propio $\lambda_1 = 2$.

$$\begin{aligned}
(\mathbf{A} - \lambda_1 * \mathbf{I})\mathbf{v} &= \mathbf{0} \\
\left(\begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} - 2 * \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\right)\begin{bmatrix} v_x \\ v_y \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \\
\left(\begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ \lambda^2 - 6\lambda + 80 & 2 \end{bmatrix}\right)\begin{bmatrix} v_x \\ v_y \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \\
\begin{bmatrix} 3-2 & -1 \\ -1 & 3-2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} v_x \\ v_y \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \\
\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} v_x \\ v_y \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

Al hacer la matriz ampliada en preparación de la aplicación del método de Gauss-Jordan, tenemos:

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Si aplicamos la operación elemental $R_2 \leftarrow R_2 - R_1$, obtenemos:

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

El segundo renglón de ceros nos indica que el sistema tiene infinidad de soluciones dadas por la primera ecuación:

$$\begin{aligned}
v_x - v_y &= 0 \\
v_x - v_y + v_y &= 0 + v_y \\
v_x &= v_y
\end{aligned}$$

de tal forma que si $v_x = \alpha$, entonces $v_y = \alpha$, siendo α un número real. Si $\alpha = 1$, obtenemos el vector propio V_1:

$$\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Este vector lo podemos convertir al vector unitario $\mathbf{u}_1$ como vimos anteriormente. Para calcular el otro vector propio correspondiente a $\lambda_2 = 4$ se puede proceder de una manera similar.

Si la matriz $\mathbf{A}$ es de tamaño $n \times n$ el cálculo del determinante involucra encontrar las raíces de un polinomio de grado n. Sin embargo, el cálculo del determinante de matrices de mayor tamaño que 2×2 queda fuera del alcance de este libro. El lector interesado puede encontrar abundante información en libros de álgebra lineal.

16.11. Ejercicios

1. Resuelva el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{aligned} x+y+z &= 6 \\ 2x-y+z &= 3 \\ -x+3y+z &= 8 \end{aligned}$$

2. Resuelva el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{aligned} x+y+z &= 0 \\ 2x+y+z &= -1 \\ x+y+2z &= 2 \end{aligned}$$

3. En la ecuación 16.28, compruebe que efectivamente se verifica que: $\mathbf{A} * \mathbf{A}^{-1} = \mathbf{I}_2$ y $\mathbf{A}^{-1} * \mathbf{A} = \mathbf{I}_2$.

4. Determine la inversa de la matriz siguiente:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a & b & 0 \\ c & d & 0 \\ 0 & 0 & e \end{bmatrix}$$

   Determine además las condiciones que deben cumplirse para que la matriz $\mathbf{A}$ tenga inversa.

5. Determine las soluciones del siguiente sistema de ecuaciones dependiendo del valor de k, un número real. ¿Se presentan los casos de única solución, múltiples soluciones o ninguna solución?

$$\begin{aligned} 3x+2y+z &= k \\ x+2y+3z &= -k \\ x+z &= k \end{aligned}$$

6. Encuentre todas las soluciones del siguiente sistema de ecuaciones, dependiendo del valor de k:

$$\begin{aligned} x+y+z &= k \\ x+2y+z &= -k \\ x+y+2z &= k \end{aligned}$$

7. Determine la recta que pasa por los puntos $(1,10)$, $(2,9)$, $(3,7)$ y $(4,8)$. Dibuje en Octave la recta calculada, junto con los puntos.

8. Determine la recta que pasa por los puntos $(0,0)$, $(1,1.5)$, $(2,-0.5)$, $(3,1.0)$ y $(4,0.2)$. Dibuje en Octave la recta calculada, junto con los puntos.

9. Calcule la distancia del punto $P_1 = (5,3)$ a la recta $y = \frac{1}{4}x + 3$.

10. Calcule el área del triángulo definido por los vértices: $P_1 = (1,1)$, $P_2 = (5,3)$ y $P_3 = (3,7)$. Sugerencia: elija un lado del triángulo como la base y calcule la altura del triángulo como la distancia más corta del vértice opuesto a la base, con respecto a la línea de la base.

11. Encuentre los valores y vectores propios de la matriz siguiente:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1.8 & 0.4 \\ 0.4 & 1.2 \end{bmatrix}$$

12. Aprovechando Octave para calcular los valores y vectores propios de una matriz, exprese $\mathbf{A}$ como el producto $\mathbf{A} = \mathbf{U}\mathbf{D}\mathbf{U}^t$,

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

Capítulo 17

Polinomios

En este capítulo veremos polinomios de grado n en una variable, los cuales se expresan de la siguiente forma:

$$P(x) = a_n\, x^n + a_{n-1}\, x^{n-1} + \ldots + a_1\, x^1 + a_0\, x^0 \tag{17.1}$$

Donde n es un entero no negativo, llamado **grado del polinomio**, x es la variable de entrada o independiente, a_n es un número real que multiplica a x^n, $a_{n-1}, \ldots, a_1$ y a_0 son números reales que multiplican a $x^{n-1}, \ldots, x^1$ y x^0, respectivamente.

Debido a su importancia en el comportamiento extremo de un polinomio, al coeficiente a_n se le denomina **coeficiente líder** del polinomio. Si consideramos que $x^1 = x$ y $x^0 = 1$, el polinomio puede expresarse en una forma más simple como sigue:

$$P(x) = a_n\, x^n + a_{n-1}\, x^{n-1} + \ldots + a_1\, x + a_0 \tag{17.2}$$

Como $P(x)$ es una función que depende de la variable independiente x, también es común expresar un polinomio de la forma:

$$y = a_n\, x^n + a_{n-1}\, x^{n-1} + \ldots + a_1\, x + a_0 \tag{17.3}$$

Resaltando que y es la variable dependiente o de salida y x es la variable independiente o de entrada.

Veremos en este capítulo que las gráficas de polinomios son curvas suaves, las cuales resultan muy apropiadas para modelar muchos fenómenos de la naturaleza. Constituyen una valiosa herramienta para la ciencia, la ingeniería, las finanzas, etc. Para determinar un polinomio que pasa por ciertos puntos predeterminados, se formarán sistemas de ecuaciones lineales que se resolverán con las herramientas vistas en el capítulo anterior.

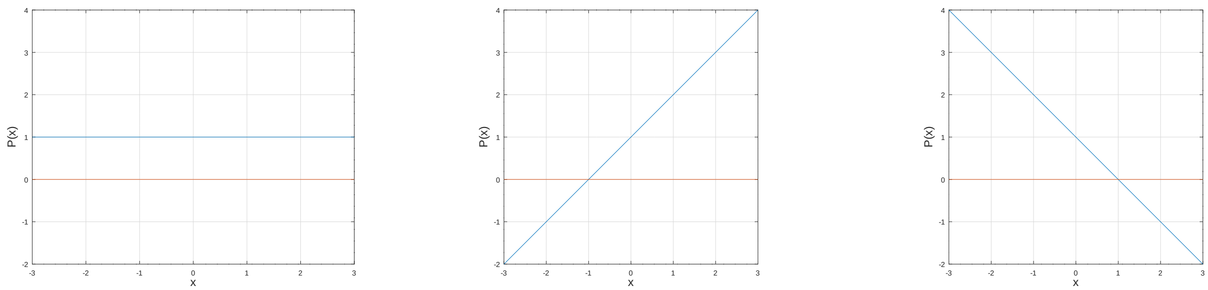
17.1. Ejemplos de polinomios

Dependiendo del grado del polinomio tenemos algunos casos especiales:

- Polinomio de grado 0 o polinomio constante.

$$P(x) = a_0$$

  Este polinomio sólo tiene a la constante a_0 y le corresponde una gráfica de una línea horizontal. En la figura 17.1(a) se muestra la gráfica del polinomio $P(x) = 1$.



(a) $P(x) = 1$ (b) $P(x) = x + 1$ (c) $P(x) = -x + 1$

Figura 17.1: Ejemplos de polinomios de grado 0 y 1.

Un polinomio de grado 0, $P(x) = a_0$, tiene como gráfica a una recta horizontal.

- Polinomio de grado 1 o polinomio lineal:

$$P(x) = a_1 x + a_0$$

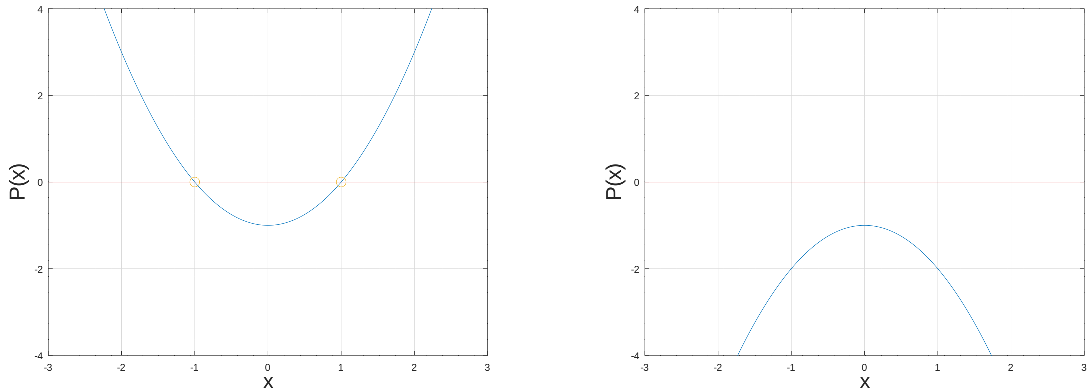
Este polinomio corresponde a la gráfica de una recta. El lector reconocerá fácilmente que $a_1 = m$ y $a_0 = b$ en la ecuación de la recta: $y = mx + b$. En la figura 17.1(b) se muestra la gráfica del polinomio lineal $P(x) = x + 1$, mientras que en la figura 17.1(c) la gráfica corresponde al polinomio $P(x) = -x + 1$. Observe que el primer caso el coeficiente líder es positivo mientras que en el segundo caso el coeficiente líder es negativo. En ambos casos se ha marcado con un pequeño círculo el punto donde la recta cruza el eje x, indicando el valor de x cuando $P(x) = 0$. Cuando ocurre esta situación, decimos que ese valor de x es la raíz del polinomio. En el caso del polinomio $P(x) = x + 1$, la raíz corresponde a $x = -1$ y en el caso de $P(x) = -x + 1$, la raíz corresponde a $x = 1$.

Un polinomio de grado 1, $P(x) = a_1 x + a_0$, tiene como gráfica a una recta diferente de la horizontal.

- Polinomios de grado 2 o polinomio cuadrático:

$$P(x) = a_2 x^2 + a_1 x + a_0$$

Observe que dependiendo del signo de a_2, la gráfica de $P(x)$ es una curva conocida como **parábola** la cual se abre hacia arriba (si $a_2 > 0$, como en la figura 17.2(a)) o se abre hacia abajo (si $a_2 < 0$, como en la figura 17.2(b)). También puede observar que si la ecuación cuadrática $a_2 x^2 + a_1 x + a_0 = 0$ tiene soluciones reales: x_1 y x_2, entonces $P(x_1) = 0$ y $P(x_2) = 0$. Es decir, la parábola toca el eje x en las raíces: x_1 y x_2, como se muestra en la figura 17.2(a). Si la ecuación cuadrática no tiene raíces reales, entonces la curva no cruza el eje x, como el ejemplo mostrado en la figura 17.2(b).



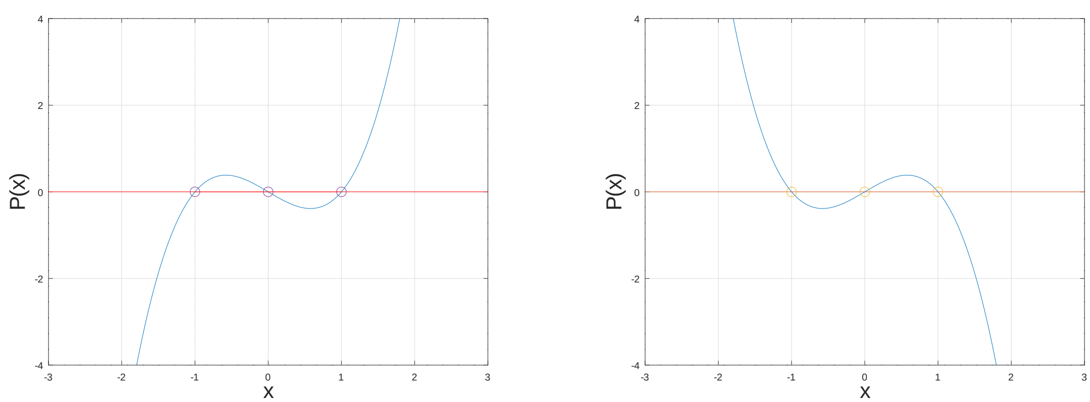
(a) $P(x) = x^2 - 1$, raíces reales.

(b) $P(x) = -x^2 - 1$, raíces complejas.

Figura 17.2: Ejemplos de polinomios de grado 2.

Un polinomio de grado 2, $P(x) = a_2x^2 + a_1x + a_0$, tiene como gráfica a una parábola que se abre hacia arriba o hacia abajo, dependiendo del signo del coeficiente líder a_2.

- Polinomio de grados superiores. Para ilustrar el comportamiento de polinomios de grados mayores a dos, en las figuras 17.3(a) y 17.3(b) se presentan las gráficas de polinomios de grado 3, llamados también polinomios cúbicos, con coeficiente líder positivo y negativo, respectivamente.

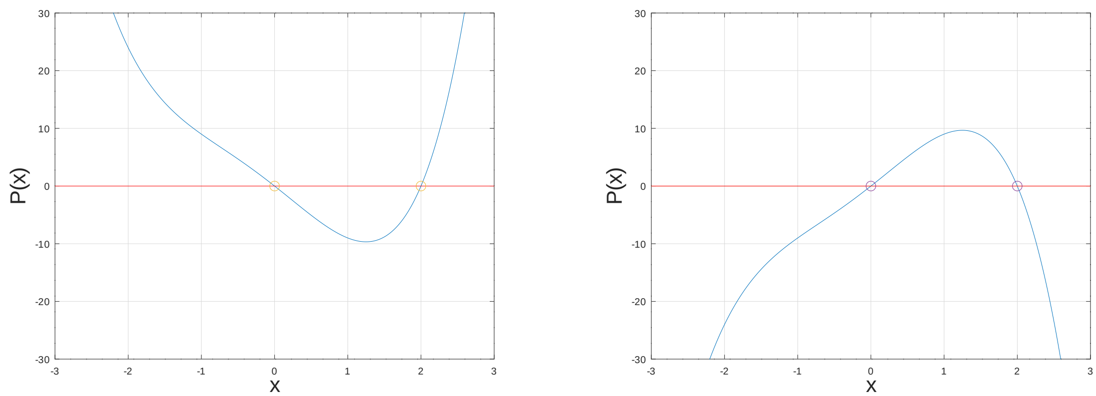


(a) $P(x) = x^3 - x$, coeficiente líder positivo.

(b) $P(x) = -x^3 + x$, coeficiente líder negativo.

Figura 17.3: Ejemplos de polinomios de grado 3.

Finalmente en las figuras 17.4(a) y 17.4(b) se muestran las gráficas de polinomios de grado 4. Recuerde que es sencillo graficar con Octave. Para obtener la gráfica mostrada en la figura 17.4(a) se utilizaron los siguientes comandos:



(a) $P(x) = x^4 + x^3 - x^2 - 10x$

(b) $P(x) = -x^4 - x^3 + x^2 + 10x$

Figura 17.4: Ejemplos de polinomios de grado 4.

```
>> x=[-3:0.01:3];
>> y1 = x.^4 + x.^3 - x.^2 - 10 .* x;
>> plot(x,y1);
>> axis([-3 3 -30 30]);
>> grid on;
>> hold on;
>> y2 = 0 .* x;
>> plot(x,y2, 'color', 'red');
>> plot([0 2],[0 0], 'o', 'markersize',10)
>> xlabel('x', 'fontsize',22);
>> ylabel('P(x)','fontsize',22);
>> print -color -depsc grafica.eps
```

Note que y2 se utiliza para graficar una línea horizontal a la altura de $P(x) = 0$ y que el comando “hold on” permite que las llamadas a la función plot se desplieguen sobre la misma gráfica.

Los polinomios tienen como gráficas a curvas suaves en el plano cartesiano.

Como ya habrá observado el lector, el coeficiente líder del polinomio y el grado del polinomio determinan la tendencia del polinomio en los extremos de la gráfica. Este comportamiento se explora en la siguiente sección.

17.1.1. Comportamiento extremo de un polinomio

Enseguida veremos la tendencia que toma el polinomio $P(x)$ cuando la variable x toma valores reales cada vez más grandes; es decir, la tendencia de la curva que sigue el polinomio en el extremo derecho de la gráfica. Vamos a utilizar la notación: $x \to \infty$ (se leé “x tiende a infinito”) para indicar que la variable x sigue la tendencia de tomar valores cada vez más grandes.

El otro extremo, la parte izquierda de la gráfica, corresponde a la tendencia de $P(x)$ cuando la variable x toma valores cada vez más pequeños (recuerde que un número x_1 es más pequeño o menor que otro número x_2 si x_1 se localiza en un punto a la izquierda del punto que corresponde a x_2). Vamos a utilizar la notación: $x \to -\infty$ (se leé "x tiende a menos infinito") para indicar que la variable x sigue la tendencia de tomar valores cada vez más pequeños.

Dependiendo del grado del polinomio y del signo del coeficiente líder tenemos cuatro casos:

- Grado par y coeficiente líder positivo. El comportamiento de un polinomio de grado par es similar al polinomio cuadrático, debido a que el producto de dos números positivos o dos números negativos siempre es un número positivo. De manera que cuando el coeficiente líder a_n es positivo, la gráfica es semejante a la parábola que se abre hacia arriba:
  - Si $x \to -\infty$ entonces $P(x) \to \infty$. Si $x \to \infty$ entonces $P(x) \to \infty$.
- Grado par y coeficiente líder negativo. En este caso, cuando el coeficiente líder a_n es negativo, la gráfica es semejante a la parábola que se abre hacia abajo:
  - Si $x \to -\infty$ entonces $P(x) \to -\infty$. Si $x \to \infty$ entonces $P(x) \to -\infty$.
- Grado impar y coeficiente líder positivo. El comportamiento de un polinomio de grado impar es similar al polinomio lineal o al polinomio cúbico, debido a que un número negativo elevado a una potencia impar da como resultado un número negativo. De manera que cuando el coeficiente líder a_n es positivo, la gráfica es semejante a la recta con pendiente positiva:
  - Si $x \to -\infty$ entonces $P(x) \to -\infty$. Si $x \to \infty$ entonces $P(x) \to \infty$.
- Grado impar y coeficiente líder negativo. En este caso, cuando el coeficiente líder a_n es negativo, la gráfica es semejante a la recta con pendiente negativa:
  - Si $x \to -\infty$ entonces $P(x) \to \infty$. Si $x \to \infty$ entonces $P(x) \to -\infty$.

La figura 17.5 ilustra estos cuatro casos. También es importante observar que en los polinomios de grado impar, necesariamente hay al menos una raíz real, donde la curva cruza el eje x.

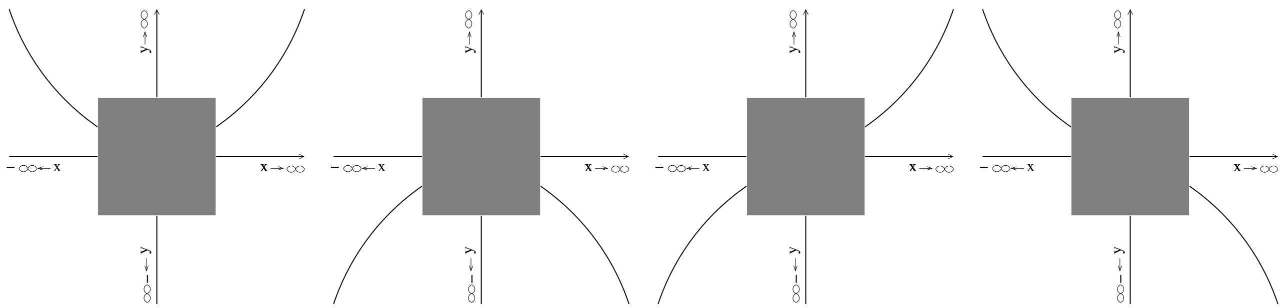
Finalmente para apreciar el papel del coeficiente líder, consideremos el siguiente polinomio:

$$P(x) = 0.01\ x^3 + 10x^2$$

En este caso, el coeficiente líder $a_3 = 0.01$ es muy pequeño, comparado con el coeficiente $a_2 = 10$. Calculemos el valor de x positivo a partir del cual el término a_3x^3 es mayor que a_2x^2. Es decir queremos calcular los valores de x que cumplen la siguiente desigualdad:

$$0.01\ x^3 > 10x^2$$

Como veremos en el siguiente capítulo podemos multiplicar ambos lados de la desigualdad por el mismo número



(a) n par, $a_n > 0$ (b) n par, $a_n < 0$ (c) n impar, $a_n > 0$ (d) n impar, $a_n < 0$

Figura 17.5: Comportamiento extremo de un polinomio. El comportamiento depende del grado del polinomio, n, y del signo del coeficiente líder, a_n.

real positivo y la desigualdad se conservará. Para nuestro objetivo, hacemos las siguientes operaciones:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{x^2}(0.01)\,x^3 &> \frac{1}{x^2}10x^2 \\
\frac{x^2}{x^2}(0.01)\,x &> \frac{x^2}{x^2}10 \\
(0.01)\,x &> 10 \\
\frac{1}{0.01}(0.01)\,x &> \frac{1}{0.01}\,10 \\
x &> \frac{10}{0.01} \\
x &> 1000
\end{aligned}$$

Esto significa que cuando la variable x toma valores mayores de 1000, el término cúbico ($0.01\,x^3$) es mayor que el término cuadrático ($10x^2$) y por lo tanto define la tendencia de crecimiento de $P(x)$. De manera que no importa que tan pequeño sea el coeficiente líder, su signo define la tendencia de $P(x)$ para valores suficientemente grandes (o suficientemente pequeños) de x.

El comportamiento extremo de un polinomio de grado impar es similar al polinomio lineal, mientras que un polinomio de grado par es similar al polinomio cuadrático.
El signo del coeficiente líder a_n del polinomio determina el comportamiento de $P(x)$ para valores en los extremos izquierdo y derecho del eje x.

17.2. Determinación de un polinomio a partir de puntos por dónde pasa

Si tenemos los valores del polinomio $P(x)$ para algunos valores de x, entonces podemos obtener el polinomio a partir de esa información. Sea $y_1 = P(x_1)$, $y_2 = P(x_2)$, $\ldots$, $y_k = P(x_k)$ los valores del polinomio para k valores de la variable independiente x: x_1, x_2, $\ldots$, x_k, respectivamente. De esta manera los valores de (x, y) definen k puntos en el plano cartesiano: $P_1 = (x_1, y_1)$, $P_2 = (x_2, y_2)$, $\ldots$, $P_k = (x_k, y_k)$.

Veamos los diferentes casos que se pueden presentar, para determinar un polinomio de grado n:

- $k = 1$, $n = 0$. Si tenemos un punto, entonces podemos determinar fácilmente el polinomio de grado 0 que pasa por ese punto: $P(x) = y_1$.
- $k > 1$, $n = 0$. Si tenemos dos o más puntos, podemos determinar el **mejor** polinomio de grado 0 que pase por los k puntos. Más abajo se define el criterio para calcular el **mejor** polinomio.
- $k = 2$, $n = 1$. Si tenemos dos puntos, entonces podemos determinar fácilmente el polinomio de grado 1 que pasa exactamente por esos dos puntos. Este problema ya lo hemos abordado antes, al determinar la recta que pasa por dos puntos.
- $k > 2$, $n = 1$. Si tenemos tres o más de un puntos, podemos determinar el **mejor** polinomio de grado 1 que pase por los k puntos.
- $k = n + 1$. Si tenemos $n + 1$ puntos, entonces podemos determinar el polinomio de grado n que pasa exactamente por los k puntos.
- $k > n + 1$. Si tenemos más de $n + 1$ puntos, podemos determinar el **mejor** polinomio de grado n que pase por los k puntos.

Como veremos en las siguientes secciones, para el caso de $k = n + 1$ resulta un sistema de ecuaciones que se resuelve utilizando la inversa de una matriz; mientras que si $k > n + 1$, el sistema de ecuaciones se resuelve utilizando la pseudoinversa de una matriz. Como se mencionó anteriomente, en la sección 16.9.2, cuando utilizamos la pseudoinversa de la matriz, el **mejor** polinomio se obtiene utilizando el **criterio de mínimos cuadrados** descrito en el apéndice B.2.2. En nuestro caso se busca el polinomio $P(x)$ que minimice la suma de las distancias al cuadrado de los puntos $P_i = (x_i, y_i)$ a los puntos correspondientes por donde pasa el polinomio calculado: $(x_i, P(x_i))$. Es decir se busca un polinomio $P(x)$ que minimice el error total, E_t, siguiente:

$$E_t = \sum_{i=1}^{k} (y_i - P(x_i))^2 \tag{17.4}$$

En el caso de $k = n+1$, tenemos que $E_t = 0$, debido a que el polinomio pasa exactamente por todos los k puntos.

Veamos enseguida cómo podemos obtener el polinomio a partir de la información de los puntos por donde pasa.

17.2.1. Polinomio de grado 0

Si tenemos un punto, por ejemplo $P_1 = (x_1, y_1)$, por donde pasa este polinomio, la solución es directa:

$$a_0 = y_1$$

Sin embargo, si tenemos tres puntos: $P_1 = (x_1, y_1)$, $P_2 = (x_2, y_2)$ y $P_3 = (x_3, y_3)$, se forma el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{aligned} a_0 &= y_1 \\ a_0 &= y_2 \\ a_0 &= y_3 \end{aligned}$$

Equivalente a la ecuación matricial:

$$A * X = B$$

$$A = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad , \quad X = \begin{bmatrix} a_0 \end{bmatrix} \quad , \quad B = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix}$$

Como sabemos, la solución se obtiene utilizando la pseudoinversa de la matriz A:

$$X = (A^t * A)^{-1} * A^t * B$$

El lector puede comprobar fácilmente que $(A^t * A) = 3$, de manera que $(A^t * A)^{-1} = \frac{1}{3}$. De esta forma tenemos que:

$$\begin{aligned} X &= \frac{1}{3} * [1 \;\; 1 \;\; 1] * \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} \\ X &= \frac{1}{3} * (y_1 + y_2 + y_3) \end{aligned}$$

Si tuviéramos n puntos, en lugar de 3, la expresión que obtenemos es:

$$a_0 = \frac{1}{n} * (y_1 + y_2 + \ldots + y_n) \tag{17.5}$$

$$a_0 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} y_i \tag{17.6}$$

Es decir, el valor de a_0 es simplemente la media o promedio de las coordenadas y_i de los puntos. Como ejemplo, ajustemos un polinomio de grado 0 a los siguientes puntos: $P_1 = (1, 10)$, $P_2 = (2, 11)$, $P_3 = (3, 9)$, $P_4 = (4, 9)$ y $P_5 = (5, 10)$.

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{5} * (10 + 11 + 9 + 9 + 10) \\ a_0 &= 9.8 \end{aligned}$$

La figura 17.6 muestra la gráfica del polinomio obtenido $P(x) = 9.8$, junto con los 5 puntos.

Para determinar un polinomio constante, $P(x) = a_0$, a partir de n puntos en el plano: $P_1 = (x_1, y_1)$, $P_2 = (x_2, y_2)$, . . ., $P_n(x_n, y_n)$, el valor de a_0 se calcula como el promedio de los valores de las coordenadas y de los puntos:

$$a_0 = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} y_k \tag{17.7}$$

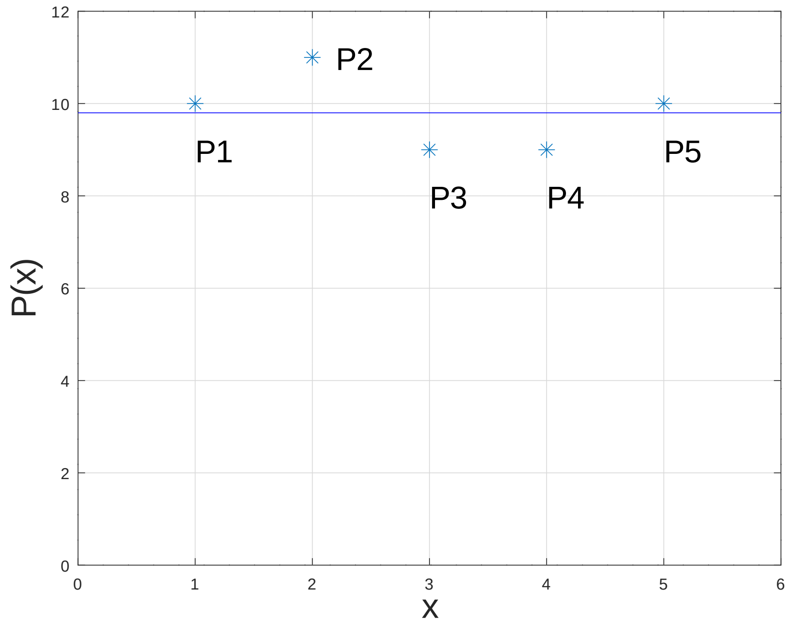


Figura 17.6: Encontrando un polinomio de grado 0 a partir de 5 puntos.

17.2.2. Polinomio de grado 1

En la sección 16.9 del capítulo anterior, vimos el problema de determinar la mejor recta $y = a_1\ x + a_0$ que se ajusta a un conjunto de n puntos, partiendo de la ecuación:

$$x\ a_1 + a_0 = y$$

Donde ahora los valores de x y de y son los datos de entrada y las variables a determinar son a_1 y a_0. Para n puntos, tenemos n ecuaciones, una por cada punto:

$$\begin{aligned} x_1a_1 + a_0 &= y_1 \\ x_2a_1 + a_0 &= y_2 \\ &\vdots \\ x_na_1 + a_0 &= y_n \end{aligned}$$

Este sistema de ecuaciones es equivalente a una ecuación matricial que podemos resolver fácilmente, como veremos enseguida.

Para determinar un polinomio lineal, $P(x) = a_1x + a_0$, a partir de n puntos en el plano: $P_1 = (x_1, y_1)$, $P_2 = (x_2, y_2)$, . . ., $P_n = (x_n, y_n)$; tenemos:

$$A_{n\times 2} * X_{2\times 1} = B_{n\times 1} \tag{17.8}$$

$$A = \begin{bmatrix} x_1 & 1 \\ x_2 & 1 \\ \dots & \\ x_n & 1 \end{bmatrix} \quad , \quad X = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_0 \end{bmatrix} \quad , \quad B = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \dots \\ y_n \end{bmatrix}$$

La cual se resuelve utilizando la inversa (si $n = 2$) o la pseudoinversa (si $n > 2$) de la matriz A.

Es interesante obtener fórmulas explícitas para calcular los coeficientes del polinomio. Como primer paso, premultipliquemos por la matriz A^t a ambos lados de la igualdad:

$$A^t * A * X = A^t * B$$

$$\begin{bmatrix} x_1 & x_2 & \dots & x_n \\ 1 & 1 & \dots & 1 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} x_1 & 1 \\ x_2 & 1 \\ \dots & \\ x_n & 1 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} a_1 \\ a_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & \dots & x_n \\ 1 & 1 & \dots & 1 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \dots \\ y_n \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2 & x_1 + x_2 + \ldots + x_n \\ x_1 + x_2 + \ldots + x_n & 1 + 1 + \ldots + 1 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} a_1 \\ a_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1y_1 + x_2y_2 + \ldots + x_ny_n \\ y_1 + y_2 + \ldots + y_n \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \sum_{k=1}^n x_k^2 & \sum_{k=1}^n x_k \\ \sum_{k=1}^n x_k & n \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} a_1 \\ a_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum_{k=1}^n x_ky_k \\ \sum_{k=1}^n y_k \end{bmatrix}$$

Hemos logrado un sistema de ecuaciones con dos ecuaciones y dos variables. Recordando las fórmulas para resolver este tipo de sistemas de ecuaciones (16.29 y 16.30), de la página 275, tenemos:

Para determinar un polinomio lineal, $P(x) = a_1x + a_0$, a partir de n puntos en el plano: $P_1 = (x_1, y_1)$, $P_2 = (x_2, y_2)$, . . ., $P_n = (x_n, y_n)$; tenemos:

$$a_1 = \frac{n * \sum_{k=1}^n x_ky_k - \left(\sum_{k=1}^n x_k\right) * \left(\sum_{k=1}^n y_k\right)}{n * \left(\sum_{k=1}^n x_k^2\right) - \left(\sum_{k=1}^n x_k\right)^2} \tag{17.9}$$

$$a_0 = \frac{-\left(\sum_{k=1}^n x_k\right) * \left(\sum_{k=1}^n x_ky_k\right) + \left(\sum_{k=1}^n x_k^2\right) * \left(\sum_{k=1}^n y_k\right)}{n * \left(\sum_{k=1}^n x_k^2\right) - \left(\sum_{k=1}^n x_k\right)^2} \tag{17.10}$$

Ejercicio para determinar una recta a partir de puntos

Si queremos encontrar la mejor recta que pase por los puntos: $P_1 = (1, 1)$, $P_2 = (2, 2)$, $P_3 = (3, 4)$,$P_4 = (4, 4)$ y $P_5 = (5, 5)$, podemos calcular a_1 y a_0 usando Octave:

```
>> x1=1;y1=1;x2=2;y2=2;x3=3;y3=4;x4=4;y4=4;x5=5;y5=5;
>> x=[x1 x2 x3 x4 x5];
>> y=[y1 y2 y3 y4 y5];
>> sx=sum(x);
>> sy=sum(y);
>> sxy=sum(x.*y);
>> sx2=sum(x.*x);
>> a1=(5*sxy - sx*sy)/(5*sx2 - sx^2)
a1 =  1
>> a0=(-sx*sxy + sx2*sy)/(5*sx2 - sx^2)
a0 =  0.20000
```

De manera que la recta encontrada es: $P(x) = x + 0.2$. El lector podrá comprobar que se obtuvo el mismo resultado al utilizar el cálculo de la matriz pseudoinversa en el ejercicio de la sección 16.9.2 del capítulo anterior. La figura 16.2, de la página 281, muestra la recta encontrada y los 5 puntos.

Determinación del polinomio a partir de un punto y la pendiente de la recta

Si la pendiente de la recta es conocida, es decir el coeficiente a_1, podemos determinar la recta a partir de un punto por el que pasa la recta.

Por ejemplo, si deseamos determinar la recta con un ángulo de inclinación de 45 grados con respecto al eje x y que además pasa por el punto $P_1 = (0, 1)$ tenemos que:

$$\begin{aligned} a_1 &= \tan(45°) \\ a_1 &= 1 \end{aligned}$$

De manera que el problema se reduce a:

$$\begin{aligned} a_1 * x_1 + a_0 &= y_1 \\ a_0 &= y_1 - a_1 * x_1 \\ a_0 + &= 1 - (1)(0) \\ a_0 &= 1 \end{aligned}$$

Hemos encontrado la solución: $P(x) = x + 1$. La figura 17.7 muestra gráficamente el punto por donde pasa la recta, el ángulo de inclinación y la recta encontrada.

Para determinar un polinomio lineal, $P(x) = a_1x + a_0$, a partir del ángulo de inclinación a, de la recta con respecto al eje x positivo, y de un punto en el plano, $P_1 = (x_1, y_1)$, tenemos:

$$a_1 = \tan(a) \tag{17.11}$$
$$a_0 = y_1 - a_1 * x_1 \tag{17.12}$$

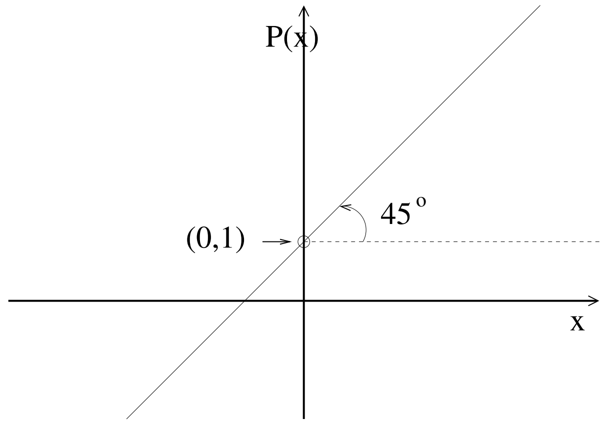


Figura 17.7: Polinomio lineal definido por el ángulo de inclinación y un punto.

17.2.3. Polinomio de grado 2

Si deseamos determinar un polinomio de grado 2 que se ajusta a un conjunto de n puntos, partimos de la ecuación:

$$x^2a_2 + xa_1 + a_0 = y$$

Para n puntos, tenemos n ecuaciones, una por cada punto:

$$\begin{aligned} x_1^2a_2 + x_1a_1 + a_0 &= y_1 \\ x_2^2a_2 + x_2a_1 + a_0 &= y_2 \\ &\vdots \\ x_n^2a_2 + x_na_1 + a_0 &= y_n \end{aligned}$$

Como en el caso lineal, este sistema de ecuaciones es equivalente a una ecuación matricial que podemos resolver fácilmente.

Para determinar un polinomio cuadrático, $P(x) = a_2x^2 + a_1x + a_0$, a partir de n puntos en el plano: $P_1 = (x_1, y_1)$, $P_2 = (x_2, y_2)$, ..., $P_n = (x_n, y_n)$; tenemos:

$$A_{n\times 3} * X_{3\times 1} = B_{n\times 1} \tag{17.13}$$

$$A = \begin{bmatrix} x_1^2 & x_1 & 1 \\ x_2^2 & x_2 & 1 \\ \dots & & \\ x_n^2 & x_n & 1 \end{bmatrix} \quad , \quad X = \begin{bmatrix} a_2 \\ a_1 \\ a_0 \end{bmatrix} \quad , \quad B = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \dots \\ y_n \end{bmatrix}$$

La cual se resuelve utilizando la inversa (si $n = 3$) o la pseudoinversa (si $n > 3$) de la matriz A.

Por ejemplo, para los puntos $P_1 = (-2, 4)$, $P_2 = (0, 0)$ y $P_3 = (2, 4)$, obtenemos:

$$A * X = B$$

$$A = \begin{bmatrix} (-2)^2 & -2 & 1 \\ 0^2 & 0 & 1 \\ 2^2 & 2 & 1 \end{bmatrix} \quad , \quad X = \begin{bmatrix} a_2 \\ a_1 \\ a_0 \end{bmatrix} \quad , \quad B = \begin{bmatrix} 4 \\ 0 \\ 4 \end{bmatrix}$$

Utilicemos Octave para calcular la solución:

```
>> A = [(-2)^2 -2 1; 0^2 0 1; 2^2 2 1];
>> B = [4; 0; 4];
>> X = inv(A) * B
X =
   1
   0
   0
```

Obtuvimos como resultado el polinomio: $P(x) = x^2$, que podemos comprobar que se ajusta perfectamente a los tres puntos de partida, como se muestra en la figura 17.8.

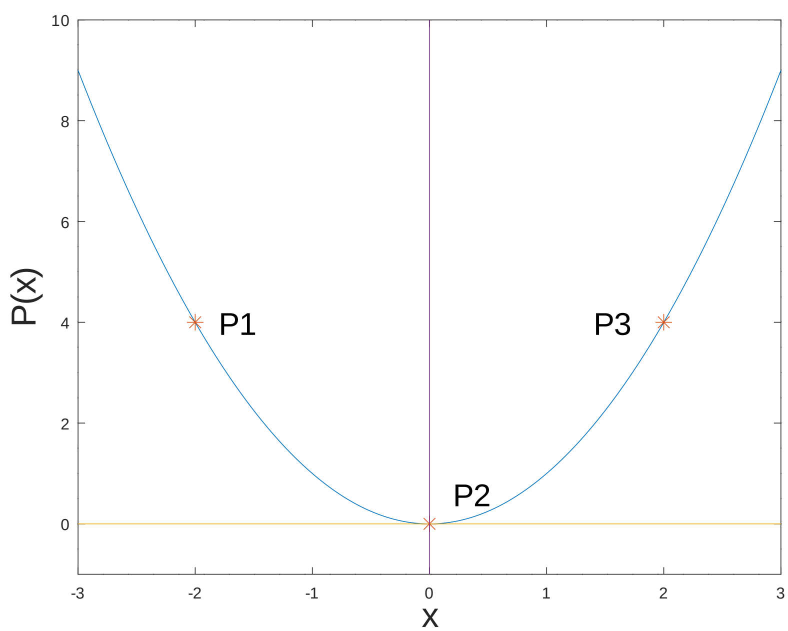


Figura 17.8: Encontrando un polinomio de grado 2 a partir de 3 puntos.

Parábolas con vértice en origen

El **vértice de una parábola** es el punto más alto o el punto más bajo de la curva. Por ejemplo, en la figura 17.8 el vértice de la parábola corresponde al punto $P_2 = (0, 0)$. En adelante utilizaremos el punto especial P_v para representar el punto que corresponde al vértice de la parábola.

Podemos observar en la gráfica que la parábola es simétrica con respecto al eje vertical y. Es decir, si la curva tiene su vértice en el origen y contiene otro punto $P_1 = (x, y)$, entonces podemos estar seguros que el punto

$P_2 = (-x, y)$, también está en la curva. Para el punto P_1 tenemos la siguiente ecuación:

$$a_2x^2 + a_1x + a_0 = y \tag{17.14}$$

Para el punto P_2 tenemos la siguiente ecuación:

$$\begin{aligned} a_2(-x)^2 + a_1(-x) + a_0 &= y \\ a_2x^2 - a_1x + a_0 &= y \end{aligned} \tag{17.15}$$

Si restamos la ecuación 17.14 de la ecuación 17.15, tenemos:

$$\begin{aligned} (a_2x^2 - a_1x + a_0) - (a_2x^2 + a_1x + a_0) &= y - y \\ -2 * a_1x &= 0 \\ a_1 &= \frac{0}{-2x} \\ a_1 &= 0 \end{aligned} \tag{17.16}$$

Para obtener este resultado el lector debe notar que $x \neq 0$ debido a que el punto P_1 es diferente del origen. Con este valor obtenido, ahora veamos la ecuación que se genera al considerar el punto $P_v = (0, 0)$:

$$\begin{aligned} a_2x_v^2 + a_1x_v + a_0 &= y_v \\ a_20^2 + (0)x_v + a_0 &= 0 \\ a_0 &= 0 \end{aligned} \tag{17.17}$$

Ya llegamos al resultado final,

Para un polinomio cuadrático que tiene su vértice en el origen, la ecuación se reduce a:

$$P(x) = a_2x^2 \tag{17.18}$$

Determinación del polinomio cuadrático a partir de dos puntos

Si además de conocer el vértice de una parábola conocemos otro de sus puntos, podemos determinar el polinomio cuadrático que pasa por ambos puntos.

Sea el punto $P_v = (x_v, y_v)$. Cambiemos el sistema de referencia (x, y) a un sistema de coordenadas (x', y') cuyo origen es el punto P_v, el vértice de la parábola. El nuevo eje x' es paralelo al eje x y pasa por el punto P_v; de igual manera, el nuevo eje y' es paralelo al eje y y pasa por P_v. La figura 17.9 ilustra ambos sistemas de referencia: (x, y) y (x', y'), cuando $P_v = (x = 3, y = 2)$.

De esta forma, el polinomio cuadrático original:

$$y = a_2x^2 + a_1x + a_0 \tag{17.19}$$

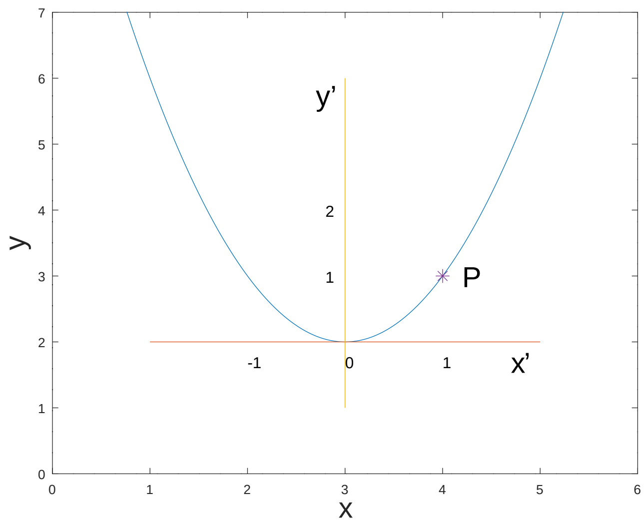


Figura 17.9: El punto P usando dos sistemas de referencia: (x, y) y (x', y').

Se transforma al siguiente polinomio cuadrático cuyo vértice está en el nuevo origen:

$$\begin{aligned} y' &= a_2'(x')^2 \\ y - y_v &= a_2'(x - x_v)^2 \end{aligned} \tag{17.20}$$

Podemos ver que hemos utilizado $y' = y - y_v$ y $x' = x - x_v$ para cambiar de unas coordenadas a las otras. Veamos que este cambio efectivamente funciona. Por ejemplo, en la figura 17.9 el punto P tiene como coordenadas: $P = (x' = 1, y' = 1)$ y $P = (x = 4, y = 3)$, siendo las coordenadas del vértice: $x_v = 3$ y $y_v = 2$. Vemos que se cumplen las ecuaciones de cambio de coordenadas:

$$\begin{aligned} y' &= y - y_v \\ 1 &= 3 - 2 \\ x' &= x - x_v \\ 1 &= 4 - 3 \end{aligned}$$

Veamos si podemos calcular la ecuación 17.19 a partir de la ecuación 17.20. Desarollando el binomio al cuadrado de la ecuación 17.20, tenemos:

$$\begin{aligned} y - y_v &= a_2'(x - x_v)^2 \\ y - y_v &= a_2'(x^2 - 2x_v x + x_v^2) \\ y - y_v &= a_2'x^2 - 2a_2'x_v x + a_2'x_v^2 \\ y &= a_2'x^2 + (-2a_2'x_v)x + (a_2'x_v^2 + y_v) \end{aligned} \tag{17.21}$$

Ya podemos igualar los coeficientes de los polinomios de las ecuaciones 17.19 y 17.21, para formar el sistema de ecuaciones siguiente:

$$a_2 = a'_2 \tag{17.22}$$
$$a_1 = -2a'_2 x_v \tag{17.23}$$
$$a_0 = a'_2 x_v^2 + y_v \tag{17.24}$$

Veamos un par de ejemplos para convertir de un formato al otro.

Ejemplo 1

Como ejercicio, determinemos el polinomio cuadrático que tiene como vértice al punto $P_v = (3, 2)$ y pasa por el punto $P_1 = (4, 3)$. En este caso, tenemos: $x_v = 3$, $y_v = 2$, $x_1 = 4$ y $y_1 = 3$.

A partir del vértice $P_v = (x_v, y_v)$ y del punto $P_1 = (x_1, y_1)$, podemos calcular el coeficiente a'_2 mediante la ecuación 17.20:

$$\begin{aligned}
y - y_v &= a'_2(x - x_v)^2 \\
y_1 - y_v &= a'_2(x_1 - x_v)^2 \\
\frac{y_1 - y_v}{(x_1 - x_v)^2} &= a'_2 \\
\frac{3 - 2}{(4 - 3)^2} &= a'_2 \\
1 &= a'_2
\end{aligned}$$

Con este valor podemos determinar los coeficientes del polinomio cuadrático utilizando las ecuaciones 17.22, 17.23 y 17.24:

$$\begin{aligned}
a_2 &= a'_2 \\
a_2 &= 1 \\
\\
a_1 &= -2a'_2 x_v \\
a_1 &= -2(1)(3) \\
a_1 &= -6 \\
\\
a_0 &= a'_2 x_v^2 + y_v \\
a_0 &= (1)(3)^2 + (2) \\
a_0 &= 11
\end{aligned}$$

De manera que el polinomio deseado es: $P(x) = x^2 - 6x + 11$. Este polinomio es precisamente el mostrado en la figura 17.9.

Ejemplo 2

En este ejercicio, hagamos el procedimiento contrario, a partir del polinomio: $P(x) = x^2 - 6x + 11$, obtengamos el vértice de la parábola.

En este caso, tenemos $a_2 = 1$, $a_1 = -6$ y $a_0 = 11$.

De la ecuación 17.22 sabemos que $a'_2 = a_2 = 1$, por lo que la parábola se abre hacia arriba.

De la ecuación 17.23 podemos obtener x_v:

$$\begin{aligned} a_1 &= -2a'_2 x_v \\ \frac{a_1}{-2a'_2} &= x_v \\ -\frac{a_1}{2a_2} &= x_v \end{aligned} \tag{17.25}$$

Finalmente, de la ecuación 17.24 y de la ecuación 17.25 podemos obtener y_v:

$$\begin{aligned} a_0 &= a'_2 x_v^2 + y_v \\ a_0 - a'_2 x_v^2 &= y_v \\ a_0 - a_2 x_v^2 &= y_v \\ a_0 - a_2\left(-\frac{a_1}{2a_2}\right)^2 &= y_v \\ a_0 - a_2\frac{a_1^2}{4a_2^2} &= y_v \\ a_0 - \frac{a_1^2}{4a_2} &= y_v \end{aligned} \tag{17.26}$$

Con las ecuaciones 17.25 y 17.26 podemos obtener las coordenadas del vértice:

$$\begin{aligned} -\frac{a_1}{2a_2} &= x_v \\ -\frac{-6}{2(1)} &= x_v \\ 3 &= x_v \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a_0 - \frac{a_1^2}{4a_2} &= y_v \\ 11 - \frac{(-6)^2}{4(1)} &= y_v \\ 2 &= y_v \end{aligned}$$

Como era de esperarse, el vértice de este polinomio es el punto $P_v = (3, 2)$, tal como se observa en la gráfica de la figura 17.9.

Las gráficas de $P(x) = a_2x^2$ y $P(x) = a_2x^2 + a_1x + a_0$ son similares, crecen igual de rápido hacia arriba o abajo (dependiendo del signo de a_2). La diferencia es que en $P(x) = a_2x^2$ el vértice está en el origen, mientras que en el otro polinomio el vértice se ha movido a otro punto.

17.2.4. Polinomios de grado 3 y superiores

Si deseamos determinar un polinomio de grado 3 o superior que se ajusta a un conjunto de n puntos, podemos utilizar un procedimiento similar al del polinomio cuadrático. Por ejemplo para un polinomio de grado 3 partimos de la ecuación:

$$x^3a_3 + x^2a_2 + xa_1 + a_0 = y$$

Para n puntos, tenemos n ecuaciones, una por cada punto, y se forma la ecuación matricial siguiente:

$$A_{n\times 4} * X_{4\times 1} = B_{n\times 1}$$

$$A = \begin{bmatrix} x_1^3 & x_1^2 & x_1 & 1 \\ x_2^3 & x_2^2 & x_2 & 1 \\ x_3^3 & x_3^2 & x_3 & 1 \\ \dots \\ x_n^3 & x_n^2 & x_n & 1 \end{bmatrix} \quad , \quad X = \begin{bmatrix} a_3 \\ a_2 \\ a_1 \\ a_0 \end{bmatrix} \quad , \quad B = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ \dots \\ y_n \end{bmatrix}$$

La cual se resuelve utilizando la pseudoinversa de la matriz A si $n > 4$ o la inversa de la matriz si $n = 4$.

Ejemplo de cálculo

Por ejemplo, para los puntos $P_1 = (1, 1)$, $P_2 = (2, -1)$, $P_3 = (3, 4)$ y $P_4 = (4, -5)$, obtenemos:

$$A * X = B$$

$$A = \begin{bmatrix} 1^3 & 1^2 & 1 & 1 \\ 2^3 & 2^2 & 2 & 1 \\ 3^3 & 3^2 & 3 & 1 \\ 4^3 & 4^2 & 4 & 1 \end{bmatrix} \quad , \quad X = \begin{bmatrix} a_3 \\ a_2 \\ a_1 \\ a_0 \end{bmatrix} \quad , \quad B = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 4 \\ -5 \end{bmatrix}$$

Utilicemos Octave para calcular la solución:

```
>> A = [1^3 1^2 1 1; 2^3 2^2 2 1 ; 3^3 3^2 3 1; 4^3 4^2 4 1];
>> B = [1; -1; 4; -5];
>> P = inv(A) * B
P =
   -3.5000
   24.5000
  -51.0000
   31.0000
```

Obtuvimos como resultado el polinomio:

$$P(x) = -3.5x^3 + 24.5000x^2 - 51x + 31$$

La figura 17.10 muestra la gráfica del polinomio obtenido, junto con los 4 puntos. Esta gráfica se obtuvo utilizando los siguientes comandos de Octave:

```
>> x = [0:0.01:5];
>> y =polyval(P, x);
>> plot(x,y)
```

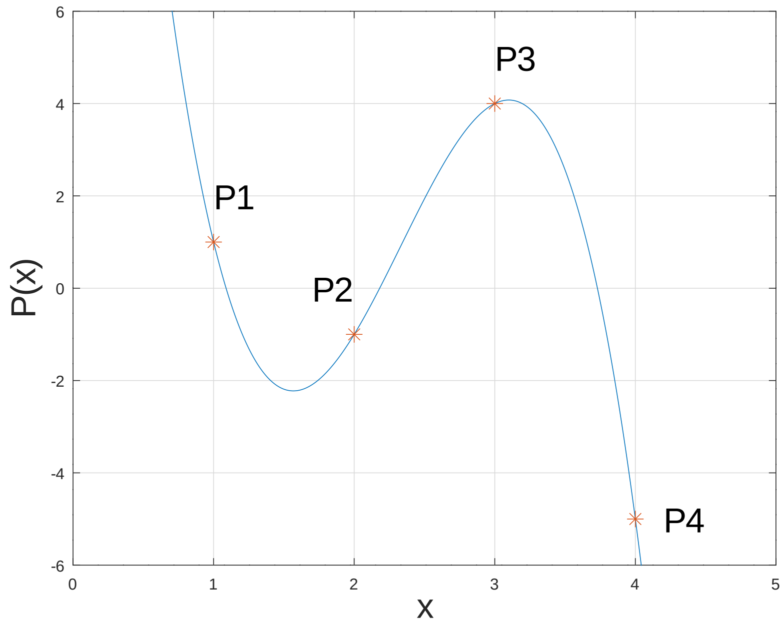


Figura 17.10: Encontrando un polinomio de grado 3 a partir de 4 puntos.

```
>> hold on
>> plot([1 2 3 4],[1,-1,4,-5],'*')
>> axis([0 5 -6 6]);
>> xlabel('x');
>> xlabel('P(x)');
```

Observe que la función "polyval(P,x)" evalúa el polinomio definido por el vector de coeficientes P para todos los valores de entrada del vector x.

17.3. Operaciones con polinomios

En esta sección veremos la suma, la multiplicación de un escalar (un número real o complejo) por un polinomio, la resta, el producto y la división de polinomios.

17.3.1. Suma de polinomios

Sea $P_a(x)$ y $P_b(x)$ dos polinomios en la variable x. Si n corresponde al grado mayor de ambos polinomios, podemos expresar la suma de polinomios de la siguiente forma, aprovechando nuestros conocimientos sobre las operaciones matemáticas elementales:

La suma de los polinomios $P_a(x) = a_nx^n + \ldots + a_1x + a_0$ y $P_b(x) = b_nx^n + \ldots + b_1x + b_0$ está dada por:

$$\begin{aligned} P_a(x) + P_b(x) &= (a_nx^n + \ldots + a_1x + a_0) + (b_nx^n + \ldots + b_1x + b_0) \\ P_a(x) + P_b(x) &= (a_n + b_n)x^n + \ldots + (a_1 + b_1)x + (a_0 + b_0) \end{aligned} \tag{17.27}$$

Por ejemplo para $P_a(x) = 2x^2 + x + 3$ y $P_b(x) = 3x^3 + 5$, tenemos:

$$\begin{aligned} P_a(x) &= 0 * x^3 + 2 * x^2 + 1 * x + 3 \\ P_b(x) &= 3 * x^3 + 0 * x^2 + 0 * x + 5 \\ P_a(x) + P_b(x) &= (0+3)x^3 + (2+0)x^2 + (1+0)x + (3+5) \\ P_a(x) + P_b(x) &= 3x^3 + 2x^2 + x + 8 \end{aligned}$$

Si usamos una notación simplificada, en forma similar a lo que hacemos para la suma de números, esta operación se puede escribir de la siguiente manera:

$$\begin{array}{rrrrr} & & +2x^2 & +x & +3 \\ + & 3x^3 & & & +5 \\ \hline & 3x^3 & +2x^2 & +x & +8 \end{array}$$

En Octave podemos representar un polinomio como un vector renglón con los coeficientes de las potencias de x iniciando con la más alta. Por ejemplo, para el caso anterior, tenemos:

```
>> Pa = [0 2 1 3];
>> Pb = [3 0 0 5]
>> Pc = Pa + Pb
Pc =
   3   2   1   8
```

17.3.2. Multiplicación de un escalar por un polinomio

Si k es un escalar (un número real o complejo) y $P(x)$ un polinomio en la variable x, el producto $k * P(x)$ sigue la propiedad distributiva:

$$\begin{aligned} k * P(x) &= k * (a_nx^n + \ldots + a_1x + a_0) \\ k * P(x) &= k * a_nx^n + \ldots + k * a_1x + k * a_0 \end{aligned} \tag{17.28}$$

Por ejemplo, si $k = -1$ y $P(x) = 2x^2 - 1$, tenemos:

$$\begin{aligned}
(-1) * P(x) &= (-1) * (2x^2 + (-1)) \\
(-1) * P(x) &= (-1) * 2x^2 + (-1) * (-1) \\
(-1) * P(x) &= -2x^2 + 1
\end{aligned} \tag{17.29}$$

En Octave podemos hacer la operación de la siguiente manera:

```
>> P = [2 0 -1];
>> R = -1 .* P
R =
   -2   0   1
```

17.3.3. Resta de polinomios

Sea $P_a(x)$ y $P_b(x)$ dos polinomios en la variable x. Podemos expresar la resta de polinomios como una suma:

$$P_a(x) - P_b(x) = P_a(x) + (-1) * P_b(x) \tag{17.30}$$

Si n corresponde al grado mayor de ambos polinomios, tenemos:

$$\begin{aligned}
P_a(x) &= a_n x^n + \ldots + a_1 x + a_0 \\
P_b(x) &= b_n x^n + \ldots + b_1 x + b_0 \\
P_a(x) - P_b(x) &= (a_n x^n + \ldots + a_1 x + a_0) + (-1) * (b_n x^n + \ldots + b_1 x + b_0) \\
P_a(x) - P_b(x) &= (a_n x^n + \ldots + a_1 x + a_0) + (-b_n x^n + \ldots - b_1 x - b_0) \\
P_a(x) - P_b(x) &= (a_n - b_n) x^n + \ldots + (a_1 - b_1) x + (a_0 - b_0)
\end{aligned} \tag{17.31}$$

Por ejemplo, si $P_a(x) = 2x^2 - 1$ y $P_b(x) = x^2 + x + 2$, tenemos que:

$$\begin{aligned}
P_a(x) &= (2)x^2 + (0)x + (-1) \\
P_b(x) &= (1)x^2 + (1)x + (2) \\
P_a(x) - P_b(x) &= (2-1)x^2 + (0-1)x + (-1-2) \\
P_a(x) - P_b(x) &= (1)x^2 + (-1)x + (-3) \\
P_a(x) - P_b(x) &= x^2 - x - 3
\end{aligned}$$

Si usamos la notación simplificada, es conveniente primero multiplicar por (-1) el polinomio $P_b(x)$ y después realizar la suma:

$$\begin{array}{rrrr}
 & 2x^2 & & -1 \\
+ & -x^2 & -x & -2 \\
\hline
 & x^2 & -x & -3
\end{array}$$

En Octave podemos hacer esta operación de resta fácilmente:

```
>> Pa = [2 0 -1];
>> Pb = [1 1 2];
>> Pc = Pa - Pb
Pc =
   1   -1   -3
```

17.3.4. Multiplicación de polinomios

Sea $P_a(x)$ y $P_b(x)$ dos polinomios en la variable x, de grados m y n, respectivamente. Podemos expresar el producto de polinomios aprovechando la propiedad distributiva generalizada:

$$\begin{aligned}
P_a(x) * P_b(x) &= (a_m x^m + \ldots + a_1 x + a_0) * (b_n x^n + \ldots + b_1 x + b_0) \\
P_a(x) * P_b(x) &= (a_m * b_0 x^m + \ldots + a_1 * b_0 x + a_0 * b_0) + \\
&\quad (a_m * b_1 x^{m+1} + \ldots + a_1 * b_1 x^{1+1} + a_0 * b_1 x) + \\
&\quad \ldots + \\
&\quad (a_m * b_n x^{m+n} + \ldots + a_1 * b_n x^{1+n} + a_0 * b_n x^n)
\end{aligned} \tag{17.32}$$

Por ejemplo:

$$\begin{aligned}
P_a(x) * P_b(x) &= (x^2 + x - 1) * (x + 2) \\
P_a(x) * P_b(x) &= (x^2 * 2 + x * 2 + (-1)(2)) + (x^2 * x + x * x - 1 * x) \\
P_a(x) * P_b(x) &= 2x^2 + 2x - 2 + x^3 + x^2 - x \\
P_a(x) * P_b(x) &= x^3 + 3x^2 + x - 2
\end{aligned}$$

Si usamos la notación simplificada, en forma similar a la multiplicación de números enteros, tenemos:

$$\begin{array}{rrrr}
 & x^2 & x & -1 \\
* & & x & +2 \\
\hline
 & 2x^2 & 2x & -2 \\
+\ x^3 & x^2 & -x & \\
\hline
x^3 & +3x^2 & +x & -2
\end{array}$$

El primer renglón fue el resultado de multiplicar $x^2 + x - 1$ por 2 y el segundo renglón fue el resultado de multiplicar $x^2 + x - 1$ por x. El lector puede apreciar que la ubicación de los términos facilita la suma de ambos resultados.

En Octave podemos hacer la operación de multiplicación aprovechando la función conv(P, Q), siendo P y Q vectores que denotan polinomios. Usando Octave podemos obtener el resultado del producto de polinomios del ejemplo anterior, como sigue:

```
>> Pa = [1 1 -1];
>> Pb = [1 2];
>> Pc = conv(Pa, Pb)
Pc =
   1   3  1  -2
```

17.3.5. División de polinomios

Recordemos que la división de dos números enteros D y d se realiza de la forma:

$$\frac{D}{d} = c + \frac{r}{d}$$

Donde c es el cociente y es un entero, r es el residuo y cumple la condición de que $\frac{r}{d} < 1$.

En el caso de polinomios, decimos que el polinomio $P_D(x)$ se divide entre el polinomio $P_d(x)$, teniendo como cociente el polinomio $P_c(x)$ y como residuo el polinomio $P_r(x)$, en la forma:

$$\frac{P_D(x)}{P_d(x)} = P_c(x) + \frac{P_r(x)}{P_d(x)} \tag{17.33}$$

Sea g_D el grado del polinomio $P_D(x)$, g_d el grado del polinomio $P_d(x)$, g_c el grado del polinomio $P_c(x)$ y g_r el grado del polinomio $P_r(x)$. En la división de polinomios se cumplen las siguientes condiciones:

- Si $g_D < g_d$, entonces $P_c(x) = 0$ y $P_r(x) = P_D(x)$. Por ejemplo:

  $$\frac{1}{x+1} = 0 + \frac{1}{x+1}$$

  Decimos en este caso que la fracción polinomial está en su forma más simple.

- Si $g_D \geq g_d$, entonces $g_c = g_D - g_d$ y $g_r = g_d - 1$. Este caso es el más interesante y veremos a continuación varios ejemplos.

Ejemplo 1

Abordemos la división de polinomios siguiente siguiendo un procedimiento similar a la división de números enteros que vimos en el capítulo 5.

$$\frac{x^3}{x+2} = x^2 + \frac{x^3 - (x^2)(x+2)}{x+2}$$

En este razonamiento, el término x^2 se obtiene al considerar sólo el término de mayor orden del denominador $x+2$. Es decir: $\frac{x^3}{x} = x^2$ [1] . El resultado de la división es el siguiente:

$$\begin{aligned}
\frac{x^3}{x+2} &= x^2 + \frac{x^3 - (x^2)(x+2)}{x+2} \\
\frac{x^3}{x+2} &= x^2 + \frac{x^3 - x^3 - 2x^2}{x+2} \\
\frac{x^3}{x+2} &= x^2 + \frac{-2x^2}{x+2}
\end{aligned}$$

[1]Sabemos que $\frac{x^3}{x} = \frac{x^2}{1}\frac{x}{x}$ y que $\frac{x}{x} = 1$ si $x \neq 0$. Sin embargo, sin importar que tan cerca esté x de 0, la fracción $\frac{x}{x} = 1$. Decimos que el $\lim_{x\to 0} \frac{x}{x} = 1$ (se leé como "el límite cuando x tiende a cero de x entre x es 1". Con este razonamiento anotamos que $\frac{x^3}{x} = x^2$.

Antes de continuar, veamos que el resultado efectivamente es correcto:

$$\begin{aligned}
\frac{x^3}{x+2} &= x^2 + \frac{-2x^2}{x+2} \\
\frac{x^3}{x+2} &= x^2 * \frac{x+2}{x+2} + \frac{-2x^2}{x+2} \\
\frac{x^3}{x+2} &= \frac{x^3+2x^2}{x+2} + \frac{-2x^2}{x+2} \\
\frac{x^3}{x+2} &= \frac{x^3}{x+2}
\end{aligned}$$

Ejemplo 2

Abordemos ahora la división de polinomios siguiente:

$$\begin{aligned}
\frac{x^3+2x^2-x-2}{x+2} &= \frac{x^3}{x+2} + \frac{2x^2-x-2}{x+2} \\
\frac{x^3+2x^2-x-2}{x+2} &= x^2 + \frac{x^3-(x^2)(x+2)}{x+2} + \frac{2x^2-x-2}{x+2} \\
\frac{x^3+2x^2-x-2}{x+2} &= x^2 + \frac{x^3-x^3-2x^2}{x+2} + \frac{2x^2-x-2}{x+2} \\
\frac{x^3+2x^2-x-2}{x+2} &= x^2 + \frac{-2x^2}{x+2} + \frac{2x^2-x-2}{x+2} \\
\frac{x^3+2x^2-x-2}{x+2} &= x^2 + \frac{-x-2}{x+2} \\
\frac{x^3+2x^2-x-2}{x+2} &= x^2 + \frac{-x}{x+2} + \frac{-2}{x+2}
\end{aligned}$$

Repitiendo el procedimiento para la fracción $\frac{-x}{x+2}$, tenemos que el cociente es $\frac{-x}{x} = -1$.

$$\begin{aligned}
\frac{x^3+2x^2-x-2}{x+2} &= x^2 + \frac{-x}{x+2} + \frac{-2}{x+2} \\
\frac{x^3+2x^2-x-2}{x+2} &= x^2 + (-1) + \frac{-x-(-1)(x+2)}{x+2} + \frac{-2}{x+2} \\
\frac{x^3+2x^2-x-2}{x+2} &= x^2 + (-1) + \frac{-x+x+2}{x+2} + \frac{-2}{x+2} \\
\frac{x^3+2x^2-x-2}{x+2} &= x^2 + (-1) + \frac{2}{x+2} + \frac{-2}{x+2} \\
\frac{x^3+2x^2-x-2}{x+2} &= x^2 - 1
\end{aligned}$$

Este resultado es correcto, puesto que el polinomio de numerador se obtuvo de multiplicar $(x^2-1)(x+2)$, como vimos en la sección 17.3.4.

En este caso, el polinomio cociente es $P_c(x) = x^2 - 1$ y el polinomio residuo es $P_r(x) = 0$.

La división de polinomios es semejante a la división de enteros. Obtenemos un polinomio cociente y un polinomio residuo:

$$\frac{P_D(x)}{P_d(x)} = P_c(x) + \frac{P_r(x)}{P_d(x)} \tag{17.34}$$

El grado del polinomio cociente $P_c(x)$ es la diferencia de los grados de $P_D(x)$ y $P_d(x)$. El grado del polinomio residuo $P_r(x)$ es menor que el grado del polinomio $P_d(x)$.

Al igual que la división de enteros, este procedimiento se puede llevar a cabo en forma más rápida utilizando un algoritmo similar al utilizado para la división simplificada de enteros, como veremos enseguida.

17.3.6. Forma simplificada para la división de polinomios

Veamos los dos ejemplos anteriores utilizando la notación simplificada.

Ejemplo 1

El ejemplo $\frac{x^3}{x+2}$ lo iniciamos de la siguiente forma:

$$\begin{array}{r|l} & \\ \hline x+2 & x^3 \\ & \end{array}$$

Como $\frac{x^3}{x} = x^2$, arriba de x^3, colocamos el cociente x^2:

$$\begin{array}{r|l} & x^2 \\ \hline x+2 & x^3 \\ & \end{array}$$

Multiplicamos x^2 por el divisor $x + 2$ y el resultado lo restamos de x^3:

$$\begin{array}{r|ll} & x^2 & \\ \hline x+2 & x^3 & \\ & -(x^3 & +2x^2) \\ \cline{3-3} & & -2x^2 \end{array}$$

El cociente es el polinomio $P_c(x) = x^2$ y el residuo es $P_r(x) = -2x^2$.

Ejemplo 2

El ejemplo $\frac{x^3+2x^2-x-2}{x+2}$ lo iniciamos de la siguiente forma:

$$
\begin{array}{r|rrrr}
 & & & & \\
\hline
x+2 & x^3 & +2x^2 & -x & -2 \\
 & & & &
\end{array}
$$

Como $\frac{x^3}{x} = x^2$, arriba de x^3, colocamos el cociente x^2:

$$
\begin{array}{r|rrrr}
 & x^2 & & & \\
\hline
x+2 & x^3 & +2x^2 & -x & -2 \\
 & & & &
\end{array}
$$

Multiplicamos x^2 por el divisor $x+2$ y el resultado lo restamos:

$$
\begin{array}{r|rrrr}
 & x^2 & & & \\
\hline
x+2 & x^3 & +2x^2 & -x & -2 \\
 & -(x^3 & +2x^2) & & \\
\cline{3-3}
 & & 0 & -x & -2
\end{array}
$$

Como $\frac{-x}{x} = -1$, arriba de $-x$, colocamos el cociente -1:

$$
\begin{array}{r|rrrr}
 & x^2 & & -1 & \\
\hline
x+2 & x^3 & +2x^2 & -x & -2 \\
 & -(x^3 & +2x^2) & & \\
\cline{3-3}
 & & 0 & -x & -2
\end{array}
$$

Multiplicamos -1 por el divisor $x+2$ y el resultado lo restamos:

$$
\begin{array}{r|rrrr}
 & x^2 & & -1 & \\
\hline
x+2 & x^3 & +2x^2 & -x & -2 \\
 & -(x^3 & +2x^2) & & \\
\cline{3-3}
 & & 0 & -x & -2 \\
 & & & -(-x & -2) \\
\cline{5-5}
 & & & & 0
\end{array}
$$

El cociente es el polinomio $P_c(x) = x^2 - 1$ y el residuo es $P_r(x) = 0$.

17.3.7. División de polinomios en Octave

En Octave podemos hacer la operación de división de polinomios $\frac{P}{Q}$ aprovechando la función $[C, R] = \text{deconv}(P, Q)$, siendo P y Q los vectores del numerador y denominador, respectivamente. El resultado se encuentra en el polinomio cociente C y el polinomio residuo R. Por ejemplo para $\frac{x^3+2x^2-x-2}{x+2}$ tenemos:

```
>> P = [1 2 -1 -2];
>> Q = [1 2];
>> [C, R] = deconv(P, Q)
C =
   1   0  -1
R =
   0   0   0   0
>> polyreduce(R)
ans = 0
```

El resultado es el polinomio cociente $P_c(x) = x^2 - 1$ y el residuo es 0. Observe que se utilizó la función $\text{polyreduce}(R)$ para quitar los ceros a la izquierda del polinomio y obtener la constante 0.

17.4. Teoremas importantes acerca de polinomios

En esta sección veremos teoremas importantes acerca de polinomios.

17.4.1. Teorema del residuo

Si queremos calcular sólo el residuo de la división de un polinomio $P(x)$ entre el factor $(x - a)$, podemos utilizar también un famoso teorema llamado teorema de residuo.

> **Teorema del residuo**. El residuo de la división $\frac{P(x)}{x-a}$ es igual a $P(a)$.

Ejemplo

Calculemos primero el residuo de $\frac{x^2-8x+6}{x-2}$ utilizando la notación simplificada de división de polinomios:

$$\begin{array}{r|rrr}
 & x & -6 & \\
\hline
x-2 & x^2 & -8x & 6 \\
 & -(x^2 & -2x) & \\
\cline{3-3}
 & & -6x & 6 \\
 & & -(-6x & +12) \\
\cline{4-4}
 & & & -6
\end{array}$$

De manera que el residuo es $P_r(x) = -6$.

Este resultado lo podemos también obtener aplicando el teorema del residuo, realizando menos cálculos. En este caso calculemos $P(2)$:

$$\begin{aligned} P(x) &= x^2 - 8x + 6 \\ P(2) &= 2^2 - 8(2) + 6 \\ P(2) &= 4 - 16 + 6 \\ P(2) &= -6 \end{aligned}$$

De manera que el residuo es nuevamente $P_r(x) = -6$.

Demostración del teorema del residuo

Al realizar la división del polinomio $P_D(x)$ entre $(x - a)$, tenemos:

$$\frac{P(x)}{x-a} = P_c(x) + \frac{P_r(x)}{x-a}$$

Si multiplicamos a ambos miembros por $(x - a)$ tenemos:

$$P(x) = P_c(x)(x-a) + P_r(x)$$

Si evaluamos esta igualdad asignando el valor de $x = a$, tenemos:

$$\begin{aligned} P(a) &= P_c(a)(a-a) + P_r(a) \\ P(a) &= P_c(a)(0) + P_r(a) \\ P(a) &= P_r(a) \end{aligned}$$

Sin embargo, como el polinomio $(x-a)$ es de grado 1, entonces $P_r(a)$ es un polinomio de grado 0, una constante. Es decir $P(a) = P_r(x)$.

17.4.2. Teorema del factor

Otro teorema importante es el siguiente.

Teorema del factor. Un polinomio $P(x)$ tiene un factor $(x - a)$ si y sólo si a es una raíz de $P(x)$. Es decir, $P(a) = 0$.

Veamos las dos partes para demostrar este teorema:

1. Probar que si $(x - a)$ es un factor, entonces se cumple que $P(a) = 0$ y
2. probar que si $P(a) = 0$, entonces $(x - a)$ es un factor.

En la primera parte, asumamos que $(x-a)$ es un factor de $P(x)$. Si es un factor su residuo debe ser necesariamente 0. Por el teorema del residuo, este residuo coincide con $P(a)$, es decir $P(a) = 0$.

En la segunda parte, asumamos que $P(a) = 0$. Por el teorema del residuo, $P(a) = 0$ coincide con el residuo $P_r(x) = 0$ en el algoritmo de la división:

$$\begin{aligned}
\frac{P(x)}{x-a} &= P_c(x) + \frac{P_r(x)}{x-a} \\
P(x) &= P_c(x)(x-a) + P_r(x) \\
P(x) &= P_c(x)(x-a) + 0 \\
P(x) &= P_c(x)(x-a)
\end{aligned}$$

Por lo tanto, $(x - a)$ es un factor de $P(x)$.

Este teorema nos permite **factorizar** un polinomio, si conocemos sus raíces, como en el ejemplo siguiente.

Ejemplo de factorización

En la sección de división de polinomios vimos que:

$$\frac{x^3 + 2x^2 - x - 2}{x + 2} = x^2 - 1$$

Si multiplicamos a ambos lados por $x + 2$, obtenemos:

$$x^3 + 2x^2 - x - 2 = (x + 2)(x^2 - 1)$$

Ahora bien, reconociendo que $(x^2 - 1)$ es una diferencia de cuadrados, la podemos factorizar como: $(x^2 - 1) = (x + 1)(x - 1)$. De esta forma tenemos la factorización completa del polinomio:

$$x^3 + 2x^2 - x - 2 = (x + 2)(x + 1)(x - 1)$$

Podemos reconocer las raíces de este polinomio: $x_1 = -2$, $x_2 = -1$ y $x_3 = 1$, es decir $P(-2) = 0$, $P(-1) = 0$ y $P(1) = 0$. El teorema del factor nos corrobora que $(x - x_1)$, $(x - x_2)$ y $(x - x_3)$ son los factores del polinomio.

En Octave podemos también obtener las raíces del polinomio, aprovechando la función "roots(P)" donde P contiene los coeficientes del polinomio:

```
>> P = [1 2 -1 -2];
>> x = roots(P)
x =
   1.00000
  -2.00000
  -1.00000
```

La gráfica mostrada en la figura 17.11 muestra el comportamiento de este polinomio, donde puede apreciarse los tres cruces por el eje x, que coinciden con las raíces del polinomio.

Si conocemos las raíces: $x_1, x_2, \ldots, x_n$ de un polinomio, lo podemos expresar como el producto de los factores asociados a cada raíz:

$$P(x) = (x - x_1)(x - x_2)\cdots(x - x_n) \tag{17.35}$$

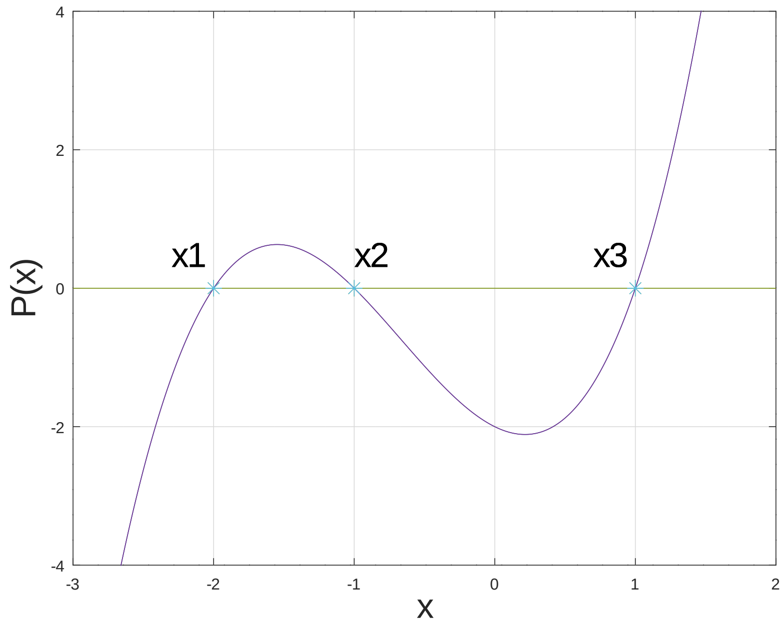


Figura 17.11: Gráfica de un polinomio que tiene tres raíces reales.

17.4.3. Teorema de las n raíces

Teorema de las n raíces. Todo polinomio de grado n tiene exactamente n raíces.

Es conveniente tener en cuenta que se puede dar el caso de que las raíces estén repetidas. Por ejemplo, el polinommio $P(x) = x^3$ se puede factorizar como sigue:

$$x^3 = (x-0)(x-0)(x-0)$$

Por lo tanto tiene tres raíces reales: $x_1 = 0$, $x_2 = 0$ y $x_3 = 0$, pero las tres son repetidas.

17.4.4. Teoremas sobre las raíces complejas conjugadas

Teoremas sobre las raíces complejas conjugadas. Las raíces complejas de un polinomio con coeficientes reales siempre ocurren en pares conjugados.

Ejemplo

Veamos ahora la factorización del polinomio:

$$P(x) = x^3 - x^2 + x - 1$$

El lector puede comprobar fácilmente que $P(1) = 0$ y por lo tanto $x_1 = 1$ es una raíz de $P(x)$ y $(x - 1)$ es un factor de $P(x)$. Si dividimos $P(x)$ entre $(x - 1)$ obtenemos:

$$\begin{array}{r|rrrr}
 & x^2 & & +1 & \\
\hline
x-1 & x^3 & -x^2 & x & -1 \\
 & -(x^3 & -x^2) & & \\
 & & \overline{0} & x & -1 \\
 & & & -(x & -1) \\
 & & & & \overline{0}
\end{array}$$

De manera que la factorización de $P(x)$ queda como sigue:

$$\begin{aligned}
\frac{x^3 - x^2 + x - 1}{x - 1} &= x^2 + 1 \\
x^3 - x^2 + x - 1 &= (x - 1)(x^2 + 1)
\end{aligned}$$

Podemos averiguar las raíces del polinomio cociente $P_c(x) = x^2 + 1$:

$$\begin{aligned}
x^2 + 1 &= 0 \\
x^2 &= -1 \\
x &= \pm\sqrt{-1} \\
x_2 &= i \\
x_3 &= -i
\end{aligned}$$

Conviene resaltar que las raíces complejas de polinomios cuadráticos siempre son pares de números complejos conjugados. Utilizando Octave, podemos corroborar las raíces obtenidas:

```
>> P = [1 -1 1 -1];
>> x = roots(P)
x =
   1.00000 + 0.00000i
   0.00000 + 1.00000i
   0.00000 - 1.00000i
```

La figura 17.12 muestra el comportamiento de este polinomio.

Si juntamos los factores asociados al par de raíces complejas conjugadas siempre obtenemos como resultado del producto un polinomio cuadrático con coeficientes reales. Por ejemplo, en el caso anterior tenemos que:

$$(x + i)(x - i) = x^2 + 1$$

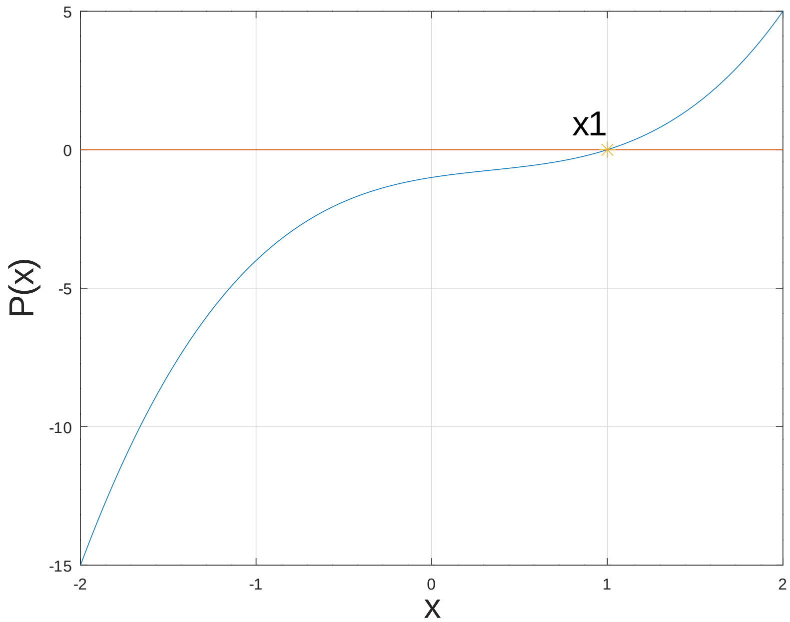


Figura 17.12: Gráfica de un polinomio que tiene una raíz real y dos complejas.

Esto nos lleva a un resultado importante para la factorización de un polinomio:

Todo polinomio con coeficientes reales sólo tiene dos tipos de factores:

- Lineales, de la forma $(ax + b)$
- Cuadráticos, de la forma $(ax^2 + bx + c)$

Los factores lineales corresponden a raíces reales y los factores cuadráticos (que no se pueden reducir a factores lineales) corresponden a pares de raíces complejas conjugadas.

17.4.5. Teorema sobre las raíces racionales

Teorema sobre las raíces racionales. Si el polinomio:

$$P(x) = a_n x^n + \ldots + a_1 x + a_0$$

tiene todos sus coeficientes enteros, entonces cualquier raíz racional de $P(x)$ (si las hubiera) es de la forma:

$$x = \frac{p}{q}$$

donde p es un factor de a_0 y q es un factor de a_n. Si $a_n = 1$, entonces las posibles raíces serán enteras.

Ejemplo

Como ejemplo determinemos las posibles raíces reales del polinomio:

$$P(x) = 2x^3 - 6x^2 + 2x - 6$$

En este caso, como todos los coeficientes son múltiplos de 2, podemos dividir el polinomio entre 2:

$$P(x) = x^3 - 3x^2 + x - 3$$

Como $a_n = 1$, las posibles raíces reales son enteras y pueden ser los posibles factores de $a_0 = -3$. Es decir, las posibilidades son ± 1 y ± 3. Probemos estos casos:

$$\begin{aligned} P(x) &= x^3 - 3x^2 + x - 3 \\ P(-1) &= (-1)^3 - 3(-1)^2 + (-1) - 3 = 8 \\ P(+1) &= (1)^3 - 3(1)^2 + (1) - 3 = -4 \\ P(-3) &= (-3)^3 - 3(-3)^2 + (-3) - 3 = -60 \\ P(+3) &= (3)^3 - 3(3)^2 + (3) - 3 = 0 \end{aligned}$$

Vemos que solamente $P(3) = 0$, lo que indica que encontramos la raíz $x_1 = 3$.

17.5. Encontrar un polinomio a partir de sus raíces

Enseguida se presentan algunos ejemplos donde se obtiene el polinomio a partir de conocer todas sus raíces.

Ejemplo 1

Consideremos un polinomio que tiene como raíces a $x_1 = 0$, $x_2 = 1$, $x_3 = i$ y $x_4 = -i$ y determinemos de que polinomio se trata si además sabemos que $a_n = 1$.

El polinomio $P(x)$ tiene la forma general:

$$\begin{aligned}
P(x) &= (x - x_1) * (x - x_2) * (x - x_3) * (x - x_4) \\
P(x) &= (x - 0) * (x - 1) * (x - i) * (x - (-i)) \\
P(x) &= x * (x - 1) * ((x - i) * (x + i)) \\
P(x) &= x * (x - 1) * (x^2 + 1)
\end{aligned}$$

Tenemos, en este caso, dos factores lineales y uno cuadrático. Si desarrollamos los productos tenemos:

$$\begin{aligned}
P(x) &= x * (x - 1) * (x^2 + 1) \\
P(x) &= x * (x(x^2 + 1) - (x^2 + 1)) \\
P(x) &= x * (x^3 - x^2 + x - 1) \\
P(x) &= x^4 - x^3 + x^2 - x
\end{aligned}$$

Si no supiéramos que $a_n = 1$, entonces cualquier polinomio $k * P(x)$ tendría las mismas raíces, siendo $k \neq 0$.

Ejemplo 2

Veamos un ejemplo más complicado. Si conocemos que el polinomio tiene las siguientes raíces: $x_1 = 1$, $x_2 = 1$ $x_3 = 1 + i$, $x_4 = 1 - i$ y , determinemos el polinomio correspondiente conociendo que $a_n = 1$.

$$\begin{aligned}
P(x) &= (x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)(x - x_4) \\
P(x) &= ((x - 1)(x - 1))(x - (1 + i))(x - (1 - i)) \\
P(x) &= ((x - 1)(x - 1))(x + (-1 - i))(x + (-1 + i)) \\
P(x) &= (x^2 - 2x + 1)(x^2 + (-1 - i)x + (-1 + i)x + (-1 - i)(-1 + i)) \\
P(x) &= (x^2 - 2x + 1)(x^2 + (-1 - i - 1 + i)x + (1 - (i * i))) \\
P(x) &= (x^2 - 2x + 1)(x^2 - 2x + (1 - (-1))) \\
P(x) &= (x^2 - 2x + 1)(x^2 - 2x + 2) \\
P(x) &= x^2(x^2 - 2x + 2) + (-2x)(x^2 - 2x + 2) + (1)(x^2 - 2x + 2) \\
P(x) &= (x^4 - 2x^3 + 2x^2) + (-2x^3 + 4x^2 - 4x) + (x^2 - 2x + 2) \\
P(x) &= x^4 + (-2 - 2)x^3 + (2 + 4 + 1)x^2 + (-4 - 2)x + 2 \\
P(x) &= x^4 - 4x^3 + 7x^2 - 6x + 2
\end{aligned}$$

Este resultado también lo podemos obtener fácilmente usando Octave para multiplicar los polinomios lineales que corresponden a cada factor. Usando Octave tenemos:

```
>> conv(conv(conv([1 -1],[1 -1]),[1 -1-i]),[1 -1+i])
ans =
   1  -4   7  -6   2
```

17.6. Fracciones parciales

En ocasiones resulta muy útil poder expresar una división de polinomios como una suma de expresiones más sencillas, como en el ejemplo siguiente:

$$\frac{2x}{x^2-1} = \frac{1}{x+1} + \frac{1}{x-1}$$

El lector interesado puede consultar el apéndice C para conocer una técnica conocida como **fracciones parciales** para expresar una fracción del tipo $\frac{P_r(x)}{P_d(x)}$ (donde el grado del polinomio $P_r(x)$ es menor que el grado de polinomio $P_d(x)$) como una suma de fracciones más simples.

El uso de la técnica de fracciones parciales resulta muy útil, por ejemplo, cuando el lector aborda el estudio del cálculo diferencial e integral.

17.7. Ejercicios propuestos

1. Determine el polinomio lineal que pasa por los puntos $P_1 = (1, 3)$ y $P_2 = (3, -1)$.
2. Determine el polinomio lineal que pasa por los puntos $P_1 = (1, 2)$ y tiene un ángulo de inclinación de 30 grados con respecto al eje x.
3. Determine el polinomio cuadrático que pasa por el punto $P_1 = (5, 3)$ y tiene su vértice en el punto $P_v = (1, 2)$.
4. Determine el vértice del polinomio cuadrático $P(x) = 2x^2 - x + 3$. Compruebe su resultado al graficar $P(x)$.
5. Determine el polinomio cúbico que pasa por los puntos: $P_1 = (3, 3)$, $P_2 = (6, 1)$, $P_3 = (9, 3)$ y $P_4 = (12, 8)$.
6. Determine el polinomio de grado 4 que pasa por los puntos: $P_1 = (-3, 5)$, $P_2 = (-2, 1)$, $P_3 = (-1, 0)$, $P_4 = (0, 0)$, $P_5 = (1, 1)$, $P_6 = (2, 1)$ $P_7 = (3, 5)$.
7. Realice las siguientes operaciones que involucran polinomios:
   a) $3 * (x^10 + x^3 + x^2)$
   b) $-1 * (2x^8 - 2x^2 + x)$
   c) $(5x^3 - 5x + 2)(x^3 + 1)$
8. Realice las siguientes operaciones que involucran polinomios:
   a) $(x^2 + 3) + 5(2x^3 + x^2 - 1)$
   b) $((x^5 + x^2 - 3) * (x^2 + x)) - 4 * (2x^3 + 6)$
   c) $((x^3 + 2x^2 - 2) * (x^3 + 2x) * (3x^3 + 5)$
9. Determine los polinomios cociente y residuo de las divisiones de polinomios siguientes:
   a) $\frac{x^5+3x^2-2x-3}{x-1}$

b) $\frac{x^3+3x^2-2x-4}{x^2+1}$

10. Determine los polinomios cociente y residuo de las divisiones de polinomios siguientes:

    a) $\frac{-x^4+5x^3-5x+2}{x^2+x+1}$

    b) $\frac{5x^3-5x+2}{x^3+1}$

11. Determine el valor de los siguiente polinomios en el valor dado.

    a) $x = 2,\ P(x) = x^3 - 3x^2 + x + 2$

    b) $x = -3,\ P(x) = x^4 - 3x^2 + x + 2$

    c) $x = 0,\ P(x) = 2x^5 + x^2 + x - 5$

    d) $x = -1,\ P(x) = 2x^4 - 3x^3 - 3x - 3$

12. Verifique que el residuo que se obtiene de la división de los siguientes polinomios es el mismo que el obtenido por el Teorema del residuo:

    a) $\frac{x^3-x^2+3}{x-3}$

    b) $\frac{x^3-2x^2+5}{x}$

    c) $\frac{x+1}{x+2}$

    d) $\frac{x^2+1}{x+2}$

13. Determine los polinomios que se obtienen al considerar las siguientes raíces. En todos los casos considere que el coeficiente líder $a_n = 1$.

    a) $x_1 = -1, x_2 = 1$

    b) $x_1 = 0, x_2 = -10$

    c) $x_1 = 1, x_2 = 2, x_3 = 3$

    d) $x_1 = 1, x_2 = 1, x_3 = 3$

    e) $x_1 = 1, x_2 = 1, x_3 = 3, x_4 = 3$

    f) $x_1 = 1, x_2 = 1, x_3 = 3, x_4 = 0$

    g) $x_1 = 1, x_2 = 1 + 2i, x_3 = 1 - 2i, x_4 = 2$

    h) $x_1 = 1 + 2i, x_2 = 1 - 2i, x_3 = 2 + i, x_4 = 2 - i$

14. Para cada uno de los polinomios obtenidos en el ejercicio anterior, grafique el polinomio obtenido utilizando Octave. Verifique que efectivamente las curvas el eje x en los valores de x que corresponden a las raíces reales del polinomio.

15. Determine las raíces de los siguientes polinomios.

    a) $P(x) = (x^2 + 2x + 1)(x)$

    b) $P(x) = (2x^2 - 18)(x + 2)$

    c) $P(x) = (2x + 3)(x^2 + 2x - 3)$

    d) $P(x) = (x + 2)(x^2 + 4)$

    e) $P(x) = (x^2 + 25)(x^2 + 2x)(x^2 - 25)$

f) $P(x) = (x^3 + 4x)(x^2 - 25)(x^2 + 1)$

16. En el ejercicio anterior, desarrolle los productos y utilice Octave para encontrar todas las raíces de los polinomios. Verifique que las raíces obtenidas son las mismas que obtuvo en el ejercicio anterior.

Capítulo 18

Desigualdades

En este capítulo veremos **desigualdades** como las siguientes:

- x es menor que y:
$$x < y$$
- x es menor o igual que y:
$$x \leq y$$
equivalente a $(x < y) \vee (x = y)$. Recuerde que $\vee$ denota la operación lógica OR.
- x es mayor que y:
$$x > y$$
- x es mayor o igual que y:
$$x \geq y$$
equivalente a $(x > y) \vee (x = y)$.

Estas expresiones son predicados lógicos que se vuelven proposiciones lógicas cuando las variables x y y asumen ciertos valores y entonces pueden ser verdaderas (V) o falsas (F).

En este capítulo el objetivo será conocer los valores de la variable o las variables de manera que una determinada desigualdad sea cierta. Este capítulo completa los conocimientos básicos de matemáticas que un estudiante requiere para abordar temas más avanzados de matemáticas en la universidad.

18.1. Propiedades de las desigualdades

Recordemos que un número real a es menor que otro número b si a se encuentra a la izquierda de b en la recta numérica, por ejemplo son verdaderas las siguientes expresiones: $(1 < 2)$, $(-2 < -1)$, $(-10 < 1)$, etc.

En forma similar a las igualdades, enseguida abordaremos propiedades relacionadas con las desigualdades, asumiendo que a, b, c y d son números reales y recordando nuestros conocimientos sobre las operaciones lógicas:

1. **Propiedad transitiva**:

$$(a < b) \wedge (b < c) \quad \rightarrow \quad (a < c) \tag{18.1}$$
$$(c > b) \wedge (b > a) \quad \rightarrow \quad (c > a) \tag{18.2}$$

Si a es menor que b y b es menor que c, entonces se cumple que a es menor que c, como se ilustra en la figura 18.1. El mismo argumento se puede decir del otro caso.

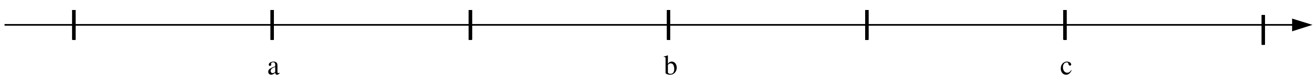


Figura 18.1: Si $(a < b)$ y $(b < c)$ se cumple que $(a < c)$. Si $(a < b)$ el número a está a la izquierda del número b y si $(b < c)$ el número b está a la izquierda del número c. De la figura vemos que el número a se encuentra a la izquierda de c y por lo tanto $(a < c)$.

Por ejemplo:

$$(1 < 2) \wedge (2 < 3) \rightarrow (1 < 3)$$

2. **Propiedad aditiva**:

$$(a < b) \wedge (c < d) \rightarrow (a + c < b + d) \tag{18.3}$$
$$(a > b) \wedge (c > d) \rightarrow (a + c > b + d) \tag{18.4}$$

Es decir, si se suman los lados más pequeños de ambas desigualdades $(a + c)$ y de igual manera los lados más grandes de las dos desigualdades $(b + d)$, entonces se cumple que la suma pequeña es menor que la suma grande $(a + c < b + d)$. Por ejemplo:

$$\begin{aligned} (1 < 3) \wedge (10 < 20) \quad &\rightarrow \quad (1 + 10 < 3 + 20) \\ (1 < 3) \wedge (10 < 20) \quad &\rightarrow \quad (11 < 23) \end{aligned}$$

3. **Propiedad de la suma de un número**:

$$(a < b) \rightarrow (a + c < b + c) \tag{18.5}$$
$$(a > b) \rightarrow (a + c > b + c) \tag{18.6}$$

Es decir, si se le suma el mismo número real c a ambos lados de la desigualdad, la desigualdad se conserva. Por ejemplo:

$$(1 < 3) \rightarrow (1 + 1 < 3 + 1)$$

Utilizando esta propiedad se puede inferir lo siguiente:

$$(a < b) \quad \rightarrow \quad (a - b < b - b)$$
$$(a < b) \quad \rightarrow \quad (a - b < 0) \tag{18.7}$$

Es decir, si $a < b$ entonces la resta $(a - b)$ es negativa. Por otro lado, si partimos de la desigualdad contraria tenemos:

$$\begin{aligned}(a > b) &\rightarrow (a - b > b - b)\\ (a > b) &\rightarrow (a - b > 0)\end{aligned} \tag{18.8}$$

Es decir, si $a > b$ entonces la resta $(a - b)$ es positiva.

4. **Propiedad de multiplicación por un número positivo**.

$$(a < b) \wedge (c > 0) \rightarrow (a * c < b * c) \tag{18.9}$$
$$(a > b) \wedge (c > 0) \rightarrow (a * c > b * c) \tag{18.10}$$

Al multiplicar ambos lados o miembros de la desigualdad por un mismo número positivo, la desigualdad se conserva. Recordemos que cuando se multiplica por un número positivo, la cantidad aumenta (si $c > 1$) o disminuye (si $c < 1$), pero aumenta o disminuye en la misma proporción en ambos lados de la desigualdad, por lo que se conserva la desigualdad. Por ejemplo:

$$\begin{aligned}(1 < 2) \wedge (3 > 0) &\rightarrow (1 * 3 < 2 * 3)\\ (1 < 2) \wedge (3 > 0) &\rightarrow (3 < 6)\end{aligned}$$

5. **Propiedad de multiplicación por un número negativo**.

$$(a < b) \wedge (c < 0) \rightarrow (a * c > b * c) \tag{18.11}$$
$$(a > b) \wedge (c < 0) \rightarrow (a * c < b * c) \tag{18.12}$$

Al multiplicar ambos lados de la desigualdad por un mismo número negativo, **la desigualdad se invierte**. Recordemos que cuando se multiplica un número por (-1) el número cambia de signo y esto origina que tenga que invertirse la desigualdad. Por ejemplo:

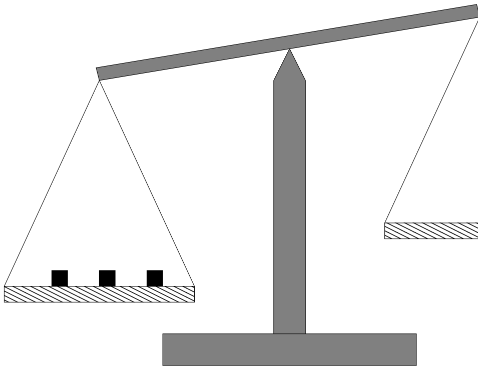
$$\begin{aligned}(3 > 1) \wedge (-1 < 0) &\rightarrow (3 * (-1) < 1 * (-1))\\ (3 > 1) \wedge (-1 < 0) &\rightarrow (-3 < -1)\end{aligned}$$

La figura 18.2 ilustra esta situación. En 18.2(a) tenemos representado que $3 > 1$, un tablero con tres cilindros pesa más que un tablero con un cilindro, de manera que el lado con tres cilindros es más bajo que el lado con un cilindro. En la figura 18.2(b) se representa que el tablero izquierdo tiene tres huecos y el tablero derecho tiene sólo un hueco, de manera que el tablero con tres huecos pesa menos que el tablero con un hueco y por lo tanto la balanza se inclina hacia el lado más pesado. Es decir, $-3 < -1$.

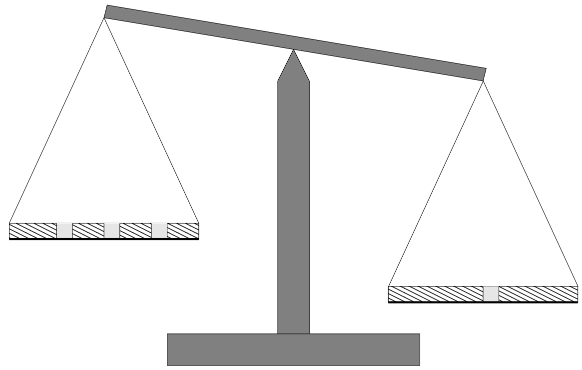
Es conveniente tener en cuenta que este mismo resultado se obtiene si partimos de que $(a < b)$ y sumamos $(-a - b)$ a ambos miembros de la desigualdad:

$$\begin{aligned}(a < b) &\rightarrow (a < b)\\ (a < b) &\rightarrow (a - a - b < b - a - b)\\ (a < b) &\rightarrow (-b < -a)\\ (a < b) &\rightarrow ((-1) * b < (-1) * a)\\ (a < b) &\rightarrow ((-1) * a > (-1) * b)\end{aligned}$$

Un error muy común que cometen los estudiantes es considerar la desigualdad como si fuera una igualdad y olvidan invertir la desigualdad cuando se multiplica por un número negativo.



(a) $3 > 1$



(b) $-3 < -1$

Figura 18.2: Multiplicar por -1 invierte la desigualdad.

6. **Propiedad de los inversos**.

$$(a < b) \wedge (a > 0) \wedge (b > 0) \quad \rightarrow \quad \left(\frac{1}{a} > \frac{1}{b}\right) \tag{18.13}$$

$$(a < b) \wedge (a < 0) \wedge (b < 0) \quad \rightarrow \quad \left(\frac{1}{a} > \frac{1}{b}\right) \tag{18.14}$$

La primera propiedad se justifica fácilmente utilizando las propiedades anteriores al multiplicar por $\frac{1}{a}\frac{1}{b}$, considerando el signo positivo de las fracciones:

$$(a < b) \wedge (a > 0) \wedge (b > 0) \quad \rightarrow \quad \left(\frac{1}{a}\;\frac{1}{b}\;a < b\;\frac{1}{a}\;\frac{1}{b}\right)$$
$$(a < b) \wedge (a > 0) \wedge (b > 0) \quad \rightarrow \quad \left(\frac{1}{b} < \frac{1}{a}\right)$$
$$(a < b) \wedge (a > 0) \wedge (b > 0) \quad \rightarrow \quad \left(\frac{1}{a} > \frac{1}{b}\right)$$

En la segunda propiedad se considera el signo negativo de las fracciones, dos veces:

$$(a < b) \wedge (a < 0) \wedge (b < 0) \quad \rightarrow \quad \left(\frac{1}{a}\;a > b\;\frac{1}{a}\right)$$
$$(a < b) \wedge (a < 0) \wedge (b < 0) \quad \rightarrow \quad \left(\frac{1}{b}\;\frac{1}{a}\;a < b\;\frac{1}{a}\frac{1}{b}\right)$$
$$(a < b) \wedge (a < 0) \wedge (b < 0) \quad \rightarrow \quad \left(\frac{1}{b} < \frac{1}{a}\right)$$
$$(a < b) \wedge (a < 0) \wedge (b < 0) \quad \rightarrow \quad \left(\frac{1}{a} > \frac{1}{b}\right)$$

Por ejemplo:

$$(2 < 5) \wedge (2 > 0) \wedge (5 > 0) \quad \rightarrow \quad \left(\frac{1}{2} > \frac{1}{5}\right)$$
$$(-3 < -2) \wedge (-3 < 0) \wedge (-2 < 0) \quad \rightarrow \quad \left(\frac{1}{-3} > \frac{1}{-2}\right)$$

Como ejercicio, el lector puede verificar el caso de que cumpla que $(a < b)$, siendo a negativa y b positiva.

18.2. Notación de intervalos en números reales

Las desigualdades se pueden utilizar para representar conjuntos de números reales acotados por un límite o extremo inferior y por otro límite superior. Veamos los siguientes ejemplos:

- **Intervalo abierto**: $1 < x < 3$. Esta notación es una abreviatura de dos expresiones: $(1 < x) \wedge (x < 3)$. El conjunto de todos los números reales que se encuentran entre el 1 y el 3 (sin incluir el 1, ni el 3), se representa como $(1, 3)$. De manera que $1 < x < 3$ y $x \in (1, 3)$ tienen el mismo significado.
- **Intervalo cerrado**: $1 \leq x \leq 3$, equivalente a $x \in [1, 3]$. Observe que se ha cambiado la notación de paréntesis: ( ) por [ ] para indicar que el conjunto incluye los valores extremos.
- **Intervalo semiabierto**: $1 < x \leq 3$, equivalente a: $x \in (1, 3]$.
- **Intervalos infinitos**:
  - $x < 3$, equivalente a $x \in (-\infty, 3)$.
  - $x \leq 3$, equivalente $x \in (-\infty, 3]$.
  - $x > 3$, equivalente a $x \in (3, \infty)$.
  - $x \geq 3$, equivalente a $x \in [3, \infty)$.
  - $-\infty < x < \infty$, equivalente a $x \in (-\infty, \infty)$, o simplemente como $x \in R$.

18.3. Solución de desigualdades en una variable

Iniciemos encontrando todos los posibles valores de la variable x en la siguiente desigualdad, aprovechando las propiedades de las desigualdades:

$$\begin{aligned}
-3x - 3 <& \quad x + 1 \\
-3x - 3 + 3 <& \quad x + 1 + 3 \quad \text{(se suma 3 a ambos lados)} \\
-3x <& \quad x + 4 \\
-3x - x <& \quad x - x + 4 \quad \text{(se suma } -x \text{ a ambos lados)} \\
-4x <& \quad 4 \\
\left(-\frac{1}{4}\right)(-4x) >& \quad \left(-\tfrac{1}{4}\right) 4 \quad \text{(se multiplica por el número negativo } -\tfrac{1}{4}\text{)} \\
x >& \quad -1
\end{aligned}$$

18.3.1. Desigualdades con polinomios

Si una desigualdad contiene una única variable y potencias enteras positivas de la variable, entonces podemos realizar operaciones sobre la desigualdad, de manera que todos los términos se ubiquen en el lado izquierdo de la desigualdad en alguna de las siguientes formas:

$$P(x) < 0 \tag{18.15}$$
$$P(x) > 0 \tag{18.16}$$

Donde $P(x)$ es un polinomio de grado n. Como vimos en el capítulo anterior, todo polinomio con coeficientes reales de grado n tiene n raíces. Si el polinomio tiene r raíces reales y c raíces complejas, entonces se puede factorizar en r factores lineales y $c/2$ factores cuadráticos (recuerde que las raíces complejas aparecen en pares de números complejos conjugados). Veamos un ejemplo con raíces reales:

$$x^3 - 6x^2 + 8x < 0$$
$$x(x-2)(x-4) < 0$$

El polinomio $P(x) = x^3 - 6x^2 + 8x$, tiene tres raíces reales: $x_1 = 0$, $x_2 = 2$ y $x_3 = 4$. La figura 18.4 muestra la gráfica de este polinomio, donde se pueden apreciar los tres cruces por cero. Con el fin de facilitar la interpretación de la gráfica se ha sobrepuesto la **función signo**, llamada en Octave como sign, la cual se define como sigue:

$$\text{signo(x)} = \begin{cases} +1 & \text{si} \quad x > 0 \\ 0 & \text{si} \quad x = 0 \\ -1 & \text{si} \quad x < 0 \end{cases} \tag{18.17}$$

Así, los segmentos de recta horizontales en 1 y -1 de signo($P(x)$), indican claramente cuando $P(x)$ es positiva o negativa. Como estamos interesados cuando $P(x) < 0$, entonces la solución buscada es $(x < 0) \vee (2 < x < 4)$, o bien en términos de intervalos: $x \in \ (-\infty, 0) \cup (2, 4)$ (utilizamos la operación unión de conjuntos, denotada por $\cup$, para expresar el conjunto solución completo). Si el problema hubiera sido $P(x) \leq 0$, entonces la solución sería: $(x \leq 0) \vee (2 \leq x \leq 4)$, debido a que cuando x toma el valor de una raíz, entonces $P(x) = 0$.

El código para obtener esta gráfica en Octave es el siguiente:

```
>> x=[-2:0.01:6];
>> y = x .* (x -2) .* (x - 4);
>> plot(x,y)
>> hold on
>> grid on
>> y1 = sign(y);
>> plot(x,y1)
>> axis ([-2 6 -4 4])
>> z = y * 0;
>> plot(x,z)
>> xlabel('x','fontsize', 16);
>> ylabel('P(x)','fontsize', 16);
>> print -color -depsc grafica.eps
```

Método de intervalos

Si no disponemos de un programa para graficar una función, como Octave, podemos utilizar el **metodo de intervalos** para resolver una desigualdad que involucre un polinomio.

Como primer paso se determinan las raíces reales del polinomio y se ordenan de menor a mayor, por ejemplo: $x_1 = 0$, $x_2 = 2$ y $x_3 = 4$, para el polinomio que vimos anteriormente: $P(x) = x(x-2)(x-4)$.) Enseguida se

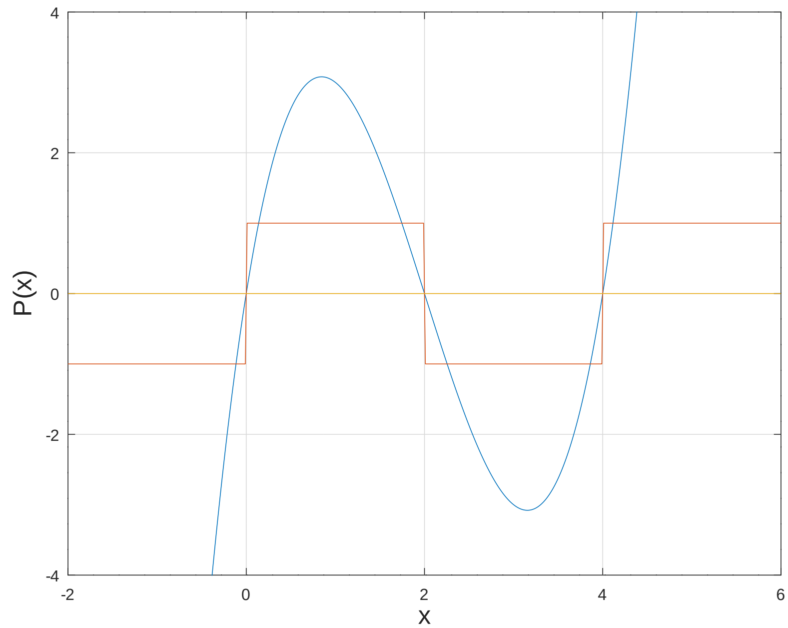


Figura 18.3: Gráfica del polinomio $P(x) = x(x-2)(x-4)$.

divide toda la recta numérica en intervalos, considerando las raíces reales del polinomio. En nuestro caso son 4 intervalos:

$(-\infty, 0)$	$(0, 2)$	$(2, 4)$	$(4, \infty)$

Enseguida se determina la función signo de cada factor del polinomio en cada uno de los intervalos. Como el polinomio no cambia de signo en cada intervalo, es suficiente con evaluar un valor de x dentro del intervalo. Por ejemplo, para evaluar signo$(x-2)$ en el intervalo $(-\infty, 0)$ podemos utilizar el valor $x = -1$, para obtener:

$$\begin{aligned} \text{signo}(x-2) &= \text{signo}(-1-2) \\ \text{signo}(x-2) &= \text{signo}(-3) \\ \text{signo}(x-2) &= -1 \end{aligned}$$

Siguiendo este procedimiento podemos llenar la siguiente tabla.

	$(-\infty, 0)$	$(0, 2)$	$(2, 4)$	$(4, \infty)$
signo(x)	-1	$+1$	$+1$	$+1$
signo$(x-2)$	-1	-1	$+1$	$+1$
signo$(x-4)$	-1	-1	-1	$+1$
signo$(x(x-2)(x-4))$	-1	$+1$	-1	$+1$

El último renglón de la tabla se puede calcular fácilmente considerando los signos de los factores en cada intervalo. Recordemos que un número impar de factores con signo negativo nos da un resultado negativo. En el primer intervalo tenemos tres factores negativos y por lo tanto el producto de los tres factores es negativo. Sin embargo, en el segundo intervalo hay sólo dos factores negativos, por lo tanto el resultado es positivo. En el tercer intervalo sólo hay un factor negativo y el resultado es negativo. Finalmente en el último intervalo todos los factores son positivos, de manera que el resultado es también positivo.

Del último renglón de esta tabla podemos obtener el resultado de la desigualdad $P(x) < 0$. La variable x debe estar en el primer intervalo o en el tercer intervalo; es decir, $x \in (-\infty, 0) \cup (2, 4)$.

18.3.2. Desigualdades que involucran una división de polinomios

Si $P(x)$ y $Q(x)$ son polinomios, veamos ahora desigualdades de la forma:

$$\frac{P(x)}{Q(x)} < 0 \tag{18.18}$$

$$\frac{P(x)}{Q(x)} > 0 \tag{18.19}$$

con un ejemplo sencillo:

$$\frac{x-3}{x(x-2)(x-4)} < 0$$

El polinomio del numerador tiene como raíz a $x_0 = 3$, mientras que el polinomio del denominador tiene tres raíces reales: $x_1 = 0$, $x_2 = 2$ y $x_3 = 4$. La figura 18.4 muestra la gráfica de esta fracción, donde se ha sobrepuesto la función signo de la división de polinomios:

De la gráfica podemos observar que si $(0 < x < 2) \vee (3 < x < 4)$, entonces se cumple que $\frac{P(x)}{Q(x)} < 0$. Por lo tanto el intervalo solución para x es $(0, 2) \cup (3, 4)$.

Método de los intervalos

En este caso tenemos 4 raíces reales de ambos polinomios $P(x)$ y $Q(x)$, ordenadas de menor a mayor: $x_1 = 0$, $x_2 = 2$, $x_3 = 3$ y $x_4 = 4$. La recta numérica se divide ahora en 5 intervalos:

$(-\infty, 0)$	$(0, 2)$	$(2, 3)$	$(3, 4)$	$(4, \infty)$

Ahora podemos llenar la siguiente tabla, donde aparecen los factores de ambos polinomios.

	$(-\infty, 0)$	$(0, 2)$	$(2, 3)$	$(3, 4)$	$(4, \infty)$
signo$(x-3)$	-1	-1	-1	$+1$	$+1$
signo(x)	-1	$+1$	$+1$	$+1$	$+1$
signo$(x-2)$	-1	-1	$+1$	$+1$	$+1$
signo$(x-4)$	-1	-1	-1	-1	$+1$
signo $\left(\frac{x-3}{x(x-2)(x-4)}\right)$	$+1$	-1	$+1$	-1	$+1$

El último renglón se determina fácilmente observando que el signo del resultado al multiplicar o dividir es el mismo. Es decir, cuando haya un número impar de factores negativos en el numerador y denominador, el resultado es negativo. De otra forma es positivo.

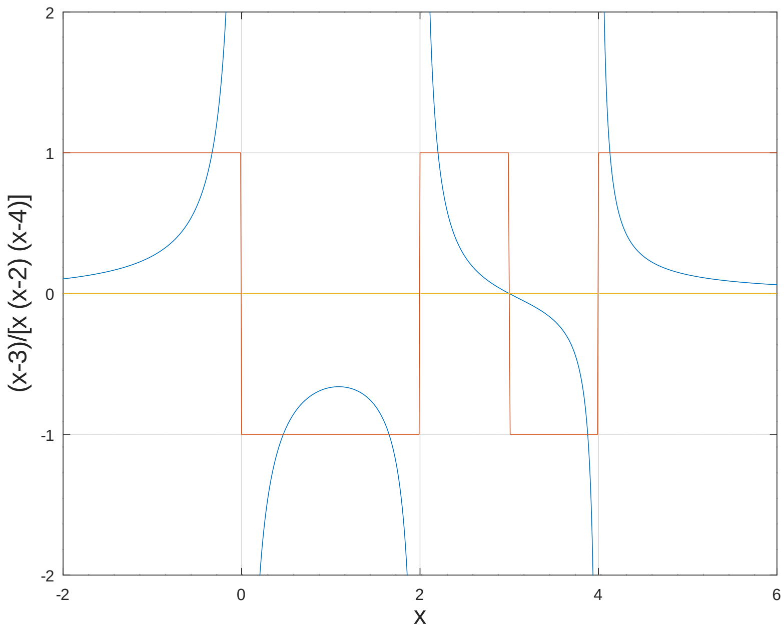


Figura 18.4: Gráfica de $\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{x-3}{x(x-2)(x-4)}$.

Del último renglón de esta tabla podemos obtener el resultado de la desigualdad $\frac{P(x)}{Q(x)} < 0$. La variable x debe estar en el segundo intervalo o en el cuarto intervalo; es decir, $x \in \ (0,2) \cup (3,4)$. Si la desigualdad hubiera sido $\frac{P(x)}{Q(x)} \leq 0$, entonces la solución sería: $x \in \ (0,2) \cup [3,4)$, puesto que en $x = 3$ se anula el polinomio del numerador de la fracción.

Un ejemplo con el lado derecho diferente de 0

Analicemos la siguiente desigualdad:

$$\frac{1}{x+1} < 1$$

Una primera opción parece ser multiplicar a ambos lados de la desigualdad por $(x+1)$. Sin embargo, hacerlo **es incorrecto por que no conocemos el signo del factor** $(x+1)$. En su lugar podemos proceder a realizar la suma de fracciones, de la siguiente forma:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{x+1} &< 1 \\
\frac{1}{x+1} - 1 &< 1 - 1 \\
\frac{1}{x+1} - 1 &< 0 \\
\frac{1}{x+1} + \frac{-1}{1} * \frac{x+1}{x+1} &< 0 \\
\frac{1}{x+1} + \frac{-x-1}{x+1} &< 0 \\
\frac{1-x-1}{x+1} &< 0 \\
\frac{-x}{x+1} &< 0
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(-1) * \frac{-x}{x+1} &> (-1) * 0 \\
\frac{x}{x+1} &> 0
\end{aligned}$$

Utilizando el método de los intervalo tenemos 2 raíces reales: $x_1 = -1$ y $x_2 = 0$; de manera que la recta numérica se divide ahora en 3 intervalos:

$(-\infty, -1)$	$(-1, 0)$	$(0, \infty)$

Ahora podemos llenar la siguiente tabla, donde aparecen los factores de ambos polinomios.

	$(-\infty, -1)$	$(-1, 0)$	$(0, \infty)$
signo(x)	-1	-1	$+1$
signo$(x+1)$	-1	$+1$	$+1$
signo $\left(\frac{x}{x+1}\right)$	$+1$	-1	$+1$

Del último renglón de esta tabla podemos obtener el resultado de la desigualdad $\frac{x}{x+1} > 0$. La variable x debe estar en el primer intervalo o en el tercer intervalo; es decir, $x \in (-\infty, -1) \cup (0, \infty)$. Podemos comprobar que este resultado es correcto al observar la gráfica mostrada en la figura 18.5.

18.4. Desigualdades con valores absolutos

Veamos el comportamiento de las desigualdades y su solución a través de los siguientes ejemplos.

18.4.1. Ejemplo $|x| < 2$

Analicemos la siguiente desigualdad:

$$|x| < 2 \tag{18.20}$$

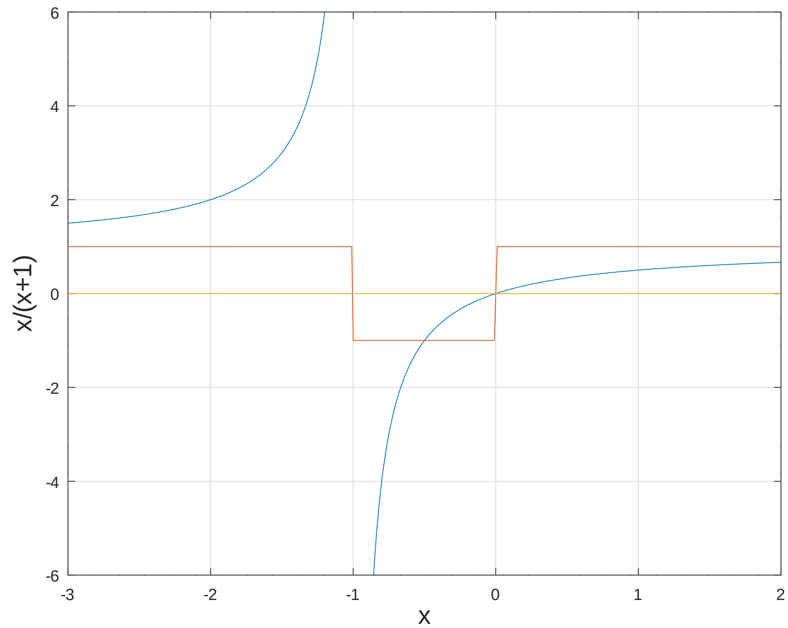


Figura 18.5: Gráfica de $\frac{x}{x+1}$.

Primero recordemos la definición de valor absoluto:

$$|x| = \begin{cases} x & \text{si} \quad x \geq 0 \\ -x & \text{si} \quad x < 0 \end{cases}$$

Vemos que $|x|$ cambia su comportamiento para $x < 0$ y para $x \geq 0$. La raíz del polinomio $P(x) = x$ es $x = 0$. Por esta razón vamos a considerar dos intervalos para x: $(-\infty, 0)$ y $[0, \infty)$.

- Intervalo $(-\infty, 0)$ equivalente a $x < 0$. Con este valor de x, tenemos que $|x| = -x$ y la desigualdad 18.20 se convierte en la siguiente, la cual se puede resolver fácilmente:

$$\begin{array}{rcl} -x & < & 2 \\ (-1) * (-x) & > & (-1) * 2 \\ x & > & -2 \end{array}$$

  De manera que x debe cumplir las dos condiciones: $(x > -2)$ y $(x < 0)$. Esto lo podemos escribir en forma compacta como: $-2 < x < 0$ o bien $x \in (-2, 0)$.

- Intervalo $[0, \infty)$ equivalente a $x \geq 0$. Con este valor de x, tenemos que $|x| = x$ y la desigualdad 18.20 se convierte en:

$$x \quad < \quad 2$$

  De manera que x debe cumplir las dos condiciones: $(x < 2)$ y $(x \geq 0)$. Esto lo podemos escribir en forma compacta como: $0 \leq x < 2$ o bien $x \in [0, 2)$.

De manera que la solución completa es la unión de los dos conjuntos obtenidos: $x \in (-2, 0) \cup [0, 2)$. En forma compacta tenemos que la solución de $|x| < 2$ es $x \in (-2, 2)$. Podemos comprobar este resultado si graficamos la expresión equivalente:

$$|x| - 2 < 0$$

Utilizando Octave y la función abs para calcular el valor absoluto, obtenemos la gráfica mostrada en la figura 18.6, donde además se ha incluido la gráfica de la función signo. Podemos ver que $|x| - 2 < 0$ se cumple si $x \in (-2, 2)$. Si el 2 se cambia por otro valor real no negativo a se obtiene el siguiente resultado.

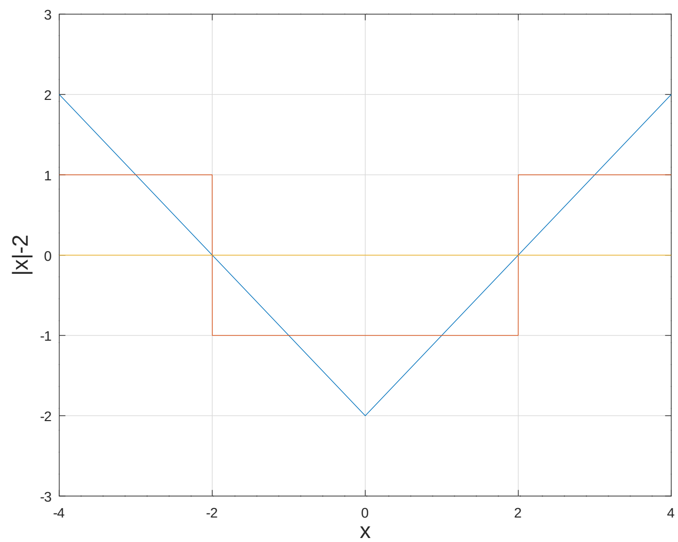


Figura 18.6: Gráfica de $|x| - 2$.

Si a es un número real no negativo y $x \in R$, entonces la desigualdad siguiente:

$$|x| < a \tag{18.21}$$

se cumple cuando $x \in (-a, a)$. En otras palabras: $(-a < x < a)$.

18.4.2. Ejemplo $|x| > a$

Analicemos ahora la siguiente desigualdad para un valor a real no negativo:

$$|x| > a \tag{18.22}$$

Consideremos nuevamente los dos intervalos posibles:

- Intervalo $x < 0$. Con este valor de x, tenemos que $|x| = -x$ y la desigualdad 18.22 se convierte en:

$$\begin{aligned} -x &> a \\ (-1) * (-x) &< (-1) * a \\ x &< -a \end{aligned}$$

  Podemos ver que $x < -a$ cumple automáticamente la condición adicional de que $x < 0$.

- Intervalo $x \geq 0$. Con este valor de x, tenemos que $|x| = x$ y la desigualdad 18.22 se convierte en:

$$x > a$$

  Podemos ver que $x > a$ cumple automáticamente la condición adicional de que $x \geq 0$.

De manera que la solución a $|x| > a$ es $x \in (-\infty, -a) \cup (a, \infty)$. La figura 18.6 ayuda a apreciar esta solución si consideramos la expresión equivalente: $|x| - a > 0$, siendo $a = 2$.

Si a es un número real no negativo y $x \in R$, entonces la desigualdad siguiente:

$$|x| > a \tag{18.23}$$

se cumple cuando $x \in (-\infty, -a) \cup (a, \infty)$. Utilizando desigualdades el resultado se puede expresar como: $(x < -a) \vee (x > a)$.

18.4.3. Ejemplo $|x - 1| < 5$

Analicemos ahora la siguiente desigualdad:

$$|x - 1| < 5 \tag{18.24}$$

Vemos que $|x - 1|$ cambia su comportamiento para $x - 1 < 0$ y cuando $x - 1 \geq 0$. La raíz del polinomio $P(x) = x - 1$ es $x = 1$. Por esta razón vamos a considerar dos intervalos para x: $(-\infty, 1)$ y $[1, \infty)$.

- Intervalo $(-\infty, 1)$ equivalente a $x < 1$. Con este valor de x, tenemos que $|x-1| = -(x-1)$ y la desigualdad 18.24 se convierte en:

$$\begin{aligned} -(x-1) &< 5 \\ (-1) * (-(x-1)) &> (-1) * 5 \\ x - 1 &> -5 \\ x - 1 + 1 &> -5 + 1 \\ x &> -4 \end{aligned}$$

  De manera que x debe cumplir las dos condiciones: $(x > -4)$ y $(x < 1)$. Esto lo podemos escribir en forma compacta como: $-4 < x < 1$ o bien $x \in (-4, 1)$.

- Intervalo $[1, \infty)$ equivalente a $x \geq 1$. Con este valor de $x-1$, tenemos que $|x-1| = x-1$ y la desigualdad 18.24 se convierte en:

$$\begin{aligned} x-1 &< 5 \\ x-1+1 &< 5+1 \\ x &< 6 \end{aligned}$$

  De manera que x debe cumplir las dos condiciones: $(x < 6)$ y $(x \geq 1)$. Esto lo podemos escribir en forma compacta como: $1 \leq x < 6$ o bien $x \in [1, 6)$.

De manera que la solución completa es la unión de los dos conjuntos obtenidos: $x \in (-4, 1) \cup [1, 6)$. En forma compacta tenemos que la solución de $|x-1| < 5$ es $x \in (-4, 6)$. Podemos comprobar este resultado si graficamos la expresión equivalente:

$$|x-1| - 5 < 0$$

Utilizando Octave y la función abs para calcular el valor absoluto, obtenemos la gráfica mostrada en la figura 18.7, donde además se ha incluido la gráfica de la función signo. Podemos ver que $|x-1| - 5 < 0$ se satisface si $x \in (-4, 6)$.

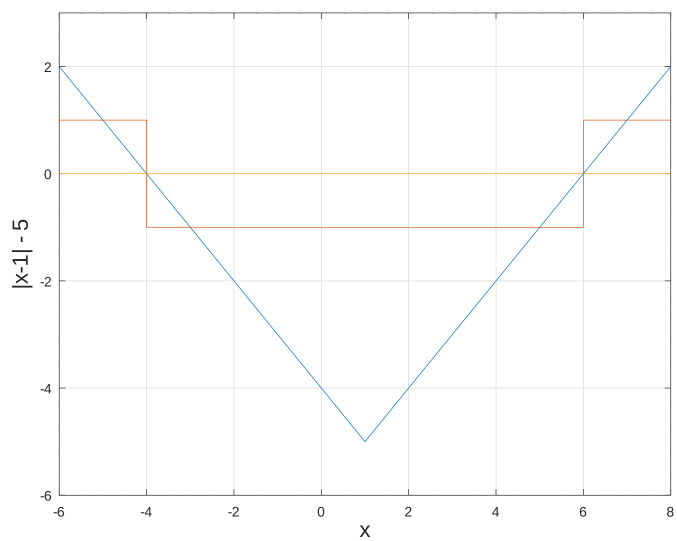


Figura 18.7: Gráfica de $|x-1| - 5$.

18.4.4. Ejemplo $|2x-1| - |x-3| - 3 < 0$

Analicemos ahora una desigualdad más complicada:

$$|2x-1| - |x-3| - 3 < 0 \tag{18.25}$$

El polinomio de primer valor absoluto tiene como raíz:

$$\begin{aligned} 2x-1 &= 0 \\ 2x &= 1 \\ x_1 &= \frac{1}{2} \end{aligned}$$

El polinomio del segundo valor absoluto tiene como raíz:

$$\begin{aligned} x-3 &= 0 \\ x_2 &= 3 \end{aligned}$$

De manera que se forman tres intervalos para x: $(-\infty, \frac{1}{2})$, $[\frac{1}{2}, 3)$ y $[3, \infty)$.

Consideremos ahora estos tres posibles intervalos:

- Intervalo $(-\infty, \frac{1}{2})$ equivalente a $x < \frac{1}{2}$. Con este valor de x, tenemos que $|2x-1| = -(2x-1)$ (por ser $(2x-1) < 0$) y $|x-3| = -(x-3)$ (por ser $(x-3) < 0$) y la desigualdad 18.25 se convierte en:

$$\begin{aligned} -(2x-1)-(-(x-3))-3 &< 0 \\ -2x+1+(x-3)-3 &< 0 \\ -2x+1+x-3-3 &< 0 \\ -x-5 &< 0 \\ -x-5+5 &< 0+5 \\ -x &< 5 \\ (-1)(-x) &> (-1)*5 \\ x &> -5 \end{aligned}$$

  De manera que x debe cumplir las dos condiciones: $(x > -5)$ y $(x < \frac{1}{2})$. Esto lo podemos escribir en forma compacta como: $-5 < x < \frac{1}{2}$ o bien como $x \in (-5, \frac{1}{2})$.

- Intervalo $[\frac{1}{2}, 3)$ equivalente a $\frac{1}{2} \leq x < 3$. Con este valor de x, tenemos que $|2x-1| = 2x-1$ (por ser $(2x-1) \geq 0$) y $|x-3| = -(x-3)$ (por ser $(x-3) < 0$) y la desigualdad 18.25 se convierte en:

$$\begin{aligned} (2x-1)-(-(x-3))-3 &< 0 \\ 2x-1+(x-3)-3 &< 0 \\ 2x-1+x-3-3 &< 0 \\ 3x-7 &< 0 \\ 3x-7+7 &< 0+7 \\ 3x &< 7 \\ \frac{1}{3}*(3x) &< \frac{1}{3}*7 \\ x &< \frac{7}{3} \end{aligned}$$

  De manera que x debe cumplir las dos condiciones: $(x < \frac{7}{3})$ y $\frac{1}{2} \leq x < 3$. Esto lo podemos escribir en forma compacta como: $\frac{1}{2} \leq x < \frac{7}{3}$ o bien como $x \in [\frac{1}{2}, \frac{7}{3})$.

- Intervalo $[3, \infty)$ equivalente a $x \geq 3$. Con este valor de x, tenemos que $|2x - 1| = 2x - 1$ (por ser $(2x - 1) \geq 0$) y $|x - 3| = (x - 3)$ (por ser $(x - 3) \geq 0$) y la desigualdad 18.25 se convierte en:

$$\begin{aligned} (2x-1)-(x-3)-3 &< 0 \\ 2x-1-x+3-3 &< 0 \\ x-1 &< 0 \\ x-1+1 &< 0+1 \\ x &< 1 \end{aligned}$$

  De manera que x debe cumplir las dos condiciones: $(x < 1)$ y $x \geq 3$. Podemos ver que no existe ningún valor de x, en este intervalo, que satisfaga simultáneamente estas dos desigualdades.

De manera que la solución completa es la unión de los dos conjuntos obtenidos: $x \in (-5, \frac{1}{2}) \cup [\frac{1}{2}, \frac{7}{3})$. En forma compacta tenemos que la solución de es $x \in (-5, \frac{7}{3})$. Podemos comprobar que este resultado es correcto al ver la gráfica de la figura 18.8.

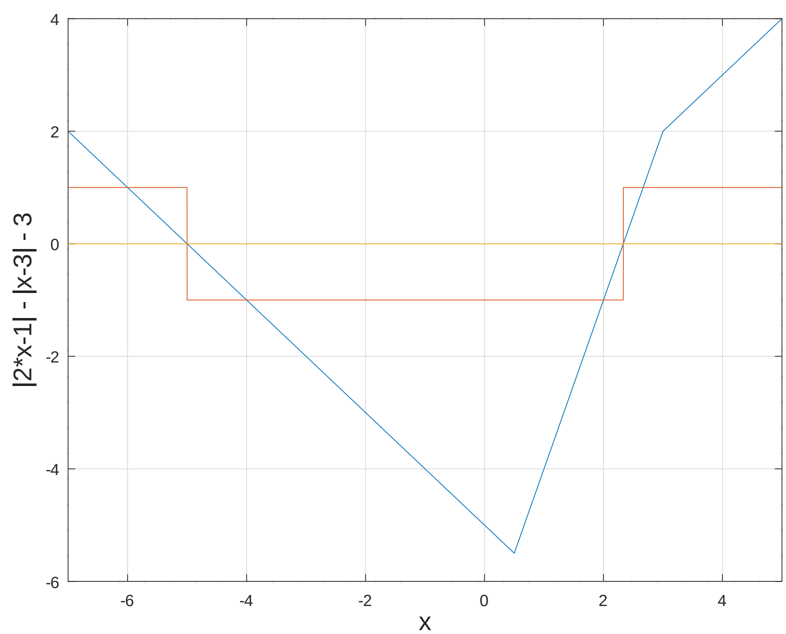


Figura 18.8: Gráfica de $|2x - 1| - |x - 3| - 3$.

18.5. Desigualdades con dos variables

Terminemos esta sección con un ejemplo de una desigualdad que involucra dos variables: x y y.

$$x + y \leq 1 \tag{18.26}$$

Para resolver esta desigualdad consideremos el caso donde ambos lados son iguales:

$$\begin{aligned} x + y &= 1 \\ y &= -x + 1 \end{aligned}$$

Teniendo en cuenta la ecuación de la recta: $y = mx + b$, tenemos que se trata de una recta con pendiente $m = -1$ y valor de $b = 1$. La pendiente tiene un ángulo de inclinación de $\theta = \arctan(m) = -45°$. Veamos un punto sobre esta recta: si $x = 0$, entonces tenemos que $y = -(0) + 1 = 1$; es decir, la recta pasa por el punto $P_1 = (0, 1)$. De la ecuación de la recta podemos inferir que también el punto $P_2 = (1, 0)$ corresponde a la recta. En la figura 18.9 se muestra en color negro la gráfica de esta línea.

Ahora bien, si consideramos un valor ligeramente menor que 1 en la ecuación de la recta, podemos tener por ejemplo:

$$x + y = 0.9$$

La cual corresponde a la recta $y = -x + 0.9$. Esta nueva recta tiene la misma pendiente, pero el valor de b es ligeramente menor que 1. Si dibujamos esta nueva recta, se ubica junto a la recta anterior (con $b = 1$), misma inclinación y tocando los puntos $(0.9, 0)$ y $(0, 0.9)$. El lector puede darse cuenta de que todas las posibles rectas con valores de $b < 1$ corresponden al área sombreada que se muestra en la figura 18.9. Es decir, todos los valores (x, y) de todos los puntos sombreados son soluciones de la desigualdad $x + y \leq 1$.

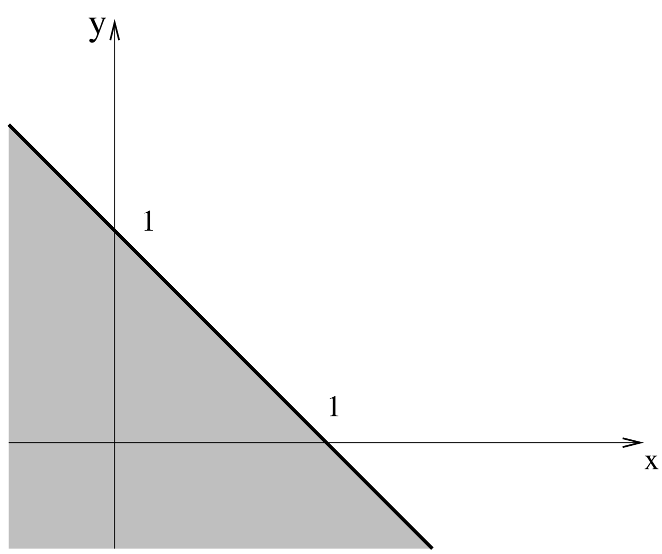


Figura 18.9: Gráfica de la desigualdad $x + y \leq 1$. La línea negra corresponde a $x + y = 1$ y la zona sombreada indican todos los posibles puntos que satisfacen la desigualdad.

18.6. Ejercicios propuestos

1. Exprese los intervalos de x correspondientes a las siguientes desigualdades:

   a) $(x < -1)$

   b) $(x > 10)$

c) $(x \geq -1) \wedge (x < 10)$
d) $(x < 5) \vee (x > 7)$
e) $(x > 5) \wedge (x \leq 4)$

2. Exprese los intervalos de x correspondientes a las siguientes desigualdades:

a) $(x > 2) \vee (x < 1)$
b) $(x \leq 1) \wedge (x \leq 2)$
c) $(x \leq 1) \vee (x \leq 2)$
d) $(x > 5) \wedge (x < 5)$
e) $(x < -1) \vee (x > 3)$

3. Exprese las desigualdades correspondiente a los intervalos siguientes de x:

a) $(-1, 2)$
b) $(-\infty, 0)$
c) $(-\infty, 0]$
d) $(-\infty, 5] \cup (6, 7)$
e) $(1, 2) \cup (2, 3) \cup (4, 5)$

4. Exprese las desigualdades correspondiente a los intervalos siguientes de x:

a) $(-\infty, -3) \cup (3, \infty)$
b) $(-\infty, 0) \cup (0, \infty)$
c) $(-\infty, 0) \cup [0, \infty)$
d) $(-\infty, \infty)$
e) $[3, 10] \cap [0, 4]$

5. Encuentre todos los posibles valores de x que satisfacen las siguientes desigualdades:

a) $2x - 1 < 5$
b) $-3x - 5 < x + 1$
c) $x^2 - 1 < 0$
d) $-x^2 + 1 < 0$
e) $x^2 + x < 0$

6. Encuentre todos los posibles valores de x que satisfacen las siguientes desigualdades:

a) $-x^2 + x < 1$
b) $x^3 + x^2 + x < -1$
c) $(2x + 1)(2x - 3)(x + 3) < 0$
d) $(x^2 - 1)(5x - 2)(2x + 4) < 0$
e) $(x^2 - 1)(x - 1) < -1$

7. Encuentre todos los posibles valores de x que satisfacen las siguientes desigualdades:
   a) $\frac{x}{x+1} < 0$
   b) $\frac{x}{x+1} < 1$
   c) $\frac{x-2}{(x+1)(x-1)} > 0$
   d) $\frac{x^2+1}{(x^2-1)(x-3)} < 0$
   e) $\frac{x^2+1}{x(x^2-1)(x-3)} < 0$
8. Encuentre todos los posibles valores de x que satisfacen las siguientes desigualdades:
   a) $\frac{x^2+1}{x(x^2-1)(x-3)} < 1$
   b) $\frac{x^2+1}{(x^3+4x)} < 0$
   c) $\frac{x}{x-1} \leq \frac{1}{x+3}$
   d) $\frac{x}{x^2-1} \leq \frac{1}{x^2-1}$
   e) $\frac{x^3-x+6}{(x^2-1)^2} < 0$
9. Encuentre todos los posibles valores de x que satisfacen las siguientes desigualdades:
   a) $|2x| - 1 < 5$
   b) $|x-1| - 2 < 0$
   c) $|2x-1| - 2 \geq 0$
   d) $|-3x-5| < x+4$
10. Encuentre todos los posibles valores de x que satisfacen las siguientes desigualdades:
    a) $|x+1| < |2x|$
    b) $|x^2-1| < 2$
    c) $|x^2+2x+1| < 3$
    d) $|\frac{x}{x^2-1}| < 3$

Capítulo 19

Evaluación 4

Resuelva los ejercicios propuestos, anotando clara y ordenadamente la secuencia de pasos que le lleva a la solución.

1. Encuentre el valor o valores de x que satisfacen la siguiente ecuación:

$$\frac{2x-6}{2(x-1)}\ \frac{1}{2x-4}-\frac{1}{4}=0$$

2. Un número entero positivo n se compone de dos dígitos. Encuentre el número n si:

   a) La suma de los dos dígitos es 10 y el número original n es igual a 26 más el doble del número que contiene los dígitos intercambiados.

   b) La suma de sus dígitos es 16 y al dividir el dígito que corresponde a las decenas entre el dígito que corresponde a las unidades el cociente es 1 y el residuo es 2.

3. La diferencia de las edades de dos personas es igual a una quinta parte de su suma. Si además sabemos que el doble de edad de la persona mayor más la edad de la persona menor es 160. Determine las edades de las dos personas. Para resolver este ejercicio forme el sistema de ecuaciones y utilice el método de Gauss-Jordan para encontrar la solución.

4. Una familia tiene dos hermanos menores y dos hermanas mayores. Al dividir la suma de las edades de las hermanas entre la suma de las edades de los hermanos el cociente es 2 y el residuo es 5. Si además se conoce que la edad del hermano menor equivale a las dos terceras partes de la edad del hermano mayor, la edad de la hermana menor equivale a cinco sextas partes de la edad de la hermana mayor y la edad del hermano menor equivale a un tercio de la edad de la hermana mayor, determine las edades de los 4 hermanos. Formule el sistema de ecuaciones que representa este problema y determine las edades pedidas utilizando la inversa de una matriz.

5. En los siguientes sistemas de ecuaciones, determine para qué valores de K el sistema:

   - No tiene solución.
   - Tiene un número infinito de soluciones. Encuentre todos los posibles valores para x y y.
   - Tiene solución única. Encuentre los valores únicos de x y de y.

a)

$$\begin{aligned} 2x + 4y &= 10 \\ 3x - 5y &= -6K \end{aligned}$$

b)

$$\begin{array}{lll} x & +Ky & = 3 \\ 2x & -2y & = -6K \end{array}$$

6. Determine el polinomio que tiene las siguientes raíces: $x_1 = 0$, $x_2 = \sqrt{-4}$, $x_3 = -\sqrt{-4}$, $x_4 = 2 + \sqrt{-9}$, $x_5 = 2 - \sqrt{-9}$.

7. Encuentre el o los intervalos de los números reales en los cuales se cumple la siguiente desigualdad, utilizando el método de los intervalos:
$$\frac{3x + 3}{4x^2 - 9} \geq x$$

Referencias

Aguilar-Márques, A., Bravo-Vázquez, F. V., Gallegos-Ruiz, H. A., Cerón-Villegas, M., and Reyes-Figueroa, R. (2016). *Álgebra*. Editorial Pearson, 4 edition.

Anfossi, A. and Flores Mayer, M. (1930). *Álgebra Estudiante*. Editorial Progresso.

Eaton, J. W., Bateman, D., Hauberg, S., and Wehbring, R. (2019). *GNU Octave version 5.2.0 manual: a high-level interactive language for numerical computations*.

Edmiston, M. C. (1991). *Acertijos de Merlín*. Selector, S.A. de C.V.

Gardner, M. (1981). *Mathematical Circus*. Vintage Books, Random House, New York.

Moreno Aranda, J. L. (2002). *Álgebra*. Editorial McGrawHill.

Stewart, I. (2016). *Números increíbles*. Editorial Crítica.

Apéndice A

Aprovechando la tecnología

Bajo la premisa de que debemos aprovechar la tecnología para facilitar el aprendizaje, se presenta un programa de computadora llamado **Octave** muy frecuentemente utilizado para realizar cálculos numéricos.

Con Octave se pueden realizar fácilmente cálculos matemáticos básicos o complicados, comúnmente requeridos en estudios de nivel básico, medio o superior. Adicionalmente puede ser utilizado como un lenguaje de programación de alto nivel para realizar procesamientos de datos en forma automatizada. Octave es utilizado para la solución de problemas que involucran ecuaciones lineales y no lineales, en álgebra lineal numérica, en análisis estadísticos y para realizar muchos otros experimentos numéricos.

El programa Octave es distribuido libremente, en forma gratuita, bajo la licencia GNU (Del inglés "General Public License") por la Fundación de Software Libre (Eaton et al., 2019).

A.1. Instalación de Octave

El programa Octave se puede utilizar en línea, usando algún navegador de Internet, o bien se puede instalar en nuestra computadora, como veremos a continuación.

A.1.1. Utilizando Octave en línea

Si tenemos una conexión a Internet, sea en nuestra computadora de escritorio, computadora portátil, o inclusive en los teléfonos inteligentes, podemos utilizar alguno de los navegadores de Internet (Mozilla Firefox, Google Chrome, Opera, Safari, Internet Explorer, etc.) para utilizar Octave en línea.

Una vez en el navegador podemos buscar por las palabras clave: "Octave en línea" y el buscador nos llevará directamente al sitio de Octave en línea. También se puede acceder a través de los siguientes enlaces:

- `https://octave-online.net/`
- `https://www.tutorialspoint.com/execute_matlab_online.php`
- `https://rextester.com/l/octave_online_compiler`
- `https://www.jdoodle.com/execute-octave-matlab-online/`

Si nos vamos al enlace `https://octave-online.net/`, se presenta un ventana como la mostrada en la figura A.1. En la parte inferior de la ventana, justo donde indica el letrero "Octave Command Prompt", se encuentra el lugar donde podemos introducir los cálculos numéricos que queremos, justo después del indicador "≫". En la parte izquierda se mostrarán las variables que vayamos utilizando (las cuales veremos más adelante), mientras que en la parte arriba del indicador "≫" se mostrarán los resultados de las operaciones.

Figura A.1: El programa Octave en línea a través de un navegador de Internet.

A.1.2. En computadora personal

El programa Octave puede ser instalado en una computadora personal, dependiendo del sistema operativo que utilice nuestra computadora:

- **Sistema operativo Linux**. Existen versiones GNU Octave para todas las distribuciones del sistema operativo Linux: Debian, Ubuntu, Fedora, Gentoo, openSUSE, etc. En la distribución Ubuntu y Debian basta con abrir una terminal de comandos (presionando simultáneamente las teclas Ctrl, Alt y T) y escribir el siguiente comando para instalarlo:

```
$ sudo apt-get install octave
```

- **Sistema operativo macOS**. GNU Octave para macOS se encuentra disponible para su instalación utilizando alguno de los administradores de paquetes tales como Fink, MacPorts, y Homebrew. Para mayor información sobre el proceso de instalación en macOS se puede consultar el siguiente enlace:

  `https://wiki.octave.org/Octave_for_MacOS_X`.

- **Sistemas operativos BSD**. Tanto FreeBSD como OpenBSD tienen paquetes binarios para instalar Octave. Ingresando como usuario root, se puede instalar con el siguiente comando en una terminal:

```
$ sudo pkg_add -r octave
```

- **Sistema operativo Windows**. La forma más sencilla de instalar Octave en Windows es utilizar el instalador de Windows y seguir los pasos que se indican. Se puede descargar el archivo ejecutable del instalador de alguno de los siguientes sitios:
  - https://www.gnu.org/software/octave/download.html
  - https://ftp.gnu.org/gnu/octave/windows/

A.2. Primeros pasos en Octave

A.2.1. Usando la interfaz de usuario

Cuando se ha instalado Octave en nuestra computadora, es posible trabajar a través de una interfaz de usuario gráfica (comúnmente conocida como GUI, por sus siglas en Inglés “Graphics User Interface”) o por medio de una terminal de línea de comandos (también conocida como CLI, por sus siglas en Inglés “Command Line Interface”).

Trabajando con la Interfaz de Usuario Gráfica

Para acceder a la interfaz gráfica de usuario de Octave, podemos identificar el icono de la aplicación y a través de un doble clic con el ratón abrir su interfaz gráfica. La figura A.2 nos muestra el icono de Octave que permite su ejecución cuando es instalado en nuestra computadora.

Figura A.2: Icono que representa al programa Octave y que inicia su GUI.

La ventana de Octave, mostrada en la Figura A.3, consta de las siguientes partes o regiones principales:

- Barra de herramientas y menú de la ventana. Esta región en la parte superior está marcada por el rectángulo verde y contiene las operaciones comunes para manipular archivos, editar, etc.
- Navegador de archivos. Esta región está señalada por el rectángulo rojo y permite la selección de algún archivo de comandos (son archivos con la extensión “.m”).
- Espacio de trabajo. Esta región está señalada en azul y tiene la etiqueta “Workspace” y proporciona información sobre las variables utilizadas.

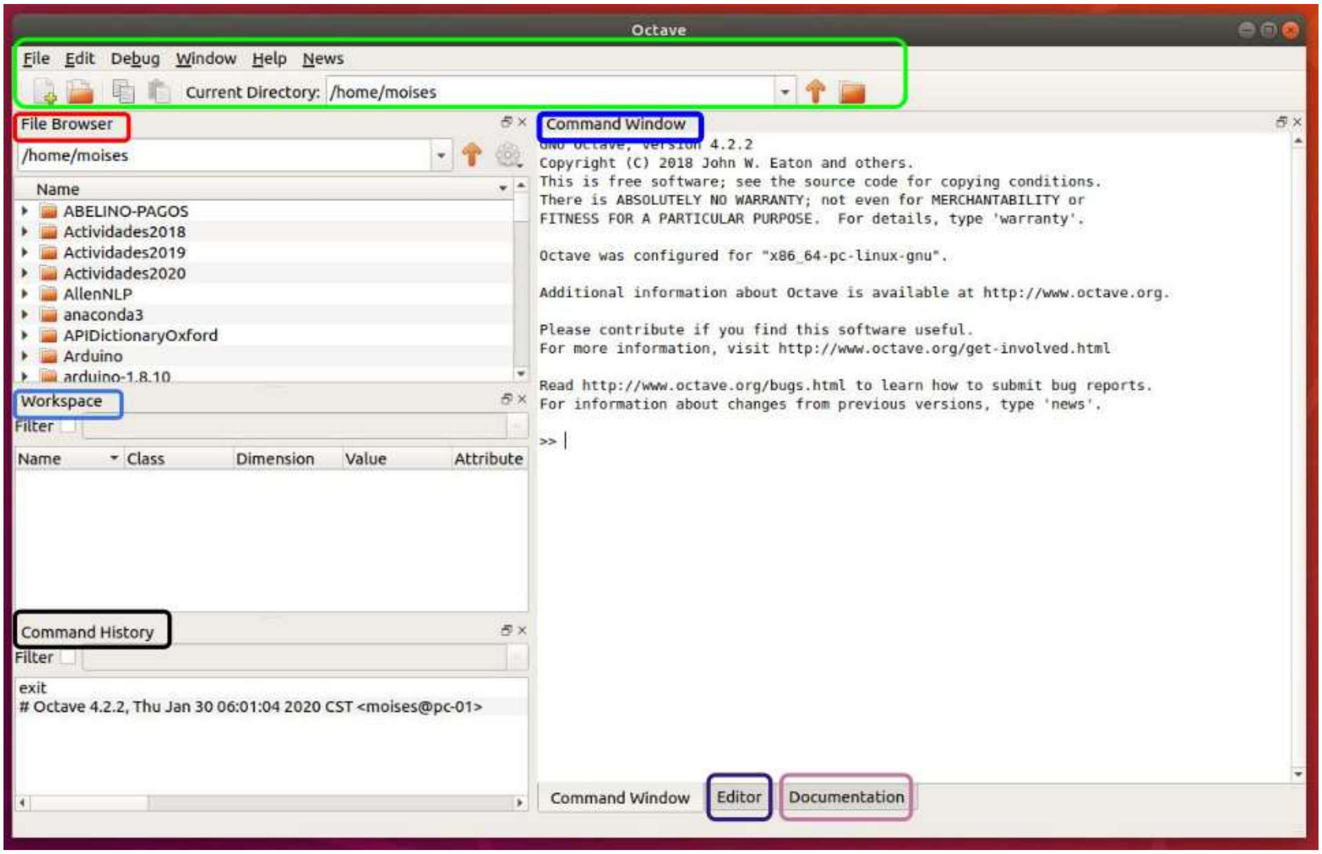


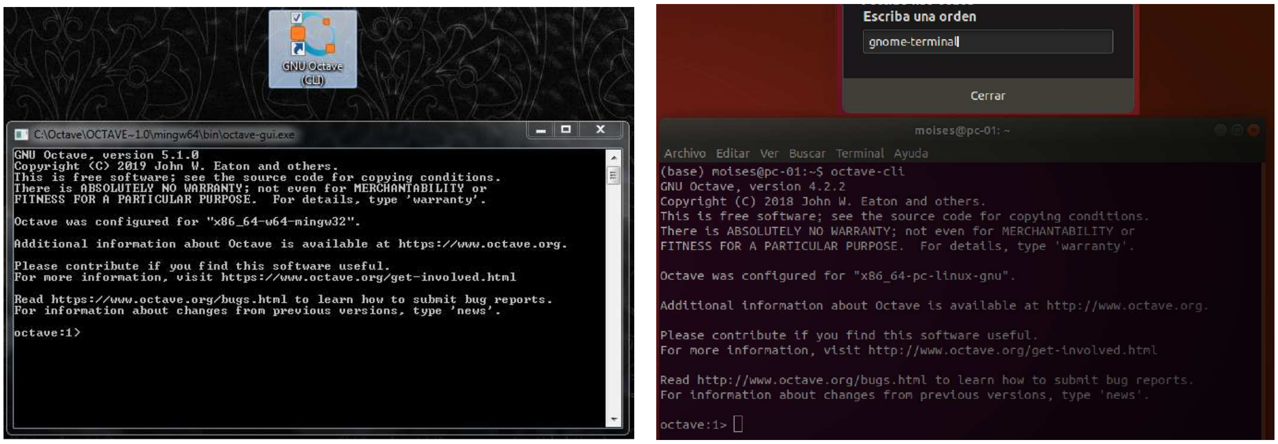
Figura A.3: Ventana de la GUI para Octave. Se indican mediante rectángulos las partes principales de Octave en la GUI.

- Historia de comandos. Esta región está indicada por el rectángulo que encierra “Command History” y proporciona información sobre los comandos que ha ingresado el usuario.
- Ventana de Comandos. Esta región está señalada por el rectángulo azul y contiene el indicador “$\gg$” que permite al usuario ingresar las operaciones numéricas que desea realizar.
- Editor de texto. En la parte inferior aparece una etiqueta de “Editor” que se utiliza para accesar un editor de texto para la escritura de programas para Octave.
- Documentación del software. También en la parte inferior aparece una etiqueta de “Documentation” que se utiliza para ver la documentación de Octave.

Usando la interfaz de línea de comandos

La figura A.4 muestra la interfaz de línea de comandos de Octave tanto en el sistema operativo Windows como en Linux. A continuación se describe como ejecutar el software en estos sistemas operativos:

1. **Windows**. En el sistema operativo Windows, por lo general se instalan dos iconos de Octave en el escritorio: uno con la leyenda “GNU Octave (GUI)” y otro con la leyenda “GNU Octave (CLI)”. Al emplear el icono



(a) Windows (b) Linux

Figura A.4: Ventana de la CLI de Octave.

con la terminación (CLI) nos aparece una terminal de comandos de Octave (figura A.4a).

2. **Linux**. En Linux es necesario abrir una terminal de comandos del sistema operativo, presionando simultáneamente las teclas: Ctrl, Alt y t; y después escribir en la terminal el comando: “octave-cli” seguido de la tecla Enter. Una segunda opción para abrir la terminal de comandos es presionar simultáneamente las teclas: Alt y F2; y en la ventana de diálogo que indica “Ejecutar una orden” escribir el comando “gnome-terminal” seguido de la tecla Enter. La Figura A.4b muestra la segunda forma para abrir una terminal.

A.2.2. Usando Octave para hacer operaciones numéricas

Ya sea que utilicemos la interfaz de usuario gráfica o de línea de comandos, podemos empezar a realizar operaciones numéricas. Por ejemplo si $a = 2 * 3$ y queremos calcular el valor de la variable `a`, debemos ingresar:

```
>> a = 2 * 3
a =  6
```

Podemos observar que Octave nos presenta el resultado: `a = 6` . El resultado de la operación de multiplicación se guardó en la **variable** `a`. Si queremos restarle a la variable `a` dos unidades, ingresamos:

```
>> a = a - 2
a =  4
```

En este caso se realiza la operación del lado derecho del “=” teniendo en cuenta que la variable `a` tiene un valor previo de 6, de manera que el resultado de la resta (4) se almacena en la variable `a`. Si queremos simplemente saber el valor de la variable `a`, ingresamos:

```
>> a
a =  4
```

Octave aplica la jerarquía de operaciones del álgebra. Por ejemplo, si tenemos que $b = 1 + 2 * 3$, $c = -5^2$, $d = 1 + 9/3$ y $k = 10^{1+2}$ Octave nos da los resultados esperados:

```
>> b = 1 + 2 * 3
b =  7
>> c = - 5^2
c =  -25
>> d = 1 + 9/3
d =  4
>> k = 10^(1 + 2)
k =  1000
```

De manera que +, -, *, / y ^ , tienen el mismo sentido que en álgebra: suma, resta, multiplicación, división y potencia, respectivamente. Si solamente colocamos operaciones numéricas, el resultado se guarda en una variable especial llamada `ans` (del inglés "answer", respuesta) como podemos observar en el siguiente ejemplo:

```
>> 5 * 6
ans =  30
```

Finalmente, si deseamos calcular la raíz cuadrada de 25, lo podemos hacer de dos formas: elevando a 25 a la potencia $\frac{1}{2}$, o bien utilizando la función `sqrt`:

```
>> 25 ^ (1/2)
ans =  5
>> sqrt(25)
ans =  5
```

Octave tiene otras funciones matemáticas, que se irán presentando en varios capítulos del libro.

Conociendo más sobre Octave

Si se desea que una expresión continúe en la línea siguiente, hay que introducir tres puntos (`...`) antes de presionar la tecla Enter. Entonces se podrá continuar escribiendo el resto de la expresión y al finalizar presionar Enter, como en el ejemplo siguiente:

```
>> 1 + 2 + ...
3
ans =  6
```

También se pueden incluir varias expresiones en la misma línea separándolas por comas (,). Octave calcula los resultados y los presenta, como en el siguiente ejemplo que calcula las primeras potencias de 2.

```
>> 2^1, 2^2, 2^3, 2^4
ans =  2
ans =  4
ans =  8
ans =  16
```

Si una expresión termina en punto y coma (;) su resultado no se presenta, como en el siguiente ejemplo:

```
>> t = 2;
>> a = t * 5
a =  10
```

A.2.3. Evaluando expresiones

Si queremos, por ejemplo, evaluar la expresión algebraica siguiente:

$$y = \frac{9}{17}\,x - \frac{1.33 \times 1200 + 9x}{19.37}$$

para $x = 1.5$, seguimos estos pasos:

1. Crear la variable x y asignarle el valor para el cual deseamos obtener el resultado.

```
>> x=1.5
x =  1.5000
```

2. Escribir la expresión algebraica cuidando la prioridad de los operadores aritméticos, introduciendo paréntesis en donde sea necesario.

```
>> y = 9/17 * x - (1.33 * 1200 + 9*x)/19.37
y =  -82.298
```

Para evaluar la misma expresión con otro valor, se asigna el nuevo valor a la variable `x`, se presiona la tecla de flecha hacia arriba hasta tener en la línea de comandos (“>>”) la expresión de calculo de la variable `y` y entonces se presiona la tecla Enter para calcular el nuevo resultado.

A.2.4. Vectores

En Octave un vector nos indica **una secuencia de valores** que se guardan en una variable. Por ejemplo, si queremos guardar la velocidad de un automóvil, especificando una rapidez de 75 Km/h con una dirección de 270 grados, con respecto a cierto sistema de referencia, la secuencia de valores que necesitamos es: [75, 270].

En Octave un vector se representa por el conjunto de valores separados por una coma (,) o un espacio y encerrados dentro de los caracteres `[ ]`. Para nuestro ejemplo del automóvil tenemos:

```
>> vecAuto = [75, 270]
vecAuto =
    75   270
```

Si se hace necesario cambiar las unidades de rapidez, por ejemplo expresarla en metros por segundo, podemos cambiar el primer valor de la secuencia, de la siguiente manera:

```
>> vecAuto(1) = 75*(1000/3600)
vecAuto =
    20.833   270.000
```

Si ahora queremos cambiar el segundo elemento de la secuencia, el ángulo, por el valor de 90, lo hacemos de la siguiente manera:

```
>> vecAuto(2) = 90
vecAuto =
    20.833   90.000
```

A.2.5. Vectores con incrementos constantes en sus valores

Octave nos permite generar vectores con valores que tienen un incremento constante con respecto al valor precedente. Por ejemplo en el siguiente ejemplo se almacena un vector con los 10 dígitos en la variable `d`:

```
>> d = [0:9]
d =
   0   1   2   3   4   5   6   7   8   9
```

El primer número entre los paréntesis especifica el valor del primer elemento y el segundo define el último elemento, y los valores se generan agregando una unidad para formar el valor siguiente. Si se desea agregar otro valor diferente del 1 para formar el valor siguiente, lo hacemos de la siguiente manera:

```
>> d = [9:-1:0]
d =
   9   8   7   6   5   4   3   2   1   0
>> x = [0:0.1:0.5]
x =
   0.00000   0.10000   0.20000   0.30000   0.40000   0.50000
```

A.2.6. Operaciones elemento a elemento entre vectores

Considere los siguientes vectores: `a`, `b` y la suma de ellos para formar el vector `c`:

```
>> a = [0 1 2 3 4 5];
>> b = [2 2 2 2 2 2];
>> c = a .+ b
c =
   2   3   4   5   6   7
```

Ocurrió que el primer elemento del vector `a` se sumó con el primer elemento del vector `b` para formar el primer elemento del vector `c` (es decir $c(1) = 0+2$), el segundo elemento del vector `a` se sumó con el segundo elemento del vector `b` para formar el segundo elemento del vector `c` ($c(2) = 1 + 2$), y así sucesivamente hasta formar el último elemento del vector `c` ($c(6) = 5+2$). Recuerde que haber terminado el comando con punto y coma inhibió la presentación del resultado guardado.

Ahora veamos como se realiza la operación de resta entre vectores:

```
>> a = [0 1 2 3 4 5];
>> b = [2 2 2 2 2 2];
>> c = a .- b
c =
   -2   -1   0   1   2   3
```

En este caso se realizó: $c(1) = 0 - 2,\ c(2) = 1 - 2,\ \ldots, c(6) = 5 - 2$. Lo miso ocurre con la multiplicación elemento a elemento entre vectores:

```
>> a = [0 1 2 3 4 5];
>> b = [2 2 2 2 2 2];
>> c = a .* b
c =
   0   2   4   6   8   10
```

En este caso se realizó: $c(1) = 0 * 2,\ c(2) = 1 * 2,\ \ldots, c(6) = 5 * 2$. Le toca el turno ahora al operador de división elemento a elemento entre vectores:

```
>> a = [0 1 2 3 4 5];
>> b = [2 2 2 2 2 2];
>> c = a ./ b
c =
   0.00000   0.50000   1.00000   1.50000   2.00000   2.50000
```

En este caso se realizó: $c(1) = 0/2,\ c(2) = 1/2,\ \ldots, c(6) = 5/2$. Finalmente veamos el operador de elevar a una potencia elemento a elemento entre vectores:

```
>> a = [0 1 2 3 4 5];
>> b = [2 2 2 2 2 2];
>> c = a .^ b
c =
    0    1    4    9   16   25
>> d = b .^ a
d =
    1    2    4    8   16   32
```

En este caso se realizó: $c(1) = 0^2,\ c(2) = 1^2,\ \ldots, c(6) = 5^2$. Es decir, el vector `c` contiene los cuadrados de cada elemento del vector `a`. De forma similar, el vector `d` contiene las primeras potencias de 2.

Las funciones de Octave también pueden operar con vectores. Veamos, por ejemplo, la función `sqrt` utilizada para obtener la raíz cuadrada de un vector de números:

```
>> a = [4 9 16 25 36 49 64 81];
>> sqrt(a)
ans =
   2   3   4   5   6   7   8   9
```

Operaciones elemento a elemento de vectores. Sean los vectores `a` y `b` de la misma longitud. Las siguientes operaciones se aplican sobre cada elemento de los vectores involucrados:

- `c = a .+ b`. Operación: $c(i) = a(i) + b(i)$, para todo elemento i.
- `c = a .- b`. Operación: $c(i) = a(i) - b(i)$, para todo elemento i.
- `c = a .* b`. Operación: $c(i) = a(i) * b(i)$, para todo elemento i.
- `c = a ./ b`. Operación: $c(i) = a(i)/b(i)$, para todo elemento i.
- `c = a .^ b`. Operación: $c(i) = a(i)^\wedge b(i)$, para todo elemento i.
- `c = sqrt(a)`. Operación: $c(i) = \text{sqrt}(a(i))$, para todo elemento i.

Veamos ahora que sucede cuando una de las variables contiene un número y no un vector. Por ejemplo:

```
>> a = [0 1 2 3 4 5];
>> c = a .+ 2
c =
   2   3   4   5   6   7
>> c = a .- 2
c =
   -2   -1   0   1   2   3
>> c = a .* 2
c =
   0   2   4   6   8   10
>> c = a ./ 2
c =
   0.00000   0.50000   1.00000   1.50000   2.00000   2.50000
>> c = a .^ 2
c =
    0    1    4    9   16   25
```

¡Se generan los mismos resultados que antes! cuando teníamos el vector `b` del mismo tamaño del vector `a` y todos sus elementos eran iguales a 2. Es decir, Octave **convierte el número a un vector con todos sus elementos iguales al número y entonces realiza la operación elemento a elemento**.

A.2.7. Ejemplo de conversión de grados Celsius a Fahrenheit

Si deseamos convertir una temperatura en grados Celsius C a la correspondiente temperatura en grados Fahrenheit, nos apoyamos de la siguiente fórmula:

$$F = \frac{9}{5} * C + 32$$

Consideremos el problema de mostrar los valores equivalentes de grados Fahrenheit de -5 grados Celcius a 5 grados Celcius en incrementos de un grado.

Resolvemos este problema de manera muy sencilla en Octave:

```
>> C = [-5:5];
>> F = 9/5 .* C +32
F =
 Columns 1 through 9:

   23.000   24.800   26.600   28.400   30.200   32.000   33.800   35.600   37.400

 Columns 10 and 11:

   39.200   41.000
```

Como el vector `F` es un vector de un renglón con 11 columnas, se presentan inicialmente las primeras 9 columnas y después las restantes.

Si deseamos convertir un vector renglón a un vector columna, simplemente se agrega el caracter ' después del nombre del vector. Por ejemplo:

```
>> C = [-5:5];
>> C = C';
```

```
>> F = 9/5 .* C +32
F =
   23.000
   24.800
   26.600
   28.400
   30.200
   32.000
   33.800
   35.600
   37.400
   39.200
   41.000
```

Finalmente, si quisiéramos crear un vector columna desde el inicio, lo podemos hacer utilizando signos de punto y coma, como se indica a continuación:

```
>> a = [1; 2; 3; 4]
a =
   1
   2
   3
   4
```

A.3. Graficación básica

Veamos cómo graficar con Octave mediante algunos ejemplos.

A.3.1. Gráfica de velocidad contra tiempo

Supongamos que una partícula recorre 1000 unidades de distancia en cierto tiempo t, de manera que su velocidad se puede calcular como:

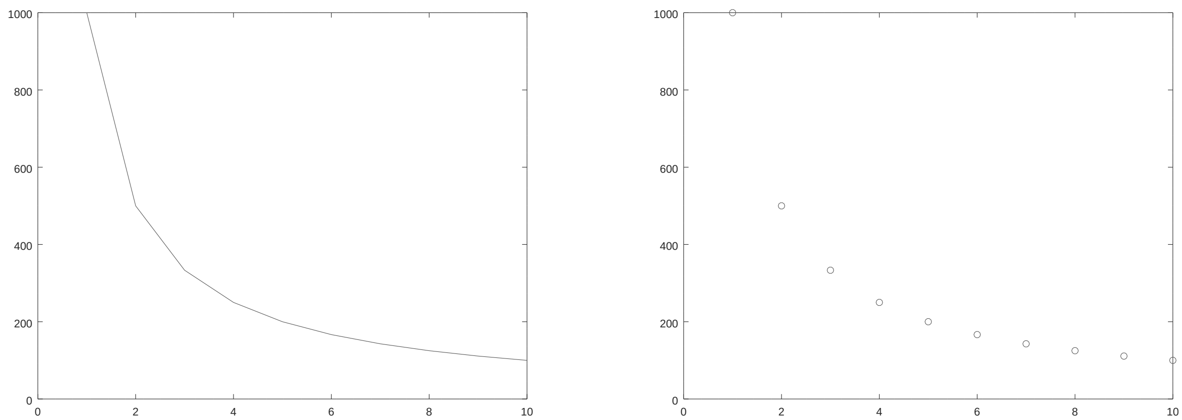
$$v = \frac{1000}{t}$$

Si estamos interesados en graficar la variable v cuando t toma valores de 1 a 10, en incrementos de un segundo, los siguientes comandos de Octave resuelven este problema.

```
>> t = [1:10];
>> v = 1000 ./ t;
>> plot(t,v)
```

La función `plot` grafica los puntos $(t(i), v(i))$ (para todos los posibles valores de i, iniciando en 1) en un plano cartesiano, como se muestra en la figura A.5a. Observe que los puntos están conectados mediante líneas rectas. Si en lugar de haber utilizado `plot(t,v)` se emplea `plot(t,v,'o')` se obtiene la gráfica mostrada en la figura A.5b, donde los puntos se han marcado mediante pequeños círculos.

Las instrucciones de Octave para colocar las etiquetas a los ejes del plano cartesiano son las siguientes:



(a) plot(t,v) (b) plot(t,v,'o')

Figura A.5: Gráfica de velocidad (eje y) contra tiempo (eje x).

```
>> xlabel('Secuencia de valores de la variable tiempo (t)')
>> ylabel('Valores obtenidos de la variable velocidad (v)')
```

Para colocar un título a la gráfica, se hace a través de la instrucción `title` de Octave:

```
>> title('Velocidad vs tiempo a una distancia constante de 1000')
```

La Figura A.6 nos muestra la gráfica que resulta al agregar las etiquetas a los ejes del plano cartesiano y el título. El lector interesado en conocer más puede consultar la ayuda de Octave acerca de la función `plot`, mediante:

```
>>help plot
'plot' is a function from the file /usr/share/octave/4.2.2/m/plot/draw/plot.m

 -- plot (Y)
 -- plot (X, Y)
 -- plot (X, Y, FMT)
 -- plot (..., PROPERTY, VALUE, ...)
 -- plot (X1, Y1, ..., XN, YN)
...
```

Octave tiene una gran cantidad de opciones de graficación, desde combinar varias curvas, utilizar colores, trazos, etc.

A.3.2. Gráfica de un polinomio

Si deseamos graficar el siguiente polinomio:

$$p(x) = x^3 - x^2 - 10 * x + 10$$

En un rango de valores de $-5 \leq x \leq 5$, lo podemos realizar de esta manera:

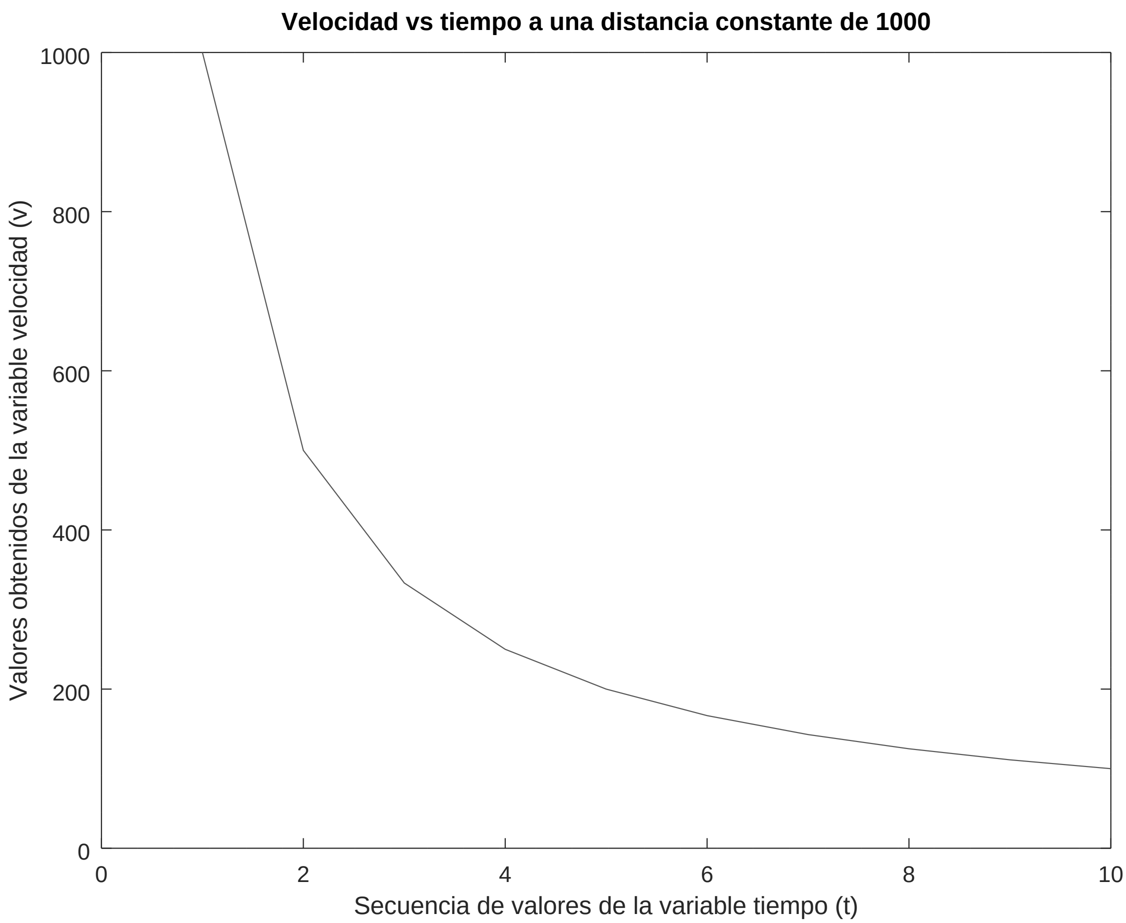


Figura A.6: Gráfica con título y etiquetas en los ejes.

```
>> x = [-5:0.01:5];
>> P = x.^3 .- x.^2 .- 10*x .+ 10;
>> plot(x,P);
>> xlabel('x')
>> ylabel('P(x)')
>> title('Grafica del polinomio P(x)')
>> grid on
>>
```

La grafica obtenida se muestra en la figura A.7. Observe que el efecto de `grid on` fue desplegar una malla sobre la gráfica, de manera que podemos observar con claridad cuando el polinomio cruza el eje x (es decir las raíces del polinomio).

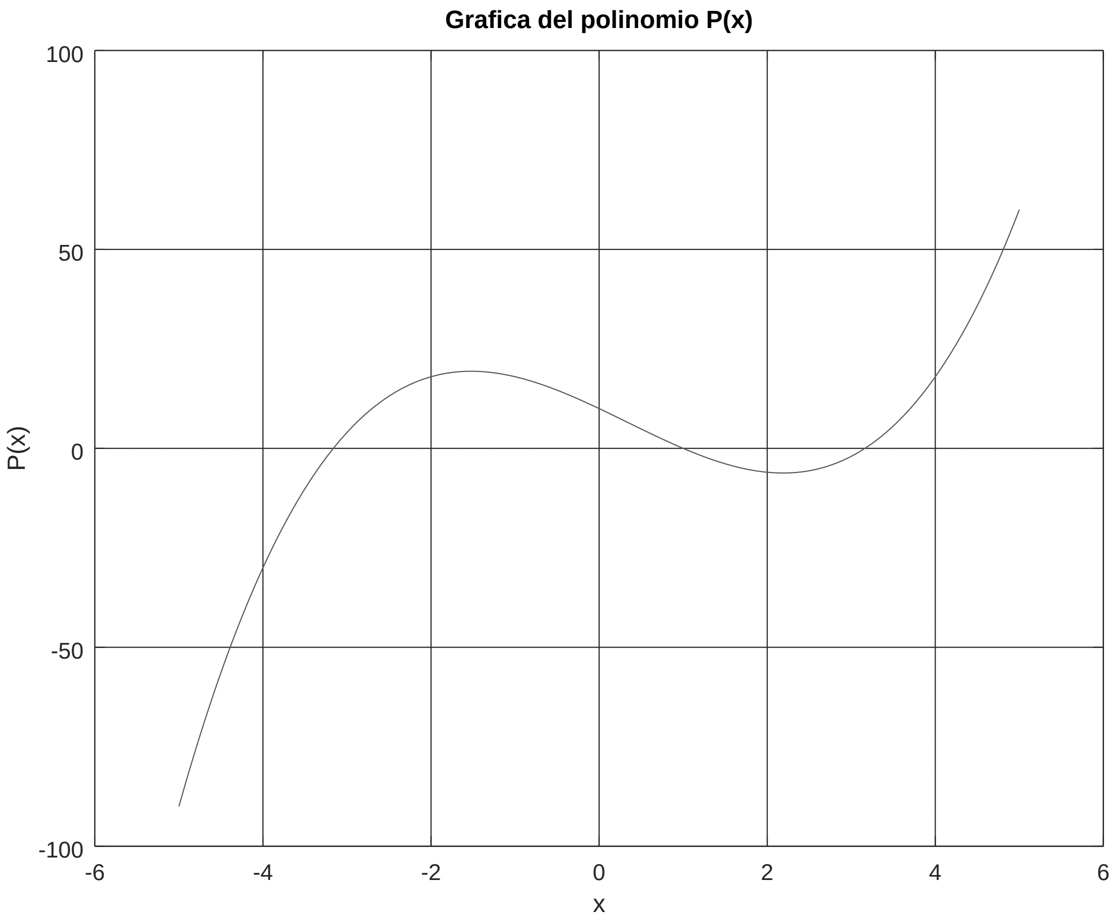


Figura A.7: Gráfica de un polinomio.

A.4. Guardando secuencias de comandos en un archivo

A medida que vayamos avanzando en Octave surgirá la necesidad de poder guardar secuencias de comandos útiles, para poderlos recuperar rápidamente.

Lo que necesitaremos será crear archivos de texto, bien sea utilizando el editor de textos de nuestra preferencia, o bien mediante el `Editor` en la interfaz de usuario gráfica de Octave.

Por ejemplo, si creamos un archivo de texto llamado `graficaPolinomio.m`, en el directorio desde el cual se inició Octave, con el siguiente contenido:

```
x = [-5:0.01:5];
P = x.^3 .- x.^2 .- 10*x .+ 10;
plot(x,P);
xlabel('x')
ylabel('P(x)')
title('Grafica del polinomio P(x)')
grid on
```

Podemos llamarlo de Octave, para que se presente nuevamente la gráfica del polinomio.

```
>> graficaPolinomio
```

Observe que solamente se requiere el nombre del archivo sin la extensión `.m`.

El lector interesado puede profundizar en Octave aprovechando los tutoriales, manuales y libros que están disponibles en Internet.

A.5. Ejercicios

1. Obtener los valores de la variable dependiente r, que corresponden a los valores de $x_1 = 1$, $x_2 = 2$, y $x_3 = 3$ en la siguiente expresión:

$$r = \frac{-10 - \sqrt{(-10)^2 - (4)(5)x}}{(2)(5)}$$

2. Determine los valores de y correspondientes a los valores de t desde 1 hasta 10, en incrementos unitarios, en la siguiente expresión:

$$y = \frac{1}{2}\, a\, t^2$$

   donde $a = 9.8$.

3. Grafique la siguiente línea recta definida por la ecuación:

$$y = 2x + 3$$

   Considerando valores de x que inician en 0 y terminan en 10, en incrementos de 0.1. Incluya una malla en la gráfica, para apreciar mejor el comportamiento de la recta.

4. Grafique la ecuación de la raíz cuadrada positiva de los números de 1 al 100, en incrementos unitarios. Incluya una malla en la gráfica, para apreciar mejor el comportamiento de esta función.

5. En el capítulo de trigonometría se presenta la función trigonométrica `sin`, que recibe un ángulo en radianes. Grafique la función:

$$y = \sin(x)$$

   Considerando valores de x que inician en 0 y terminan en $2 * pi$, en incrementos de 0.1. Recuerde que en Octave `pi=3.1416`.

6. En el capítulo de trigonometría también se presenta la función trigonométrica `cos`, que recibe un ángulo en radianes. Grafique la función:

$$y = \cos(x)$$

   Considerando valores de x que inician en 0 y terminan en $5 * 2 *$ pi, en incrementos de 0.1. Recuerde que en Octave `pi=3.1416`.

7. Un triángulo está definido por los tres puntos siguientes: $P_1 = (2, 2)$, $P_2 = (6, 2)$ y $P_3 = (3, 5)$. Dibuje este triángulo en el plano cartesiano y determine su perímetro. En la gráfica utilice, además de la opción `grid on`, la opción `axis equal` para tener iguales unidades de distancia en los ejes de la gráfica.

8. Los puntos (x, y) que forman un circunferencia de radio r con centro en el origen, están definidos por la expresión:

$$x^2 + y^2 = r^2$$

Si despejamos y tenemos:

$$y = \sqrt{r^2 - x^2}$$

Grafique los puntos de una circunferencia de radio $r = 5$, considerando valores de x en el intervalo: $-5 \leq x \leq 5$, en incrementos de 0.01 unidades. Para ello, considere dibujar las funciones siguientes, que consideran los dos valores de la raíz cuadrada:

$$\begin{aligned} y_1 &= +\sqrt{r^2 - x^2} \\ y_2 &= -\sqrt{r^2 - x^2} \end{aligned}$$

Utilice la opción `axis equal` para tener iguales unidades de distancia en los ejes de la gráfica. Después de llamar la primera vez a la función `plot`, ingrese el comando `hold on` para que la segunda llamada a la función plot se realice sobre la misma gráfica. Se deberá obtener una gráfica como la mostrada en la figura A.8.

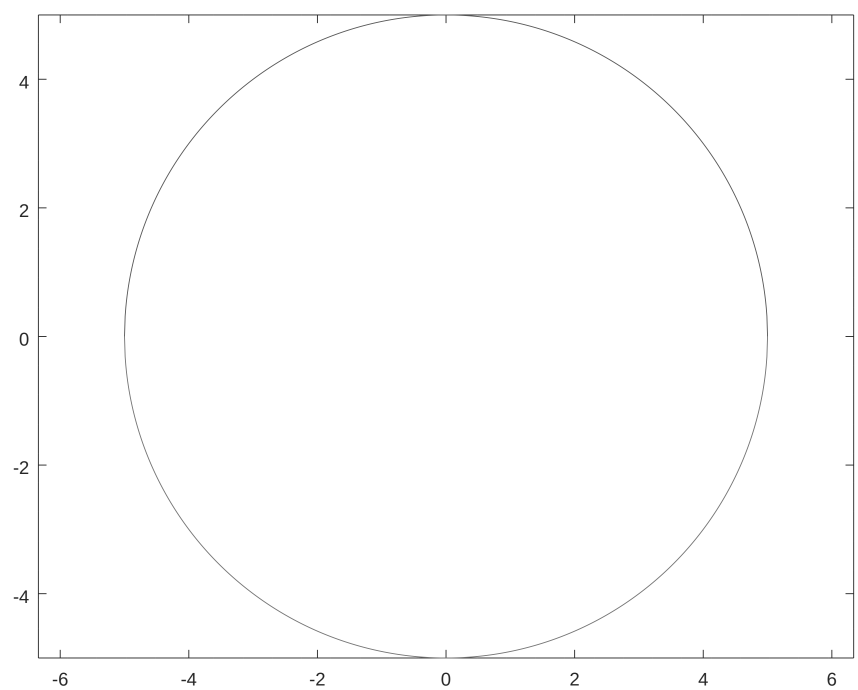


Figura A.8: Gráfica de un circunferencia de radio de 5 unidades centrada en el origen.

Apéndice B

La Pseudoinversa de una matriz

Vamos a abordar la solución de sistemas de ecuaciones con más ecuaciones que variables, a través del uso de la **matriz pseudoinversa**.

B.1. Vectores

Retomemos el tema de vectores, que ya hemos visto cuando abordamos el capítulo de números complejos. Un vector $\mathbf{v}$ de dos dimensiones se puede expresar como un vector columna de la siguiente forma:

$$\mathbf{v} = \begin{bmatrix} v_x \\ v_y \end{bmatrix}$$

La figura B.1 representa al vector $\mathbf{v}$ por un punto del plano x, y, definido por sus coordenadas v_x y v_y, o bien por su magnitud r y su ángulo θ con respecto al eje x. La magnitud de un vector, denotada también como $|\mathbf{v}|$, se puede calcular con el Teorema de Pitágoras y el ángulo con la función arcotangente:

$$|\mathbf{v}| = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} \tag{B.1}$$

$$\theta = \arctan\left(\frac{v_y}{v_x}\right) \tag{B.2}$$

De manera que el vector $\mathbf{v}$ también se puede expresar en su forma polar como $\mathbf{v} = |\mathbf{v}| \angle\theta$. Veamos a continuación algunas operaciones importantes en los vectores.

B.1.1. Producto punto de dos vectores

Sean los vectores $\mathbf{v}_1 = [v_{1x}\ v_{1y}]^t$ y $\mathbf{v}_2 = [v_{2x}\ v_{2y}]^t$, los cuales también se pueden expresar en su forma polar como $\mathbf{v}_1 = |\mathbf{v}_1| \angle\theta_1$ y $\mathbf{v}_2 = |\mathbf{v}_2| \angle\theta_2$.

El **producto punto de dos vectores**, denotado como $\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_2$, se define como sigue:

$$\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_2 = |\mathbf{v}_1||\mathbf{v}_2| \cos(\theta_2 - \theta_1) \tag{B.3}$$

Vamos a utilizar la identidad trigonométrica vista en la sección 9.3.4 para el coseno de una suma de ángulos:

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos(\beta)\cos(\alpha) - \sin(\beta)\sin(\alpha)$$

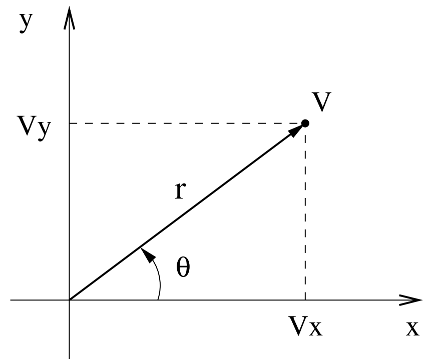


Figura B.1: El vector $\mathbf{v}$ representado en su forma polar por (r, θ).

En nuestro caso $\alpha = \theta_2$ y $\beta = -\theta_1$. Es decir:

$$\begin{aligned}
\cos(\theta_2 + (-\theta_1)) &= \cos(-\theta_1)\cos(\theta_2) - \sin(-\theta_1)\sin(\theta_2) \\
\cos(\theta_2 - \theta_1)) &= \cos(\theta_1)\cos(\theta_2) + \sin(\theta_1)\sin(\theta_2) \\
\cos(\theta_2 - \theta_1)) &= \frac{v_{1x}}{|\mathbf{v}_1|}\frac{v_{2x}}{|\mathbf{v}_2|} + \frac{v_{1y}}{|\mathbf{v}_1|}\frac{v_{2y}}{|\mathbf{v}_2|} \\
\cos(\theta_2 - \theta_1)) &= \frac{v_{1x}v_{2x} + v_{1y}v_{2y}}{|\mathbf{v}_1||\mathbf{v}_2|} \qquad \text{(B.4)}
\end{aligned}$$

El lector puede notar que se han utilizado las identidades trigonométricas: $\cos(-\theta) = \cos(\theta)$ y $\sin(-\theta) = -\sin(\theta)$. Si sustituimos la ecuación anterior en la ecuación B.3, tenemos:

$$\begin{aligned}
\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_2 &= |\mathbf{v}_1||\mathbf{v}_2|\cos(\theta_2 - \theta_1) \\
\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_2 &= |\mathbf{v}_1||\mathbf{v}_2|\frac{v_{1x}v_{2x} + v_{1y}v_{2y}}{|\mathbf{v}_1||\mathbf{v}_2|} \\
\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_2 &= v_{1x}v_{2x} + v_{1y}v_{2y} \\
\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_2 &= [v_{1x}\ v_{1y}] * \begin{bmatrix} v_{2x} \\ v_{2y} \end{bmatrix} \\
\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_2 &= \mathbf{v}_1^t * \mathbf{v}_2 \qquad \text{(B.5)}
\end{aligned}$$

Es importante resaltar que el producto punto de dos vectores es un escalar, un número.

El producto punto de dos vectores, denotado como $\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_2$, se puede calcular como el producto de la transpuesta de uno de los vectores por el otro vector.

$$\begin{aligned}
\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_2 &= |\mathbf{v}_1||\mathbf{v}_2|\cos(\theta_2 - \theta_1) \qquad \text{(B.6)} \\
\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_2 &= \mathbf{v}_1^t * \mathbf{v}_2 \qquad \text{(B.7)}
\end{aligned}$$

En el caso especial de que sea el mismo vector en la operación de producto punto, tenemos:

$$\begin{aligned}
\mathbf{v}\cdot\mathbf{v} &= |\mathbf{v}||\mathbf{v}|\cos(\theta-\theta) \\
\mathbf{v}\cdot\mathbf{v} &= |\mathbf{v}||\mathbf{v}|\cos(0) \\
\mathbf{v}\cdot\mathbf{v} &= |\mathbf{v}|^2
\end{aligned}$$

De manera que tenemos otra forma de calcular la magnitud de un vector.

La magnitud de un vector columna $\mathbf{v}$ se puede calcular como:

$$|\mathbf{v}| = \sqrt{\mathbf{v}\cdot\mathbf{v}} \tag{B.8}$$

$$|\mathbf{v}| = \sqrt{\mathbf{v}^t * \mathbf{v}} \tag{B.9}$$

B.1.2. Multiplicación de un escalar por un vector

Ya hemos visto que el producto de un escalar k por una matriz $\mathbf{A}_{m\times n}$, denotado como $k * \mathbf{A}$, se define como sigue:

$$\mathbf{B}_{m\times n} = k * \mathbf{A}_{m\times n} \tag{B.10}$$

donde los elementos de la nueva matriz $\mathbf{B}$ se calculan como:

$$b_{i,i} = k * a_{i,j} \tag{B.11}$$

En el caso especial que la matriz sea un vector renglón o renglón columna, cada componente del vector se multiplica por k. Por ejemplo si $k = 2$ y $\mathbf{v} = [1\ 2]^t$:

$$\begin{aligned}
k * \mathbf{v} &= 2 * \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} \\
k * \mathbf{v} &= \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

Veamos como se afecta la magnitud del nuevo vector $k * \mathbf{v}$, considerando el vector $\mathbf{v} = [v_x\ v_y]^t$, que tiene una magnitud $|\mathbf{v}|$ y ángulo θ,

$$\begin{aligned}
|k * \mathbf{v}| &= \sqrt{(k * v_x)^2 + (k * v_y)^2} \\
|k * \mathbf{v}| &= \sqrt{k^2 * v_x^2 + k^2 * v_y^2} \\
|k * \mathbf{v}| &= \sqrt{k^2}\sqrt{v_x^2 + v_y^2} \\
|k * \mathbf{v}| &= k\ \sqrt{v_x^2 + v_y^2} \\
|k * \mathbf{v}| &= k\ |\mathbf{v}|
\end{aligned}$$

Ahora veamos como se altera el ángulo θ_n del producto $k * \mathbf{v}$, si $k > 0$:

$$\begin{aligned}
\theta_n &= \arctan\left(\frac{k * v_y}{k * v_x}\right) \\
\theta_n &= \arctan\left(\frac{v_y}{v_x}\right) \\
\theta_n &= \theta
\end{aligned}$$

Como ya vimos en el caso de números complejos, cuando $k < 0$ el ángulo nuevo resulta ser el ángulo original más π radianes, es decir, invierte su dirección:

$$\theta_n = \theta + \pi$$

El producto de un escalar $k > 0$ por un vector tiene el siguiente efecto en su magnitud y el ángulo:

$$\begin{aligned}
k * (|\mathbf{v}| \angle\theta) &= (k * |\mathbf{v}|) \angle\theta \\
(-k) * (|\mathbf{v}| \angle\theta) &= (k * |\mathbf{v}|) \angle\theta + \pi
\end{aligned}$$

B.1.3. Suma de vectores

Ya sabemos que la suma de dos vectores $\mathbf{v}_1 = [v_{1x} \; v_{1y}]^t$ y $\mathbf{v}_2 = [v_{2x} \; v_{2y}]^t$ se define como:

$$\begin{aligned}
\mathbf{v}_3 &= \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2 \\
\mathbf{v}_3 &= [v_{1x} \; v_{1y}]^t + [v_{2x} \; v_{2y}]^t \\
\mathbf{v}_3 &= [(v_{1x} + v_{2x}) \;\; (v_{1y} + v_{2y})]^t
\end{aligned}$$

Es decir, las componentes en x se suman y las componentes en y se suman, para formar las nuevas componentes del vector. Como vimos en el capítulo de números complejos, podemos decir que los vectores $\mathbf{v}_1$ y $\mathbf{v}_2$ se suman de acuerdo a la **regla del paralelogramo** vista en la sección 13.4.

B.1.4. Combinación lineal de vectores

Sean los vectores $\mathbf{v}_1 = [1 \; 0]^t$ y $\mathbf{v}_2 = [0 \; 1]^t$. Si x y y son números reales, entonces cualquier vector $\mathbf{v} = [x \; y]^t$ en el plano se puede formar combinando los vectores $\mathbf{v}_1$ y $\mathbf{v}_2$, de la siguiente forma:

$$\mathbf{v} = x * \mathbf{v}_1 + y * \mathbf{v}_2$$

Decimos que el vector $\mathbf{v}$ es una **combinación lineal de los vectores**: $\mathbf{v}_1$ y $\mathbf{v}_2$. Como el vector $\mathbf{v}$ representa un punto en el plano x, y, decimos que las combinaciones lineales de $\mathbf{v}_1$ y $\mathbf{v}_2$ generan todos los puntos posibles sobre el plano x, y.

B.1.5. Vectores ortogonales

Dos **vectores son ortogonales** o perpendiculares si el ángulo entre ellos es de 90 grados. Es decir, $\mathbf{v}_1$ y $\mathbf{v}_2$ son ortogonales si $\theta_2 - \theta_1 = 90°$ o bien $\theta_2 - \theta_1 = -90°$. En ambos casos se cumple que el $\cos(\theta_2 - \theta_1) = 0$.

Utilizando el producto punto de dos vectores visto anteriormente podemos afirmar que dos vectores son ortogonales si su producto punto es cero. Es decir, si los vectores $\mathbf{v}_1$ y $\mathbf{v}_2$ son ortogonales se cumple lo siguiente:

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_2 &= |\mathbf{v}_1||\mathbf{v}_2|\cos(\theta_2 - \theta_1) \\ \mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_2 &= |\mathbf{v}_1||\mathbf{v}_2|(0) \\ \mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_2 &= 0 \end{aligned} \tag{B.12}$$

Este resultado se puede generalizar a vectores de 3 o más dimensiones.

El producto punto de dos vectores ortogonales es cero:

$$\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_2 = 0 \tag{B.13}$$

$$\mathbf{v}_1^t * \mathbf{v}_2 = 0 \tag{B.14}$$

B.2. Resolviendo el sistema de ecuaciones con más ecuaciones que variables

Sea un sistema de ecuaciones de 3 ecuaciones con dos variables, de la forma:

$$\begin{aligned} a_{1,1}x_1 \quad a_{1,2}x_2 &= b_1 \\ a_{2,1}x_1 \quad a_{2,2}x_2 &= b_2 \\ a_{3,1}x_1 \quad a_{3,2}x_2 &= b_3 \end{aligned}$$

Definamos los vectores columna $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$ y $\mathbf{b}$ de la siguiente forma:

$$\mathbf{a}_1 = \begin{bmatrix} a_{1,1} \\ a_{2,1} \\ a_{3,1} \end{bmatrix} \quad , \quad \mathbf{a}_2 = \begin{bmatrix} a_{1,2} \\ a_{2,2} \\ a_{3,2} \end{bmatrix} \quad , \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix}$$

De manera que el sistema original de ecuaciones se puede expresar de la siguiente forma:

$$x_1 * \mathbf{a}_1 + x_2 * \mathbf{a}_2 = \mathbf{b}$$

Es decir, el vector del lado izquierdo de la igualdad es una combinación lineal de los vectores $\mathbf{a}_1$ y $\mathbf{a}_2$. Esta situación se ilustra en la figura B.2. Los vectores $\mathbf{a}_1$ y $\mathbf{a}_2$ son vectores en un espacio tridimensional: x, y, z. El área sombreada ilustra una parte del plano generado por dichos vectores. Si el vector $\mathbf{b}$ está en dicho plano, entonces tenemos una solución exacta al sistema de ecuaciones.

Sin embargo, en muchas ocasiones el vector $\mathbf{b}$ no está en el plano generado por las combinaciones lineales de los vectores $\mathbf{a}_1$ y $\mathbf{a}_2$, como se ilustra en la figura B.3.

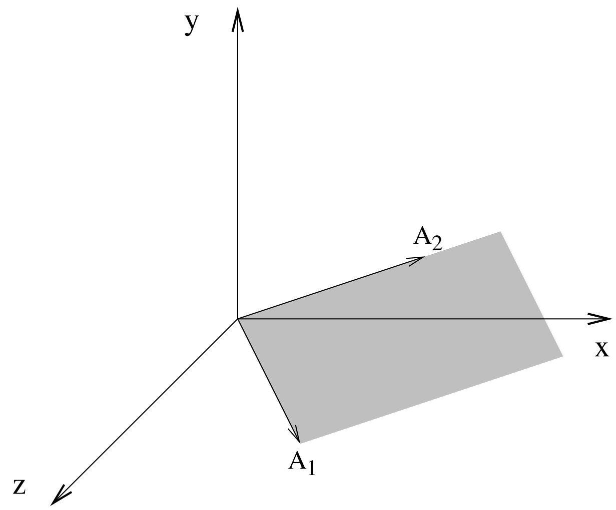


Figura B.2: Es el espacio lineal creado como una combinación lineal de $\mathbf{a}_1$ y $\mathbf{a}_2$.

Sea $\mathbf{b}'$ una solución aproximada a $\mathbf{b}$, de manera que se cumple que:

$$\mathbf{b}' + \mathbf{e} = \mathbf{b} \tag{B.15}$$

$$\mathbf{e} = \mathbf{b} - \mathbf{b}' \tag{B.16}$$

De manera que el vector $\mathbf{e}$ es el vector diferencia (o de error) entre $\mathbf{b}$ y $\mathbf{b}'$. Si se desea que este vector tenga la magnitud mínima, este vector $\mathbf{e}$ debe ser ortogonal al plano de las combinaciones lineales de $\mathbf{a}_1$ y $\mathbf{a}_2$. Es decir, el vector $\mathbf{e}$ **debe ser ortogonal a los vectores** $\mathbf{a}_1$ y $\mathbf{a}_2$.

Primero veamos en detalle el vector de diferencia $\mathbf{e}$:

$$\mathbf{e} = \mathbf{b} - \mathbf{b}' \tag{B.17}$$

$$\mathbf{e} = \mathbf{b} - (x_1\mathbf{a}_1 + x_2\mathbf{a}_2) \tag{B.18}$$

$$\mathbf{e} = \mathbf{b} - \mathbf{A}\mathbf{x} \tag{B.19}$$

donde $\mathbf{x} = [x_1 \ \ x_2]^t$. Veamos primero la condición de que $\mathbf{e}$ y $\mathbf{a}_1$ sean ortogonales, aprovechando el producto punto:

$$\mathbf{a}_1^t * \mathbf{e} = 0 \tag{B.20}$$

$$\mathbf{a}_1^t * (\mathbf{b} - \mathbf{a}\mathbf{x}) = 0 \tag{B.21}$$

$$\mathbf{a}_1^t * \mathbf{b} - \mathbf{a}_1^t * \mathbf{A}\mathbf{x} = 0 \tag{B.22}$$

$$\mathbf{a}_1^t * \mathbf{b} = \mathbf{a}_1^t * \mathbf{A}\mathbf{x} \tag{B.23}$$

Veamos en detalle esta nueva ecuación:

$$\mathbf{a}_1^t * \mathbf{b} = \mathbf{a}_1^t * \mathbf{A}\mathbf{x} \tag{B.24}$$

$$\begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{2,1} & a_{3_1} \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{2,1} & a_{3_1} \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 \\ a_{2,1}x_1 + a_{2,2}x_2 \\ a_{3,1}x_1 + a_{3,2}x_2 \end{bmatrix} \tag{B.25}$$

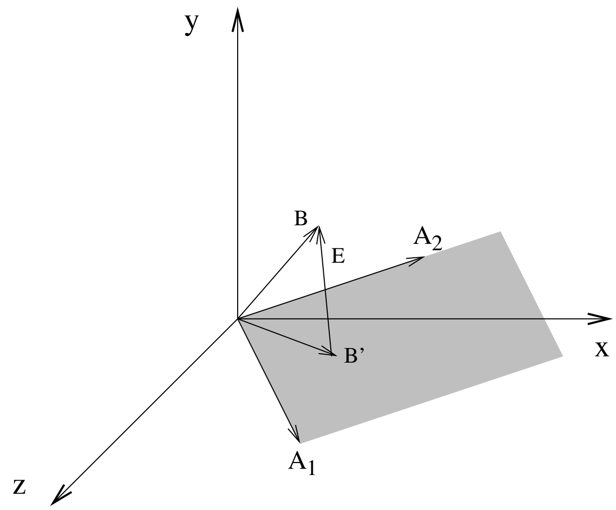


Figura B.3: El vector $\mathbf{b}$ no está en el plano solución formado por $\mathbf{a}_1$ y $\mathbf{a}_2$.

La nueva ecuación considerando ahora la condición de que $\mathbf{e}$ y $\mathbf{a}_2$ sean ortogonales adopta la siguiente forma:

$$\mathbf{a}_2^t * \mathbf{b} = \mathbf{a}_2^t * \mathbf{A}\mathbf{x} \tag{B.26}$$

$$\begin{bmatrix} a_{1,2} & a_{2,2} & a_{3_2} \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{1,2} & a_{2,2} & a_{3_2} \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 \\ a_{2,1}x_1 + a_{2,2}x_2 \\ a_{3,1}x_1 + a_{3,2}x_2 \end{bmatrix} \tag{B.27}$$

Estas dos últimas ecuaciones se pueden combinar en un sistema de dos ecuaciones, de la siguiente forma:

$$\begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{2,1} & a_{3_1} \\ a_{1,2} & a_{2,2} & a_{3_2} \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{2,1} & a_{3_1} \\ a_{1,2} & a_{2,2} & a_{3_2} \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 \\ a_{2,1}x_1 + a_{2,2}x_2 \\ a_{3,1}x_1 + a_{3,2}x_2 \end{bmatrix} \tag{B.28}$$

$$\mathbf{A}^t * \mathbf{b} = \mathbf{A}^t * \mathbf{A} * X \tag{B.29}$$

En esta última ecuación matricial se tiene un sistema de dos ecuaciones con dos variables y la podemos resolver fácilmente por medio de la inversa de la matriz $(\mathbf{A}^t * \mathbf{A})$:

$$\begin{aligned}
\mathbf{A}^t * \mathbf{b} &= (\mathbf{A}^t * \mathbf{A}) * \mathbf{x} && \text{(B.30)} \\
(\mathbf{A}^t * \mathbf{A})^{-1}\mathbf{A}^t * \mathbf{b} &= (\mathbf{A}^t * \mathbf{A})^{-1} * (\mathbf{A}^t * \mathbf{A}) * \mathbf{x} && \text{(B.31)} \\
(\mathbf{A}^t * \mathbf{A})^{-1}\mathbf{A}^t * \mathbf{b} &= \mathbf{I} * \mathbf{x} && \text{(B.32)} \\
(\mathbf{A}^t * \mathbf{A})^{-1}\mathbf{A}^t * \mathbf{b} &= \mathbf{b} && \text{(B.33)} \\
\mathbf{x} &= ((\mathbf{A}^t * \mathbf{A})^{-1}\mathbf{A}^t) * \mathbf{b} && \text{(B.34)} \\
& && \text{(B.35)}
\end{aligned}$$

B.2.1. La matriz Pseudoinversa

A la matriz $\mathbf{A}^+ = (\mathbf{A}^t * \mathbf{A})^{-1}\mathbf{A}^t$ se le conoce como la **matriz pseudoinversa** de la matriz $\mathbf{A}$. El desarrollo anterior se puede generalizar para más variables y más ecuaciones, obteniendo el mismo resultado.

B.2.2. Criterio de mínimos cuadrados

Es importante darse cuenta de que este método de la pseudoinversa calcula el vector diferencia $\mathbf{e} = \mathbf{b} - \mathbf{b}'$ de magnitud mínima. Para el caso anterior de tres ecuaciones tenemos:

$$\mathbf{e} = \begin{bmatrix} b_1 - b_1' \\ b_2 - b_2' \\ b_3 - b_3' \end{bmatrix} \tag{B.36}$$

$$|\mathbf{e}| = \sqrt{(b_1 - b_1')^2 + (b_2 - b_2')^2 + (b_3 - b_3')^2} \tag{B.37}$$

Es decir, se está minimizando la suma de los cuadrados de las diferencias entre los valores de b_i y los valores calculados b_i'. A este criterio se le conoce como **criterio de mínimos cuadrados** para obtener la solución más cercana al vector $\mathbf{b}$.

Apéndice C

Fracciones parciales

Hagamos la suma de las siguientes fracciones que involucran polinomios:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{x+1}+\frac{1}{x-1} &= \frac{1}{x+1}+\frac{1}{x-1} \\
\frac{1}{x+1}+\frac{1}{x-1} &= \frac{1}{x+1}\frac{x-1}{x-1}+\frac{1}{x-1}\frac{x+1}{x+1} \\
\frac{1}{x+1}+\frac{1}{x-1} &= \frac{x-1}{x^2-1}+\frac{x+1}{x^2-1} \\
\frac{1}{x+1}+\frac{1}{x-1} &= \frac{2x}{x^2-1}
\end{aligned}$$

En esta sección veremos como pasar fracciones que involucran polinomios en el numerador y en el denominador a suma de fracciones más simples. Como por ejemplo, pasar de la expresión de lado derecho a la suma de fracciones del lado izquierdo del ejemplo anterior.

Sea la fracción: $\frac{P_n(x)}{P_m(x)}$, donde n es el grado del polinomio del numerador y m es el grado del polinomio del denominador de la fracción. Si $n \geq m$ podemos hacer la división de los polinomios, obtener un polinomio cociente $P_c(x)$ y un polinomio residuo $P_r(x)$, de la forma:

$$\frac{P_n(x)}{P_m(x)} = P_c(x) + \frac{P_r(x)}{P_m(x)}$$

Donde el polinomio residuo tiene un grado $r < n$. En este apéndice trataremos con fracciones de la forma $\frac{P_n(x)}{P_m(x)}$, para el caso de que $n < m$. Como veremos, es muy importante las raíces del polinomio del denominador de la fracción, $P_m(x)$.

C.0.1. Solución general

El polinomio del denominador $P_m(x)$ se puede expresar como producto de factores lineales o cuadráticos irreducibles, de la forma:

$$P_m(x) = k(x-x_1)(x-x_2)\ldots(x^2+a_1x+a_0)(x^2+b_1x+b_0)\ldots$$

Donde k es una constante, x_1, x_2 son raíces reales y los polinomios cuadráticos corresponden a raíces complejas conjugadas.

Dependiendo de las raíces del polinomio del denominador se tienen los siguientes casos:

1. Raíz real única x_r. Es este caso, el polinomio del denominador tiene un factor lineal $(x - x_r)$. En la descomposición en fracciones parciales se debe incluir un sumando de este tipo:
$$\frac{c}{x - x_r}$$
2. Raíz real repetida $(x_r)^k$. En la descomposición en fracciones parciales se debe incluir una serie de sumandos de la forma:
$$\frac{c_1}{x - x_r} + \frac{c_2}{(x - x_r)^2} + \ldots + \frac{c_k}{(x - x_r)^k}$$
3. Factor cuadrático irreductible único $x^2 + a_1x + a_0$. Es este caso, el factor tiene un par de raíces complejas conjugadas. En la descomposición en fracciones parciales se debe incluir un sumando de la forma:
$$\frac{c_1x + d_1}{x^2 + a_1x + a_0}$$
4. Factor cuadrático irreductible repetido $(x^2 + a_1x + a_0)^k$. En la descomposición en fracciones parciales se debe incluir una serie de sumandos de la forma:
$$\frac{c_1x + d_1}{x^2 + a_1x + a_0} + \frac{c_2x + d_2}{(x^2 + a_1x + a_0)^2} + \ldots + \frac{c_kx + d_k}{(x^2 + a_1x + a_0)^k}$$

Veamos algunos ejemplos.

C.0.2. Polinomio $P_m(x)$ con raíces reales distintas

Iniciemos con el ejemplo que hemos presentado en la introducción, pero ahora en dirección inversa, partiendo del resultado y considerando que $P_m(x) = (x + 1)(x - 1)$:

$$\begin{aligned}
\frac{2x}{x^2 - 1} &= \frac{a}{x + 1} + \frac{b}{x - 1} \\
\frac{2x}{x^2 - 1} &= \frac{a}{x + 1}\,\frac{x - 1}{x - 1} + \frac{b}{x - 1}\,\frac{x + 1}{x + 1} \\
\frac{2x}{x^2 - 1} &= \frac{ax - a}{x^2 - 1} + \frac{bx + b}{x^2 - 1} \\
\frac{2x}{x^2 - 1} &= \frac{ax + bx - a + b}{x^2 - 1} \\
\frac{2x}{x^2 - 1} &= \frac{(a + b)x + (-a + b)}{x^2 - 1}
\end{aligned}$$

De manera que para que ambas fracciones sean iguales, los coeficientes de los términos de los polinomios numeradores deben ser iguales. Es decir:

$$\begin{aligned}
a + b &= 2 \\
-a + b &= 0
\end{aligned}$$

Este sistema de ecuaciones lo podemos resolver fácilmente y obtener los valores de las constantes buscadas: $a = 1$ y $b = 1$.

C.0.3. Polinomio $P_m(x)$ con raíces reales distintas y un factor cuadrático irreductible

Consideremos ahora la siguiente fracción que involucra un factor cuadrático irreductible:

$$
\begin{aligned}
\frac{4}{(x^2-1)(x^2+1)} &= \frac{a}{x+1}+\frac{b}{x-1}+\frac{cx+d}{x^2+1}\\
\frac{4}{(x^2-1)(x^2+1)} &= \frac{a}{x+1}\,\frac{x-1}{x-1}\,\frac{x^2+1}{x^2+1}+\frac{b}{x-1}\,\frac{x+1}{x+1}\,\frac{x^2+1}{x^2+1}+\frac{cx+d}{x^2+1}\,\frac{x+1}{x+1}\,\frac{x-1}{x-1}\\
\frac{4}{(x^2-1)(x^2+1)} &= \frac{a}{x+1}\,\frac{x^3-x^2+x-1}{(x-1)(x^2+1)}+\frac{b}{x-1}\,\frac{x^3+x^2+x+1}{(x+1)(x^2+1)}+\frac{cx+d}{x^2+1}\,\frac{x^2-1}{(x+1)(x-1)}\\
\frac{4}{(x^2-1)(x^2+1)} &= \frac{ax^3-ax^2+ax-a}{(x+1)(x-1)(x^2+1)}+\frac{bx^3+bx^2+bx+b}{(x-1)(x+1)(x^2+1)}+\frac{cx^3-cx+dx^2-d}{(x+1)(x-1)(x^2+1)}\\
\frac{4}{(x^2-1)(x^2+1)} &= \frac{(a+b+c)x^3+(-a+b+d)x^2+(a+b-c)x+(-a+b-d)}{(x+1)(x-1)(x^2+1)}
\end{aligned}
$$

De manera que tenemos el siguiente sistema de ecuaciones: Es decir:

$$
\begin{aligned}
a+b+c &= 0\\
-a+b+d &= 0\\
a+b-c &= 0\\
-a+b-d &= 4
\end{aligned}
$$

Este sistema de ecuaciones lo podemos resolver utilizando Octave y obtener los valores de las constantes buscadas: $a=-1$ y $b=1$, $c=0$ y $d=-2$. Tenemos el resultado final:

$$
\frac{4}{(x^2-1)(x^2+1)} = \frac{-1}{x+1}+\frac{1}{x-1}+\frac{-2}{x^2+1}
$$

C.0.4. Polinomio $P_m(x)$ con raíces reales repetidas

Consideremos ahora el siguiente polinomio que tiene una raíz real en $x=0$ y dos raíces reales repetidas en $x=-1$:

$$
P_m(x)=x(x+1)^2
$$

Veamos el siguiente ejemplo que involucra fracciones del tipo $\frac{b}{x+1}$ y $\frac{c}{(x+1)^2}$:

$$
\begin{aligned}
\frac{x-1}{x(x+1)^2} &= \frac{a}{x}+\frac{b}{x+1}+\frac{c}{(x+1)^2}\\
\frac{x-1}{x(x+1)^2} &= \frac{a}{x}\,\frac{(x+1)^2}{(x+1)^2}+\frac{b}{x+1}\,\frac{x}{x}\,\frac{x+1}{x+1}+\frac{c}{(x+1)^2}\,\frac{x}{x}\\
\frac{x-1}{x(x+1)^2} &= \frac{a}{x}\,\frac{x^2+2x+1}{(x+1)^2}+\frac{b}{x+1}\,\frac{x^2+x}{x(x+1)}+\frac{cx}{x(x+1)^2}\\
\frac{x-1}{x(x+1)^2} &= \frac{ax^2+2ax+a}{x(x+1)^2}+\frac{bx^2+bx}{x(x+1)^2}+\frac{cx}{x(x+1)^2}\\
\frac{x-1}{x(x+1)^2} &= \frac{(a+b)x^2+(2a+b+c)x+a}{x(x+1)^2}
\end{aligned}
$$

De manera que tenemos el siguiente sistema de ecuaciones: Es decir:

$$\begin{aligned} a+b &= 0 \\ 2a+b+c &= 1 \\ a &= -1 \end{aligned}$$

Este sistema de ecuaciones lo podemos resolver utilizando Octave y obtener los valores de las constantes buscadas: $a=-1$ y $b=1$ y $c=2$. Tenemos el resultado final:

$$\frac{x-1}{x^3+2x^2+x} = \frac{-1}{x}+\frac{1}{x+1}+\frac{2}{(x+1)^2}$$

C.0.5. Polinomio $P_m(x)$ con factores cuadráticos irreductibles repetidos

Consideremos ahora el siguiente polinomio que tiene una raíz real en $x=0$ y dos factores cuadráticas irreductibles repetidas:

$$P_m(x) = x(x^2+1)^2$$

Veamos el siguiente ejemplo que involucra fracciones del tipo $\frac{bx+c}{x^2+1}$ y $\frac{dx+e}{(x^2+1)^2}$:

$$\begin{aligned}
\frac{x-1}{x(x^2+1)^2} &= \frac{a}{x}+\frac{bx+c}{x^2+1}+\frac{dx+e}{(x^2+1)^2} \\
\frac{x-1}{x(x^2+1)^2} &= \frac{a}{x}\,\frac{(x^2+1)^2}{(x^2+1)^2}+\frac{bx+c}{x^2+1}\,\frac{x}{x}\,\frac{x^2+1}{x^2+1}+\frac{dx+e}{(x^2+1)^2}\,\frac{x}{x} \\
\frac{x-1}{x(x^2+1)^2} &= \frac{a}{x}\,\frac{x^4+2x^2+1}{(x^2+1)^2}+\frac{bx+c}{x^2+1}\,\frac{x^3+x}{x(x^2+1)}+\frac{dx+e}{(x^2+1)^2}\,\frac{x}{x} \\
\frac{x-1}{x(x^2+1)^2} &= \frac{ax^4+2ax^2+a}{x(x^2+1)^2}+\frac{bx^4+cx^3+bx^2+cx}{x(x^2+1)^2}+\frac{dx^2+ex}{x(x^2+1)^2} \\
\frac{x-1}{x(x^2+1)^2} &= \frac{(a+b)x^4+cx^3+(2a+b+d)x^2+(c+e)x+a}{x(x^2+1)^2}
\end{aligned}$$

De manera que tenemos el siguiente sistema de ecuaciones: Es decir:

$$\begin{aligned} a+b &= 0 \\ c &= 0 \\ 2a+b+d &= 0 \\ c+e &= 1 \\ a &= -1 \end{aligned}$$

Este sistema de ecuaciones lo podemos resolver utilizando Octave y obtener los valores de las constantes buscadas: $a=-1$ y $b=1$, $c=0$, $d=1$ y $e=1$. Tenemos el resultado final:

$$\frac{x-1}{x(x^2+1)^2} = \frac{-1}{x}+\frac{x}{x^2+1}+\frac{x+1}{(x^2+1)^2} \tag{C.1}$$

C.0.6. Cálculo de fracciones parciales en Octave

En Octave podemos hacer la descomposición en fracciones parciales de fracciones aprovechando la función $[R, P, C, E] = \text{residue}(A, B)$, siendo A y B los vectores de entrada que corresponden al numerador y denominador de la fracción, respectivamente. El resultado se encuentra en el polinomio cociente C, el vector de residuos R, el vector de polos o raíces P y el vector E de exponentes de cada factor del denominador. La descomposición en fracciones parciales toma la forma:

$$\frac{A(x)}{B(x)} = P_c(x) + \frac{R(1)}{(x - P(1))^{E(1)}} + \frac{R(2)}{(x - P(2))^{E(2)}} + \dots$$

Recordemos que $R(i)$ se refiere al i-ésimo elemento del vector R.

Por ejemplo para $\frac{x-1}{x(x+1)^2} = \frac{x-1}{x^3+2x^2+x}$ tenemos:

```
>> A = [1 -1];
>> B = [1 2 1 0];
>> [R,P,C,E] = residue(A, B)
R =
  -1
   1
   2
P =
   0
  -1
  -1
C = [](0x0)
E =
   1
   1
   2
```

De manera que el resultado es el siguiente:

$$\begin{aligned}
\frac{x-1}{x(x+1)^2} &= 0 + \frac{R(1)}{(x - P(1))^{E(1)}} + \frac{R(2)}{(x - P(2))^{E(2)}} + \frac{R(3)}{(x - P(3))^{E(3)}} \\
\frac{x-1}{x(x+1)^2} &= \frac{-1}{(x-0)^1} + \frac{1}{(x-(-1))^1} + \frac{2}{(x-(-1))^2} \\
\frac{x-1}{x(x+1)^2} &= \frac{-1}{x} + \frac{1}{x+1} + \frac{2}{(x+1)^2}
\end{aligned}$$

Conviene tener en cuenta que cuando el polinomio del denominador tiene factores cuadráticos irreducibles, aparecen las dos raíces complejas conjugadas, como en el siguiente ejemplo.

Para $\frac{x-1}{x(x^2+1)^2} = \frac{x-1}{x^5+2x^3+x}$ tenemos:

```
>> A = [1 -1];
>> B = [1 0 2 0 1 0];
>> [R,P,C,E] = residue(A, B)
R =
```

```
    0.50000 - 0.25000i
   -0.25000 - 0.25000i
    0.50000 + 0.25000i
   -0.25000 + 0.25000i
   -1.00000 + 0.00000i
P =
    0.00000 + 1.00000i
    0.00000 + 1.00000i
   -0.00000 - 1.00000i
   -0.00000 - 1.00000i
    0.00000 + 0.00000i
C = [](0x0)
E =
    1
    2
    1
    2
    1
```

De manera que el resultado es el siguiente:

$$
\begin{aligned}
\frac{x-1}{x(x^2+1)^2} &= 0+\frac{R(1)}{(x-P(1))^{E(1)}}+\frac{R(2)}{(x-P(2))^{E(2)}}+\frac{R(3)}{(x-P(3))^{E(3)}}++\frac{R(4)}{(x-P(4))^{E(4)}}+\frac{R(5)}{(x-P(5))^{E(5)}}\\
\frac{x-1}{x(x^2+1)^2} &= \frac{(0.5-0.25i)}{(x-i)^1}+\frac{(-0.25-0.25i)}{(x-i)^2}+\frac{(0.5+0.25i)}{(x-(-i))^1}+\frac{(-0.25+0.25i)}{(x-(-i))^2}+\frac{-1}{(x-0)^1}\\
\frac{x-1}{x(x^2+1)^2} &= \frac{(0.5-0.25i)}{(x-i)}+\frac{(-0.25-0.25i)}{(x-i)^2}+\frac{(0.5+0.25i)}{(x+i)}+\frac{(-0.25+0.25i)}{(x+i)^2}+\frac{-1}{x}\\
\frac{x-1}{x(x^2+1)^2} &= \frac{-1}{x}+\left(\frac{(0.5-0.25i)}{(x-i)}+\frac{(0.5+0.25i)}{(x+i)}\right)+\left(\frac{(-0.25-0.25i)}{(x-i)^2}+\frac{(-0.25+0.25i)}{(x+i)^2}\right)
\end{aligned}
$$

Realicemos el primer producto indicado:

$$
\begin{aligned}
\frac{(0.5-0.25i)}{(x-i)}+\frac{(0.5+0.25i)}{(x+i)} &= \frac{(0.5-0.25i)}{(x-i)}\frac{(x+i)}{(x+i)}+\frac{(0.5+0.25i)}{(x+i)}\frac{(x-i)}{(x-i)}\\
\frac{(0.5-0.25i)}{(x-i)}+\frac{(0.5+0.25i)}{(x+i)} &= \frac{0.5x-0.25ix+0.5i-0.25i^2}{x^2-i^2}+\frac{0.5x+0.25ix-0.5i-0.25i^2}{x^2-i^2}\\
\frac{(0.5-0.25i)}{(x-i)}+\frac{(0.5+0.25i)}{(x+i)} &= \frac{0.5x-0.25ix+0.5i-0.25i^2+0.5x+0.25ix-0.5i-0.25i^2}{x^2+1}\\
\frac{(0.5-0.25i)}{x}+\frac{(0.5+0.25i)}{(x+i)} &= \frac{x+0.5}{x^2+1}
\end{aligned}
$$

Realicemos el segundo producto indicado:

$$\begin{aligned}
\frac{(-0.25-0.25i)}{(x-i)^2}+\frac{(-0.25+0.25i)}{(x+i)^2} &= \frac{(-0.25-0.25i)}{(x-i)^2}\frac{(x+i)^2}{(x+i)^2}+\frac{(-0.25+0.25i)}{(x+i)^2}\frac{(x-i)^2}{(x-i)^2}\\
\frac{(-0.25-0.25i)}{(x-i)^2}+\frac{(-0.25+0.25i)}{(x+i)^2} &= \frac{(-0.25-0.25i)(x^2+2ix-1)}{(x^2+1)^2}+\frac{(-0.25+0.25i)(x^2-2ix-1)}{(x^2+1)^2}\\
\frac{(-0.25-0.25i)}{(x-i)^2}+\frac{(-0.25+0.25i)}{(x+i)^2} &= \frac{-0.5x^2+x+0.5}{(x^2+1)^2}
\end{aligned}$$

Para obtener el numerador del resultado anterior se utilizó Octave:

```
>> (-0.25 -0.25i)*[1 2i -1] + (-0.25 +0.25i)*[1 -2i -1]
ans =
  -0.50000   1.00000   0.50000
```

De manera que el resultado es:

$$\begin{aligned}
\frac{x-1}{x(x^2+1)^2} &= \frac{-1}{x}+\frac{x+0.5}{x^2+1}+\frac{-0.5x^2+x+0.5}{(x^2+1)^2}\\
\frac{x-1}{x(x^2+1)^2} &= \frac{-1}{x}+\frac{x}{x^2+1}+\frac{0.5}{x^2+1}+\frac{-0.5x^2-0.5+x+1}{(x^2+1)^2}\\
\frac{x-1}{x(x^2+1)^2} &= \frac{-1}{x}+\frac{x}{x^2+1}+\frac{0.5}{x^2+1}+\frac{-0.5x^2-0.5}{(x^2+1)^2}+\frac{x+1}{(x^2+1)^2}\\
\frac{x-1}{x(x^2+1)^2} &= \frac{-1}{x}+\frac{x}{x^2+1}+\frac{0.5}{x^2+1}+\frac{-0.5(x^2+1)}{(x^2+1)^2}+\frac{x+1}{(x^2+1)^2}\\
\frac{x-1}{x(x^2+1)^2} &= \frac{-1}{x}+\frac{x}{x^2+1}+\frac{0.5}{x^2+1}+\frac{-0.5}{x^2+1}+\frac{x+1}{(x^2+1)^2}\\
\frac{x-1}{x(x^2+1)^2} &= \frac{-1}{x}+\frac{x}{x^2+1}+\frac{x+1}{(x^2+1)^2}
\end{aligned}$$

Este resultado coincide con el obtenido en la ecuación C.1 sin utilizar Octave. En este caso, el uso de Octave no abrevió mucho las operaciones requeridas.

C.1. Ejercicios propuestos

Descomponga en fracciones parciales las siguientes fracciones polinomiales:

1. $\frac{2}{(x-1)(x-2)}$
2. $\frac{2}{(x-1)(x-2)(x-3)}$
3. $\frac{x^2-2x+1}{(x^2+1)(x^2+4)}$
4. $\frac{x^2+2x+1}{(x^2+1)(x^2+1)}$

5. $\frac{x^2-2x+1}{(x-5)(x^2+1)(x^2+1)(x^2+4)}$

6. $\frac{1}{x^3+x^2+x+1}$

7. $\frac{x^2+x+1}{x^3+x^2+x+1}$

8. $\frac{1}{x^6 3x^5+4x^3+4x^2+3x+1}$

9. $\frac{x^2+x+1}{x^2+2x+1}$

10. $\frac{x^3+x+1}{x^2+2x+1}$

Apéndice D

Respuestas a la Evaluación 1

Enseguida se presenta la solución a los ejercicios de la evaluación 1 del capítulo 6.

1. Una compañía obtiene de ganancias noventa y cinco mil cinco pesos el primer mes, pierde ciento noventa mil trece pesos el segundo mes y nuevamente tiene una ganancia de setecientos cincuenta mil noventa pesos el tercer mes. ¿Cuánto obtuvo de ganancias en los tres primeros meses?

   Solución. En el primer mes ganó $95,005$ pesos, en el segundo mes ganó $-190,013$ pesos y en el tercer mes ganó $750,090$ pesos. El total de ganancias, G, es la suma de las ganancias de cada mes, considerando su signo (negativo si son pérdidas):

$$G = (95,005 + 750,090) - 190,013$$

   Realizando la suma indicada:

$$\begin{array}{ccccccc} & (1) & & & & & \\ & & 9 & 5 & 0 & 0 & 5 \\ + & 7 & 5 & 0 & 0 & 9 & 0 \\ \hline & 8 & 4 & 5 & 0 & 9 & 5 \end{array}$$

   Ahora sólo falta efectuar la resta siguiente:

$$G = 845,095 - 190,013$$

$$\begin{array}{ccccccc} & 7 & 14 & & & & \\ & \cancel{8} & \cancel{4} & 5 & 0 & 9 & 5 \\ - & 1 & 9 & 0 & 0 & 1 & 3 \\ \hline & 6 & 5 & 5 & 0 & 8 & 2 \end{array}$$

Las ganancias de los tres primeros meses es \$655,082.00

2. A un centro de adiestramiento llegan 89 camiones de soldados. Considere que cada camión lleva 38 soldados. Si el total de soldados, se reparten equitativamente a 13 poblados, ¿Cuántos soldados se envían a cada poblado? ¿Cuántos soldados permanecen en el centro?

   Solución. El total de soldados, S, que llega al centro es:

$$S = 89 * 38$$

   Efectuando este producto:

$$
\begin{array}{ccccc}
 & & & 8 & 9\\
* & & & 3 & 8\\
\hline
 & & \cancel{(7)} & \cancel{(7)} & \\
 & & 7 & 1 & 2\\
 & \cancel{(2)} & \cancel{(2)} & & \\
 & 2 & 6 & 7 & \\
\hline
 & (1) & & & \\
 & 3 & 3 & 8 & 2
\end{array}
$$

   Para encontrar cuántos soldados se envían a cada poblado, el valor de $S = 3382$ se divide entre 13, la cantidad de poblados:

$$\frac{3382}{13} = c + \frac{r}{13}$$

   El cociente c y el residuo r se obtienen al efectuar la división:

$$
\begin{array}{c|cccc}
 & & 2 & 6 & 0\\
\hline
13 & 3 & 3 & 8 & 2\\
 & -2 & 6 & & \\
 & & \text{—} & & \\
 & & 7 & 8 & \\
 & & -7 & 8 & \\
 & & & \text{—} & \\
 & & & 0 & 2\\
 & & & & -0\\
 & & & & \text{—}\\
 & & & & 2
\end{array}
$$

   El cociente es 260 y el residuo es 2.

Se envían 260 soldados a cada poblado y quedan 2 soldados en el centro.

3. En un laboratorio se tienen dos frascos de cierta vacuna, el primero de 2.385 litros y el segundo de 9.880 litros. Si se reparte esa cantidad en dosis de 0.005 litros, ¿Cuántas dosis de esa vacuna se tendrán disponibles?

   Solución. El total de vacuna, V, es la suma de los contenidos los dos frascos:

$$V = 2.385 + 9.880$$

$$\begin{array}{cccccccc}
 & (1) & (1) & & (1) & & \\
 & & 2 & . & 3 & 8 & 5 \\
+ & & 9 & . & 8 & 8 & 0 \\
\hline
 & 1 & 2 & . & 2 & 6 & 5
\end{array}$$

De esta manera, $V = 12.265$ litros. Ahora sólo falta efectuar división de V entre 0.005. El total de dosis, D, es el siguiente:

$$\begin{aligned}
D &= \frac{12.265}{0.005} \\
D &= \frac{12.265 * 10^3}{0.005 * 10^3} \\
D &= \frac{12,265}{5}
\end{aligned}$$

$$\begin{array}{c|ccccc}
 & & 2 & 4 & 5 & 3 \\
\hline
5 & 1 & 2 & 2 & 6 & 5 \\
 & -1 & 0 & & & \\
 & & \overline{} & & & \\
 & & 2 & 2 & & \\
 & & -2 & 0 & & \\
 & & & \overline{} & & \\
 & & & 2 & 6 & \\
 & & & -2 & 5 & \\
 & & & & \overline{} & \\
 & & & & 1 & 5 \\
 & & & & -1 & 5 \\
 & & & & & \overline{} \\
 & & & & & 0
\end{array}$$

El cociente es 2453 y el residuo es 0.

> Se tienen $2,453$ dosis disponibles de vacuna.

4. Calcule el valor de a en los siguientes ejercicios y expreselo como una fracción simple. Recuerde que en una fracción simple el numerador y denominador no tienen factores en común, es decir, tiene los números enteros más pequeños en el numerador y denominador.

   a)

$$\begin{aligned}
a &= 2^3 * 2^4 \\
a &= (2 * 2 * 2) * (2 * 2 * 2 * 2) \\
a &= 8 * (2 * 2 * 2 * 2) \\
a &= (8 * 2) * 2 * 2 * 2 \\
a &= (16 * 2) * 2 * 2 \\
a &= (32 * 2) * 2
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
a &= 64 * 2 \\
a &= 128 \\
a &= \frac{128}{1}
\end{aligned}
$$

$a = \frac{128}{1}$

b)

$$
\begin{aligned}
a &= \frac{3}{4} + \frac{7}{8} * 2^3 - \frac{2}{-4} \\
a &= \frac{3}{4} + \frac{7}{8} * 8 - \frac{2}{-4} \\
a &= \frac{3}{4} + \frac{7}{8} * \frac{8}{1} - \left(-\frac{2}{4}\right) \\
a &= \frac{3}{4} + \frac{7}{1} * \frac{8}{8} - \left(-\frac{2}{4}\right) \\
a &= \frac{3}{4} + \frac{7}{1} * 1 + \frac{2}{4} \\
a &= \frac{3}{4} + \frac{7}{1} + \frac{2}{4} \\
a &= \left(\frac{3}{4} + \frac{2}{4}\right) + \frac{7}{1} \\
a &= \frac{3+2}{4} + \frac{7}{1} \\
a &= \frac{5}{4} + \frac{7}{1} \\
a &= \frac{5}{4} + \frac{7*4}{1*4} \\
a &= \frac{5}{4} + \frac{28}{4} \\
a &= \frac{5+28}{4} \\
a &= \frac{33}{4}
\end{aligned}
$$

$a = \frac{33}{4}$

c)

$$
\begin{aligned}
a &= \frac{11}{3} + 8 * 10^{-1} + \frac{2}{6} - 0.8 \\
a &= \frac{11}{3} + 8 * 10^{-1} + \frac{2}{6} - 8 * 10^{-1} \\
a &= \frac{11}{3} + \frac{2}{6} + (8 * 10^{-1} - 8 * 10^{-1})
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
a &= \frac{11}{3}+\frac{2}{6}+0\\
a &= \frac{11}{3}+\frac{2/2}{6/2}\\
a &= \frac{11}{3}+\frac{1}{3}\\
a &= \frac{11+1}{3}\\
a &= \frac{12}{3}\\
a &= \frac{12/3}{3/3}\\
a &= \frac{4}{1}
\end{aligned}
$$

$\boxed{a=\frac{4}{1}}$

d)

$$
\begin{aligned}
a &= \frac{1+2*3*2^2}{\frac{1}{10}-\frac{6}{10}+0.4}\\
a &= \frac{1+2*3*4}{\frac{1}{10}-\frac{6}{10}+4*10^{-1}}\\
a &= \frac{1+24}{\frac{1}{10}-\frac{6}{10}+4*\frac{1}{10}}\\
a &= \frac{25}{\frac{1}{10}-\frac{6}{10}+\frac{4}{10}}\\
a &= \frac{25}{\frac{1-6+4}{10}}\\
a &= \frac{\frac{25}{1}}{\frac{-1}{10}}\\
a &= \frac{25*10}{1*(-1)}\\
a &= \frac{250}{-1}\\
a &= -\frac{250}{1}
\end{aligned}
$$

$\boxed{a=-\frac{250}{1}}$

e)

$$
a = \left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\right)+\frac{1}{4}
$$

$$\begin{aligned}
a &= \left(\frac{1*3}{2*3}+\frac{1*2}{3*2}\right)+\frac{1}{4}\\
a &= \left(\frac{3}{6}+\frac{2}{6}\right)+\frac{1}{4}\\
a &= \frac{3+2}{6}+\frac{1}{4}\\
a &= \frac{5}{6}+\frac{1}{4}\\
a &= \frac{5*2}{6*2}+\frac{1*3}{4*3}\\
a &= \frac{10}{12}+\frac{3}{12}\\
a &= \frac{10+3}{12}\\
a &= \frac{13}{12}
\end{aligned}$$

$a = \frac{13}{12}$

f)

$$\begin{aligned}
a &= 2^8-2^5\\
a &= 2^4*2^4-2^4*2\\
a &= (2*2*2*2)*(2*2*2*2)-(2*2*2*2)*2\\
a &= 16*16-16*2\\
a &= 256-32\\
a &= 224\\
a &= \frac{224}{1}
\end{aligned}$$

$a = \frac{224}{1}$

g)

$$\begin{aligned}
a &= (2^2*2^3)^2\\
a &= (2^{2+3})^2\\
a &= (2^5)^2\\
a &= 2^{5*2}\\
a &= 2^{10}\\
a &= 1024\\
a &= \frac{1024}{1}
\end{aligned}$$

$a = \frac{1024}{1}$

Apéndice E

Respuestas a la Evaluación 2

Enseguida se presenta la solución a los ejercicios de la evaluación 2 del capítulo 11.

1. Si un triángulo rectángulo tiene un cateto 2 unidades más largo que el otro cateto y la hipotenusa tiene 2 unidades más que el cateto más largo, encuentre el perímetro de dicho triángulo.

   Solución:

   Sea x el cateto más corto, $x+2$ el cateto más largo y $x+4$ la hipotenusa del triángulo rectángulo. Sabemos por el teorema de Pitágoras que se debe cumplir:

$$\begin{aligned}
(x+4)^2 &= (x+2)^2 + x^2 \\
x^2+8x+16 &= (x^2+4x+4)+x^2 \\
x^2+8x+16 &= 2x^2+4x+4 \\
x^2+8x+16-x^2-8x-16 &= 2x^2-x^2+4x-8x+4-16 \\
0 &= x^2-4x-12
\end{aligned}$$

   Si resolvemos esta ecuación cuadrática de la forma $ax^2+bx+c=0$, con $a=1$, $b=-4$ y $c=-12$, tenemos:

$$\begin{aligned}
x &= \frac{-b \pm \sqrt{b^2-4ac}}{2a} \\
x &= \frac{-(-4) \pm \sqrt{(-4)^2-4(1)(-12)}}{2(1)} \\
x &= \frac{4 \pm 8}{2} \\
x_1 &= \frac{4+8}{2} \\
x_1 &= 6 \\
x_2 &= \frac{4-8}{2} \\
x_2 &= -2
\end{aligned}$$

   De manera que la solución buscada es $x=6$, el otro cateto mide $x+2=8$ y finalmente la hipotenusa tiene una longitud de $x+4=10$. Por lo tanto el perímetro $P=6+8+10$ tiene un valor de 24.

El perímetro tiene una longitud de 24 unidades.

2. Encuentra el valor de x en las siguientes ecuaciones:

a) $\frac{4}{5}\ \frac{1}{x-1} - \frac{2}{5}\ \frac{1}{x+1} = \frac{1}{x^2-1}$ b) $\frac{\frac{1}{5}}{5-\frac{5}{3x+1}} = \frac{1}{5}$

Solución a):

$$
\begin{aligned}
\frac{4}{5}\ \frac{1}{x-1} - \frac{2}{5}\ \frac{1}{x+1} &= \frac{1}{x^2-1} \\
\frac{5}{1} * \left(\frac{4}{5}\ \frac{1}{x-1} - \frac{2}{5}\ \frac{1}{x+1}\right) &= \frac{5}{1} * \frac{1}{x^2-1} \\
\frac{5}{1}\ \frac{4}{5}\ \frac{1}{x-1} - \frac{5}{1}\ \frac{2}{5}\ \frac{1}{x+1} &= \frac{5}{1}\ \frac{1}{x^2-1} \\
\frac{5}{5}\ \frac{4}{1}\ \frac{1}{x-1} - \frac{5}{5}\ \frac{2}{1}\ \frac{1}{x+1} &= \frac{5}{1}\ \frac{1}{x^2-1} \\
(1)\ \frac{4}{1}\ \frac{1}{x-1} - (1)\ \frac{2}{1}\ \frac{1}{x+1} &= \frac{5}{1}\ \frac{1}{x^2-1} \\
\frac{4}{1}\ \frac{1}{x-1} - \frac{2}{1}\ \frac{1}{x+1} &= \frac{5}{1}\ \frac{1}{x^2-1} \\
\frac{4}{x-1} - \frac{2}{x+1} &= \frac{5}{x^2-1} \\
\frac{4}{x-1}\ \frac{x+1}{x+1} - \frac{2}{x+1}\ \frac{x-1}{x-1} &= \frac{5}{x^2-1} \\
\frac{4(x+1)}{x^2-1} - \frac{2(x-1)}{x^2-1} &= \frac{5}{x^2-1} \\
\frac{4x+4}{x^2-1} - \frac{2x-2}{x^2-1} &= \frac{5}{x^2-1} \\
\frac{4x+4-(2x-2)}{x^2-1} &= \frac{5}{x^2-1} \\
\frac{4x+4-2x+2}{x^2-1} &= \frac{5}{x^2-1} \\
\frac{(4x-2x)+(4+2)}{x^2-1} &= \frac{5}{x^2-1} \\
\frac{(4-2)x+(4+2)}{x^2-1} &= \frac{5}{x^2-1} \\
\frac{2x+6}{x^2-1} &= \frac{5}{x^2-1}
\end{aligned}
$$

$$\begin{aligned}
\frac{x^2-1}{1}*\frac{2x+6}{x^2-1} &= \frac{x^2-1}{1}*\frac{5}{x^2-1}\\
\frac{x^2-1}{x^2-1}*\frac{2x+6}{1} &= \frac{x^2-1}{x^2-1}*\frac{5}{1}\\
(1)*\frac{2x+6}{1} &= (1)*\frac{5}{1}\\
\frac{2x+6}{1} &= \frac{5}{1}\\
2x+6 &= 5\\
2x+6-6 &= 5-6\\
2x+(6-6) &= 5-6\\
2x+0 &= -1\\
2x &= -1\\
\frac{1}{2}\ \frac{2x}{1} &= \frac{1}{2}\ \frac{-1}{1}\\
\frac{2}{2}\ \frac{x}{1} &= \frac{-1}{2}\\
(1)\ x &= \frac{-1}{2}\\
x &= -\frac{1}{2}
\end{aligned}$$

a) $x = -\frac{1}{2}$

Solución b):

$$\begin{aligned}
\frac{\frac{1}{5}}{5-\frac{5}{3x+1}} &= \frac{1}{5}\\
\frac{\frac{1}{5}}{\frac{5}{1}\ \frac{3x+1}{3x+1}-\frac{5}{3x+1}} &= \frac{1}{5}\\
\frac{\frac{1}{5}}{\frac{15x+5}{3x+1}-\frac{5}{3x+1}} &= \frac{1}{5}\\
\frac{\frac{1}{5}}{\frac{15x+5-5}{3x+1}} &= \frac{1}{5}\\
\frac{\frac{1}{5}}{\frac{15x}{3x+1}} &= \frac{1}{5}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{1*(3x+1)}{5*15x} &= \frac{1}{5}\\
\frac{1}{5}*\frac{3x+1}{15x} &= \frac{1}{5}\\
\frac{5}{1}*\frac{1}{5}*\frac{3x+1}{15x} &= \frac{5}{1}*\frac{1}{5}\\
\frac{3x+1}{15x} &= 1\\
15x*\frac{3x+1}{15x} &= 1*15x\\
3x+1 &= 15x\\
-3x+3x+1 &= 15x-3x\\
1 &= 12x\\
\frac{1}{12}*1 &= 12x*\frac{1}{12}\\
\frac{1}{12} &= x
\end{aligned}$$

$\boxed{x = \frac{1}{12}}$

3. En un expendio de granos, se ofrece una bolsa de 10 kilogramos de una mezcla de frijoles de dos tipos. El frijol tipo A vale \$18.00 el kilogramo y el frijol tipo B vale \$22.00 el kilogramo. Si la mezcla tiene un costo de \$19.60 por kilogramo, ¿Cuántos kilogramos de cada tipo de frijol contiene la bolsa de 10 kilogramos?

   Solución: Sea $x =$ kg de frijol tipo A, $y =$ kg de frijol tipo B. Considerando que la suma de x y y son 10 kg, tenemos la primera ecuación:

$$x+y=10 \tag{E.1}$$

   Ahora bien, considerando que el costo de producción de este frijol mezclado es igual al precio de venta de la bolsa de 10 kg, tenemos la segunda ecuación:

$$\begin{aligned}
18x+22y &= 19.60*10\\
18x+22y &= 196 \qquad \text{(E.2)}
\end{aligned}$$

   Para conocer x y y sólo falta resolver este sistema de dos ecuaciones y dos incógnitas. Utilicemos el método de sumas y restas. Si multiplicamos la ecuación E.1 por 18 tenemos:

$$18x+18y=180 \tag{E.3}$$

   Enseguida restamos la ecuación E.3 de la ecuación E.2:

$$\begin{aligned}
18x+22y &= 196\\
- \quad & \quad -\\
18x+18y &= 180
\end{aligned}$$

Al realizar la resta, se elimina el término 18x de la ecuación resultante:

$$\begin{aligned} 22y - 18y &= 196 - 180 \\ 4y &= 16 \\ \frac{1}{4} * 4y &= \frac{1}{4} * 16 \\ y &= \frac{16}{4} \\ y &= 4 \end{aligned}$$

Finalmente, encontramos el valor de x a partir de la ecuación E.1:

$$\begin{aligned} x + y &= 10 \\ x + y - y &= 10 - y \\ x &= 10 - y \\ x &= 10 - 4 \\ x &= 6 \end{aligned}$$

La bolsa de 10 kilogramos contiene 6 kg de frijol tipo A, y 4 kg de frijol tipo B.

4. Encuentra un número entero positivo de dos dígitos, tal que el dígito de las unidades equivale a tres cuartas partes del dígito de las decenas. Si además el número se divide entre la suma de sus dígitos, el cociente resulta ser 6 y el residuo es 2.

   Solución: Sea n el número buscado, d el dígito de las decenas y u el dígito de las unidades. Al expresar a n como un número decimal tenemos la primera ecuación :

$$n = d * 10 + u \tag{E.4}$$

   Como el dígito de las unidades equivale a tres cuartas partes del dígito de las decenas, tenemos la segunda ecuación

$$u = \frac{3}{4} * d \tag{E.5}$$

   Sustituyendo esta ecuación en la anterior, tenemos:

$$\begin{aligned} n &= d * 10 + u \\ n &= d * 10 + \frac{3}{4} * d \\ n &= (10 + \frac{3}{4}) * d \\ n &= (10 * \frac{4}{4} + \frac{3}{4}) * d \\ n &= (\frac{40}{4} + \frac{3}{4}) * d \\ n &= \frac{43}{4} * d \qquad \text{(E.6)} \end{aligned}$$

Finalmente, como el número se divide entre las suma de sus dígitos y el cociente es 6 y el residuo es 2, tenemos la tercera ecuación:

$$\begin{aligned}
\frac{n}{d+u} &= 6+\frac{2}{d+u} \\
\frac{d+u}{1} * \frac{n}{d+u} &= \frac{d+u}{1} * \left(6+\frac{2}{d+u}\right) \\
n &= 6(d+u)+2
\end{aligned} \tag{E.7}$$

Igualando las ecuaciones E.6 y E.7 y sustituyendo u por la ecuación E.5, tenemos:

$$\begin{aligned}
\frac{43}{4} * d &= 6(d+u)+2 \\
\frac{43}{4} * d &= 6(d+\frac{3}{4} * d)+2 \\
\frac{43}{4} * d &= 6\left(1+\frac{3}{4}\right) * d+2 \\
\frac{43}{4} * d &= 6\left(\frac{4}{4}+\frac{3}{4}\right) * d+2 \\
\frac{43}{4} * d &= 6 * \frac{7}{4} * d+2 \\
\frac{43}{4} * d &= \frac{42}{4} * d+2 \\
4 * \frac{43}{4} * d &= 4 * \left(\frac{42}{4} * d+2\right) \\
43d &= 42d+4 * 2 \\
43d &= 42d+8 \\
43d-42d &= 42d-42d+8 \\
d &= 8
\end{aligned} \tag{E.8}$$

Finalmente, obtenemos u de la ecuación E.5, sustituyendo el valor encontrado de d:

$$\begin{aligned}
u &= \frac{3}{4} * d \\
u &= \frac{3}{4} * 8 \\
u &= \frac{24}{4} \\
u &= 6
\end{aligned} \tag{E.9}$$

De manera que n es el número "du" expresado en notación decimal, es decir, $n = 86$.

El número buscado es 86.

5. Cierto avión de combate situado inicialmente a $11,200$ metros de altura realiza un descenso en línea recta. Si después de 3 minutos desciende 420 metros, encuentre:

a) la ecuación de la recta que define la altura en metros en términos del tiempo en segundos.

b) con la ecuación de la recta encontrada, calcule el tiempo para que su altura sea $5,000$ metros.

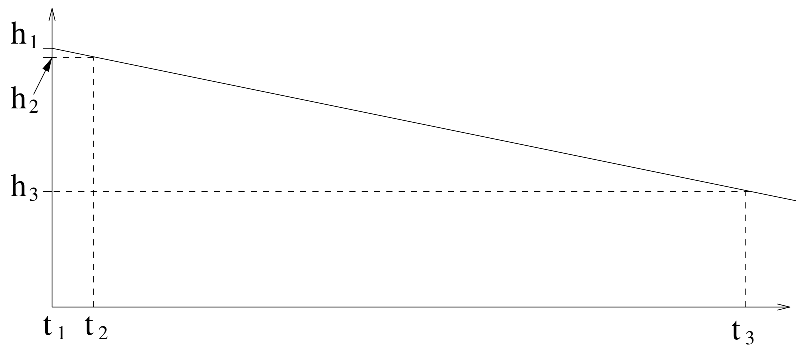


Figura E.1: Problema de avión que desciende siguiendo una línea recta.

Solución: Consideremos la recta

$$h = mt + b \tag{E.10}$$

Sea el tiempo $t_1 = 0$ cuando el avión está a una altura $h_1 = 11,200\,\text{m}$. En el tiempo $t_2 = 3\,\text{min} = 3\,\cancel{\text{min}}\frac{60\text{s}}{1\,\cancel{\text{min}}} = 180\,\text{s}$, la altura $h_2 = 11,200 - 420 = 10,780\,\text{m}$. En la figura E.1 se ilustra el descenso en línea recta del avión. Con estos datos podemos calcular la pendiente m:

$$\begin{aligned}
m &= \frac{h_2 - h_1}{t_2 - t_1} \\
m &= \frac{10780 - 11200}{180 - 0} \\
m &= \frac{-420}{180} \\
m &= \frac{-420/60}{180/60} \\
m &= -\frac{7}{3}\,\frac{\text{m}}{\text{s}}
\end{aligned}$$

De la ecuación E.10 podemos calcular b, utilizando el valor calculado de m y el punto (t_1, h_1):

$$\begin{aligned}
h &= mt + b \\
h - mt &= mt - mt + b \\
h - mt &= b \\
h_1 - mt_1 &= b \\
11200 - \frac{7}{3} * 0 = b & \\
11200 = b &
\end{aligned}$$

De la ecuación E.10 podemos despejar t, para calcular el tiempo t_3 cuando $h_3 = 5000$:

$$
\begin{aligned}
h &= mt + b \\
h - b &= mt + b - b \\
h - b &= mt \\
\frac{1}{m} * (h - b) &= mt * \frac{1}{m} \\
\frac{h - b}{m} &= t \\
\frac{h_3 - b}{m} &= t_3 \\
\frac{5000 - 11200}{-\frac{7}{3}} &= t_3 \\
\frac{-\frac{6200}{1}}{-\frac{7}{3}} &= t_3 \\
\frac{6200 * 3}{7} &= t_3 \\
2657.14 &= t_3
\end{aligned}
$$

a) La ecuación de la recta es $h = -\frac{7}{3}t + 11200$.
b) En 2,657.14 segundos el avión tendrá una altura de 5,000 m.

6. Cierto triángulo tiene dos lados de 10m y 6m. Si además el ángulo entre estos dos lados es de 30 grados, determine:
   a) la longitud del otro lado.
   b) el área del triángulo.

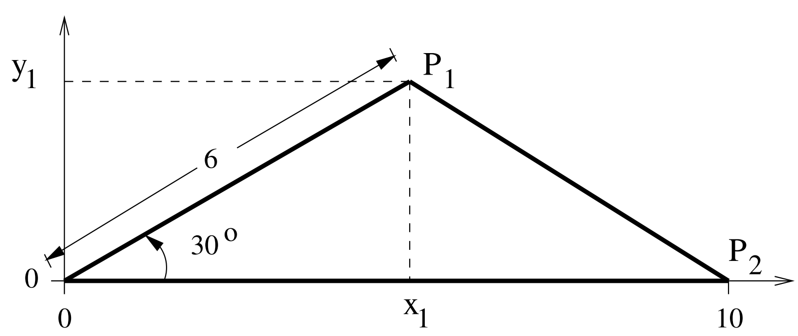


Figura E.2: Problema del triángulo con dos lados y un ángulo.

Solución: La figura E.2 muestra la situación planteada. y_1 será la altura del triángulo de base $b = 10$m y lado $a = 6$m. Podemos calcular y_1 (la altura del triángulo) aprovechando la función seno del ángulo de 30 grados:

$$\begin{aligned}
\frac{y_1}{a} &= \sin(30^\circ) \\
a * \frac{y_1}{a} &= a * \sin(30^\circ) \\
y_1 &= a * \sin(30^\circ) \\
y_1 &= 6 * 0.5 \\
y_1 &= 3
\end{aligned} \tag{E.11}$$

De manera que el área del triángulo, A, se puede calcular como:

$$\begin{aligned}
A &= \frac{b * y_1}{2} \\
A &= \frac{10\text{m} * 3\text{m}}{2} \\
A &= 15\text{m}^2
\end{aligned} \tag{E.12}$$

Por otro lado, si calculamos las coordenadas del punto P_1 de la figura E.2 y sabemos las coordenadas del punto P_2, podemos calcular la longitud del lado faltante, utilizando el Teorema de Pitágoras. Para calcular la coordenada x_1 podemos aprovechar la función coseno de 30 grados:

$$\begin{aligned}
\frac{x_1}{a} &= \cos(30^\circ) \\
a * \frac{x_1}{a} &= a * \cos(30^\circ) \\
x_1 &= a * \cos(30^\circ) \\
x_1 &= 6 * 0.8660 \\
x_1 &= 5.1961
\end{aligned} \tag{E.13}$$

De manera que la longitud del lado faltante, c, será la distancia entre los puntos $P_1 = (x_1, y_1)$ y $P_2 = (10, 0)$, es decir, $x_2 = 10$, $y_2 = 0$. Aplicando el Teorema de Pitágoras tenemos:

$$\begin{aligned}
c &= \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} \\
c &= \sqrt{(10 - 5.1961)^2 + (0 - 3)^2} \\
c &= 5.6637\text{m}
\end{aligned} \tag{E.14}$$

a) La longitud del lado faltante es de 5.6637m.
b) El área del triángulo es de 15m^2.

7. Si la población de una cierta bacteria se incrementa 100 veces cada hora, encuentre:

    a) Una expresión matemática para calcular la cantidad de bacterias en t horas. Suponga que en $t = 0$, se tienen 4 bacterias.

    b) Encuentre una expresión matemática para calcular el tiempo en que la población de bacterias alcanza 25000 bacterias, suponiendo que inicialmente están sólo 4 bacterias.

Solución: a)

Sea $P(t)$ la función que nos permitirá calcular la población de bacterias en el tiempo t expresado en horas. Veamos que sucede cuanto t parte de 0 y se va incrementando:

$$\begin{aligned} P(0) &= 100^0 * 4 \\ P(1) &= 100P(0) = 100 * 4 = 100^1 * 4 \\ P(2) &= 100P(1) = 100 * (100^1 * 4) = 100^2 * 4 \\ P(3) &= 100P(2) = 100 * (100^2 * 4) = 100^3 * 4 \end{aligned}$$

La expresión buscada es: $P(t) = (4)\ 100^t$.

Solución: b)

Para resolver este problema tomemos logaritmos en base 10 a ambos miembros de la igualdad obtenida y apliquemos las propiedades de los logaritmos que ya conocemos:

$$\begin{aligned} P(t) &= (4)\ 100^t \\ \log_{10}(P(t)) &= \log_{10}(4 *\ 100^t) \\ \log_{10}(P(t)) &= \log_{10}(4) + \log_{10}(100^t) \\ \log_{10}(P(t)) &= \log_{10}(4) + t * \log_{10}(100) \\ \log_{10}(P(t)) &= \log_{10}(4) + t * 2 \\ \log_{10}(P(t)) &= \log_{10}(4) + 2t \\ \log_{10}(P(t)) - \log_{10}(4) &= 2t \\ \frac{\log_{10}(P(t)) - \log_{10}(4)}{2} &= t \end{aligned}$$

Si $P(t) = 25000$, tenemos que t lo podemos calcular en Octave como:

```
>> t = (log10(25000) - log10(4))/2
t =  1.8979
```

b) El tiempo buscado es $t = 1.8979$ horas.

Apéndice F

Respuestas a la Evaluación 3

Enseguida se presenta la solución a los ejercicios de la evaluación 3 del capítulo 14.

1. Encuentre todos los valores de x que satisfacen la siguiente ecuación. Exprese sus resultados en términos del número a ($a \neq 0$).
$$\frac{a}{-2} + \frac{1}{\frac{-3}{2}(\frac{1}{2a-x} - \frac{1}{2a+x})} = \frac{a}{2}$$

Solución. Enseguida se muestran los pasos para encontrar los valores de x:

$$\begin{aligned}
\frac{a}{-2} + \frac{1}{\frac{-3}{2}(\frac{1}{2a-x} - \frac{1}{2a+x})} &= \frac{a}{2} \\
-\frac{a}{2} + \frac{1}{\frac{-3}{2}(\frac{1}{2a-x} - \frac{1}{2a+x})} &= \frac{a}{2} \\
\frac{a}{2} - \frac{a}{2} + \frac{1}{\frac{-3}{2}(\frac{1}{2a-x} - \frac{1}{2a+x})} &= \frac{a}{2} + \frac{a}{2} \\
\frac{1}{\frac{-3}{2}(\frac{1}{2a-x} - \frac{1}{2a+x})} &= a \\
\frac{1}{\frac{-3}{2}(\frac{1}{2a-x} * \frac{2a+x}{2a+x} - \frac{1}{2a+x} * \frac{2a-x}{2a-x})} &= a \\
\frac{1}{\frac{-3}{2}(\frac{2a+x}{4a^2-x^2} - \frac{2a-x}{4a^2-x^2})} &= a \\
\frac{1}{\frac{-3}{2}(\frac{2a+x-2a+x}{4a^2-x^2})} &= a \\
\frac{1}{\frac{-3}{2}(\frac{2x}{4a^2-x^2})} &= a \\
\frac{1}{\frac{-3x}{4a^2-x^2}} &= a
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{4a^2 - x^2}{-3x} &= a \\
(-3x) * \frac{4a^2 - x^2}{-3x} &= (-3x) * a \\
4a^2 - x^2 &= -3ax \\
4a^2 - x^2 + 3ax &= 3ax - 3ax \\
-x^2 + 3ax + 4a^2 &= 0 \\
(-1) * (-x^2 + 3ax + 4a^2) &= (-1) * 0 \\
x^2 - 3ax - 4a^2 &= 0 \\
x &= \frac{-(-3a) \pm \sqrt{(-3a)^2 - 4(1)(-4a^2)}}{2(1)} \\
x &= \frac{3a \pm \sqrt{9a^2 + 16a^2}}{2} \\
x &= \frac{3a \pm \sqrt{25a^2}}{2} \\
x &= \frac{3a \pm 5a}{2} \\
x_1 &= \frac{3a + 5a}{2} = 4a \\
x_2 &= \frac{3a - 5a}{2} = -a
\end{aligned}$$

Los valores que puede tomar x son: $x_1 = 4a$ y $x_2 = -a$

2. (1p) Tres baúles contienen monedas. Uno de ellos tiene una etiqueta que dice "oro", otro presenta una inscripción que se leé "bronce", y el tercero un letrero que dice "oro o plata". Uno de los baúles contiene exclusivamente monedas de oro, otro sólo monedas de plata y un tercero sólo monedas de bronce, pero los tres baúles están incorrectamente etiquetados. ¿Cuántos baúles hay que abrir como mínimo para determinar el contenido de cada uno de ellos?

   Solución. La observación clave es que los tres baúles están **incorrectamente etiquetados** y contienen monedas exclusivamente de un tipo metal. Iniciemos con el baúl con el letrero "oro o plata", la única posibilidad es que contenga monedas de bronce. Sigamos con el baúl con el letrero "oro" donde la única posibilidad es que contenga monedas de plata. Finalmente con el baúl con el letrero "bronce" donde la única posibilidad es que contenga monedas de oro. Así, sin abrir los baúles, se puede conocer su contenido.

   Número de baúles para abrir como mínimo: 0

3. Encuentre los conjuntos A y B si $A - B = \{1, 2, 3, a\}$, $A \cap B = \{5, b, c\}$ y $B - A = \{x, y, z, u, v\}$.

Solución. La figura F.1 muestra la situación planteada para $A - B$, $a \cap B$ y $B - A$. De la figura se deduce que: $A = \{1, 2, 3, 5, a, b, c\}$ y $B = \{5, b, c, x, y, z, u, v\}$.

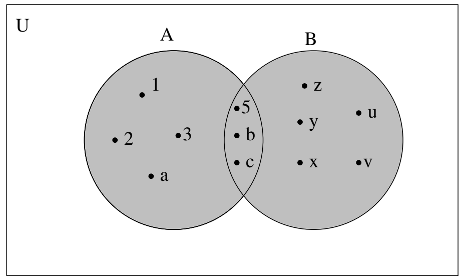


Figura F.1: Conjuntos A y B.

$A = \{1, 2, 3, 5, a, b, c\}$ y $B = \{5, b, c, x, y, z, u, v\}$

4. Considere el conjunto Universo como el conjunto N de los números naturales. Sea el conjunto $A = \{x|\ \frac{x}{2} \in N\}$ y el conjunto $B = \{x|\ \frac{x}{3} \in N\}$. Determine el resultado de $A^c \cap B$.

   Solución. Los conjuntos N, A, A^c y B son los siguientes:

$$\begin{aligned} N &= \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, \ldots\} \\ A &= \{2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16 \ldots\} \\ A^c &= N - A = \{1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, \ldots\} \\ B &= \{3, 6, 9, 12, 15, 18, \ldots\} \end{aligned}$$

   De manera que el conjunto pedido $A^c \cap B$ es el siguiente:

$$A^c \cap B = \{3, 9, 15, \ldots\}$$

   Es decir, todos los números múltiplos de 3 que sean impares.

$A^c \cap B = \{3, 9, 15, \ldots\}$

5. En una reunión coinciden un total de 125 personas, de los cuales 85 son policías y 57 son delincuentes. ¿Es posible determinar si hay policías delincuentes en la reunión? De ser posible, determine dicha cantidad de personas.

   Solución. Sean los conjuntos $P = \{x \mid x \;\; es \;\; policia\}$ y $D = \{x \mid x \;\; es \;\; delincuente\}$. Sabemos que $|P \cup D| = 125$, el total de personas. También sabemos que $|P| = 85$ y que $|D| = 57$. Como sabemos que:

$$|P \cup D| = |P| + |D| - |P \cap D|$$

Podemos despejar $|P \cap D|$, el número de policías que también son delincuentes:

$$\begin{aligned} |P \cap D| &= |P| + |D| - |P \cup D| \\ |P \cap D| &= 85 + 57 - 125 \\ |P \cap D| &= 17 \end{aligned}$$

Si se puede determinar, son 17.

6. Dados los conjuntos $A = \{a, b\}$, $B = \{1, 2, 3\}$ y $C = \{+, -\}$. Calcule: $(A \times B) \times C$.

   Solución. Calculemos primero $A \times B$,

$$A \times B = \{(a,1), (a,2), (a,3), (b,1), (b,2), (b,3)\}$$

   Enseguida podemos calcular el resultado pedido: $(A \times B) \times C$

$$\begin{aligned} (A \times B) \times C = \; & \{((a,1),+), ((a,2),+), ((a,3),+), ((b,1),+), ((b,2),+), ((b,3),+), \\ & ((a,1),-), ((a,2),-), ((a,3),-), ((b,1),-), ((b,2),-), ((b,3),-)\} \end{aligned}$$

7. Encuentre el valor de x y y en la siguiente ecuación:

$$(x + y\sqrt{-1})(1 - \sqrt{-4}) = -1 + \sqrt{-64}$$

   Solución. Introduciendo la unidad imaginaria, para facilitar los cálculos:

$$\begin{aligned} (x + y\sqrt{-1})(1 - \sqrt{-4}) &= -1 + \sqrt{-64} \\ (x + y\sqrt{-1})(1 - \sqrt{(4)(-1)}) &= -1 + \sqrt{(64)(-1)} \\ (x + y\sqrt{-1})(1 - \sqrt{4}\sqrt{-1}) &= -1 + \sqrt{64}\sqrt{-1} \\ (x + yi)(1 - 2i) &= -1 + 8i \\ x * (1 - 2i) + yi * (1 - 2i) &= -1 + 8i \\ x - 2xi + yi - 2yi^2 &= -1 + 8i \\ x - 2xi + yi - 2y(-1) &= -1 + 8i \\ x - 2xi + yi + 2y &= -1 + 8i \\ (x + 2y) + (-2x + y)i &= -1 + 8i \end{aligned}$$

   De manera que se deben de cumplir que las partes reales y las imaginarias sean las mismas:

$$x + 2y = -1 \tag{F.1}$$
$$-2x + y = 8 \tag{F.2}$$

Multiplicando la segunda ecuación por -2 y sumando a la primera tenemos:

$$\begin{aligned}
4x - 2y &= -16 \\
x + 2y &= -1 \\
4x + x + 0 &= -16 - 1 \\
5x &= -17 \\
\frac{1}{5} * 5x &= \frac{1}{5} * (-17) \\
x &= \frac{-17}{5} \qquad \text{(F.3)}
\end{aligned}$$

Despejando y de la ecuación F.2, tenemos:

$$\begin{aligned}
-2x + y &= 8 \\
2x - 2x + y &= 2x + 8 \\
y &= 2x + 8 \\
y &= 2(\frac{-17}{5}) + 8 \\
y &= \frac{-34}{5} + 8 * \frac{5}{5} \\
y &= \frac{-34}{5} + \frac{40}{5} \\
y &= \frac{-34 + 40}{5} \\
y &= \frac{6}{5} \qquad \text{(F.4)}
\end{aligned}$$

En octave podemos comprobar fácilmente este resultado:

```
>> (-17/5 + 6/5*sqrt(-1)) *(1 - sqrt(-4))
ans = -1 + 8i
```

Respuesta: $x = \frac{-17}{5}$, $y = \frac{6}{5}$.

8. Exprese el valor de x que cumple la siguiente ecuación:

$$\frac{-1 - \sqrt{-4}}{(1 + \sqrt{-3}) * (1 - \sqrt{-3})} = \sqrt{-25} * x$$

Solución. Introduciendo la unidad imaginaria, para facilitar los cálculos:

$$\begin{aligned}
\frac{-1 - \sqrt{-4}}{(1 + \sqrt{-3}) * (1 - \sqrt{-3})} &= \sqrt{-25} * x \\
\frac{-1 - \sqrt{(4)(-1)}}{(1 + \sqrt{(3)(-1)}) * (1 - \sqrt{(3)(-1)})} &= \sqrt{(25)(-1)} * x \\
\frac{-1 - \sqrt{4}\sqrt{-1}}{(1 + \sqrt{3}\sqrt{-1}) * (1 - \sqrt{3}\sqrt{-1})} &= \sqrt{25}\sqrt{-1} * x
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
\frac{-1-2i}{(1+\sqrt{3}i)*(1-\sqrt{3}i)} &= 5i*x\\
\frac{-1-2i}{1^2-(\sqrt{3}i)^2} &= 5i*x\\
\frac{-1-2i}{1-3i^2} &= 5i*x\\
\frac{-1-2i}{1-3(-1)} &= 5i*x\\
\frac{-1-2i}{1+3} &= 5i*x\\
\frac{-1-2i}{4} &= 5i*x\\
4*\frac{-1-2i}{4} &= 4*5i*x\\
-1-2i &= 20i*x\\
\frac{1}{20i}*(-1-2i) &= (\frac{1}{20i}20i)*x\\
\frac{-1-2i}{20i}*\frac{-20i}{-20i} &= x\\
\frac{(-1-2i)*(-20i)}{-(20^2)i^2} &= x\\
\frac{(-1-2i)*(-20i)}{-400*(-1)} &= x\\
\frac{20i+40i^2}{400} &= x\\
\frac{20i+40*(-1)}{400} &= x\\
\frac{-40+20i}{400} &= x\\
\frac{-40}{400}+\frac{20}{400}i &= x\\
\frac{-1}{10}+\frac{1}{20}i &= x
\end{aligned}
$$

En octave podemos comprobar fácilmente este resultado:

```
>> (-1 - sqrt(-4))/((1+sqrt(-3))*(1-sqrt(-3)))/sqrt(-25)
ans = -0.100000 + 0.050000i
```

Respuesta. $x = \frac{-1}{10} + \frac{1}{20}i$

Apéndice G

Respuestas a la Evaluación 4

Enseguida se presenta la solución a los ejercicios de la evaluación 4 del capítulo 19.

1. Encuentre el valor o valores de x que satisfacen la siguiente ecuación:

$$\frac{2x-6}{2(x-1)}\ \frac{1}{2x-4} - \frac{1}{4} = 0$$

Solución.

$$\begin{aligned}
\frac{2x-6}{2(x-1)}\ \frac{1}{2x-4} - \frac{1}{4} &= 0\\
\frac{2x-6}{2(x-1)}\ \frac{1}{2(x-2)} - \frac{1}{4} &= 0\\
\frac{2x-6}{4(x-1)(x-2)} - \frac{1}{4} &= 0\\
4\left(\frac{2x-6}{4(x-1)(x-2)} - \frac{1}{4}\right) &= 4*0\\
\frac{2x-6}{(x-1)(x-2)} - 1 &= 0\\
\frac{2x-6}{(x-1)(x-2)} - 1 + 1 &= 0+1\\
\frac{2x-6}{(x-1)(x-2)} &= 1\\
(x-1)(x-2)\ \frac{2x-6}{(x-1)(x-2)} &= (x-1)(x-2)*1\\
2x-6 &= (x-1)(x-2)\\
2x-6 &= x^2-3x+2\\
2x-6-2x+6 &= x^2-3x+2-2x+6\\
0 &= x^2-5x+8
\end{aligned}$$

Resolviendo la ecuación cuadrática $ax^2 + bx + c = 0$, siendo $a = 1$, $b = -5$ y $c = 8$, tenemos:

$$\begin{aligned}
x &= \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \\
x &= \frac{-(-5) \pm \sqrt{(-5)^2 - 4(1)(8)}}{2(1)} \\
x &= \frac{5 \pm \sqrt{25 - 32}}{2} \\
x &= \frac{5 \pm \sqrt{-7}}{2} \\
x &= \frac{5 \pm \sqrt{7(-1}}{2} \\
x &= \frac{5 \pm \sqrt{7}\sqrt{-1}}{2} \\
x &= \frac{5 \pm \sqrt{7}\, i}{2} \\
x &= \frac{5}{2} \pm \frac{\sqrt{7}\, i}{2} \\
x_1 &= \frac{5}{2} + \frac{\sqrt{7}}{2} i \\
x_2 &= \frac{5}{2} - \frac{\sqrt{7}}{2} i
\end{aligned}$$

Comprobando el resultado en Octave:

```
>> x1 = 5/2 + sqrt(7)/2 * i;
>> (2*x1 -6)/(2*(x1-1)) * 1/(2*x1-4) - 1/4
ans =  5.5511e-17 - 4.5896e-17i
>> x2 = 5/2 - sqrt(7)/2 * i;
>> (2*x2 -6)/(2*(x2-1)) * 1/(2*x2-4) - 1/4
ans = -2.7756e-17 + 1.8359e-17i
\end{verbatim}
```

La respuesta en ambos casos es muy cercana a cero.

Los posibles valores de x son: $x_1 = \frac{5}{2} + \frac{\sqrt{7}}{2} i$, $x_2 = \frac{5}{2} - \frac{\sqrt{7}}{2} i$.

2. Un número entero positivo n se compone de dos dígitos. Encuentre el número n si:

   a) La suma de los dos dígitos es 10 y el número original n es igual a 26 más el doble del número que contiene los dígitos intercambiados.
   Solución. Sea d el dígito de las decenas y u el dígito de las unidades. Si la suma de los dos dígitos es 10, tenemos la primera ecuación:

$$d + u = 10 \tag{G.1}$$

La condición de que el número original n es igual a 26 más el doble del número que contiene los dígitos intercambiados se puede expresar considerando los números en notación decimal:

$$\begin{aligned} 10d + u &= 26 + 2(10u + d) \\ 10d + u &= 26 + 20u + 2d \\ 10d + u - 20u - 2d &= 26 + 20u + 2d - 20u - 2d \\ 8d - 19u &= 26 \end{aligned} \tag{G.2}$$

El sistema de ecuaciones G.1 y G.2 se puede expresar como:

$$AX = B$$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 8 & -19 \end{bmatrix} \quad , \quad X = \begin{bmatrix} d \\ u \end{bmatrix} \quad , \quad B = \begin{bmatrix} 10 \\ 26 \end{bmatrix}$$

Podemos calcular A^{-1} fácilmente, recordando que:

La inversa de la matriz A, de tamaño 2×2, es la matriz A^{-1} siguiente:

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \quad , \quad A^{-1} = \frac{1}{|A|} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$$

Donde $|A| = (ad - bc)$ es el determinante de la matriz A. Para que exista la inversa de la matriz A, es necesario que el valor del determinante de la matriz sea diferente de cero. Si es cero, la inversa de esa matriz no existe.

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \begin{bmatrix} -19 & -1 \\ -8 & 1 \end{bmatrix}$$

$$|A| = (1)(-19) - (1)(8) = -27$$

De esta forma podemos obtener las variables buscadas $X = A^{-1}B$,

$$\begin{aligned} X &= \frac{1}{-27} \begin{bmatrix} -19 & -1 \\ -8 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 10 \\ 26 \end{bmatrix} \\ X &= \frac{1}{-27} \begin{bmatrix} (-19)(10) + (-1)(26) \\ (-8)(10) + (1)(26) \end{bmatrix} \\ X &= \frac{1}{-27} \begin{bmatrix} -190 - 26 \\ -80 + 26 \end{bmatrix} \\ X &= \frac{1}{-27} \begin{bmatrix} -216 \\ -54 \end{bmatrix} \\ X &= \begin{bmatrix} \frac{-216}{-27} \\ \frac{-54}{-27} \end{bmatrix} \\ X &= \begin{bmatrix} 8 \\ 2 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

De manera que $d = 8$ y $u = 2$, por lo tanto el número n es 82.

El número $n = 82$.

b) La suma de sus dígitos es 16 y al dividir el dígito que corresponde a las decenas entre el dígito que corresponde a las unidades el cociente es 1 y el residuo es 2.

Solución. Sea d el dígito de las decenas y u el dígito de las unidades. Si la suma de los dos dígitos es 16, tenemos la primera ecuación:

$$d + u = 16 \tag{G.3}$$

La condición de que al dividir el dígito que corresponde a las decenas entre el dígito que corresponde a las unidades el cociente es 1 y el residuo es 2 se puede expresar como:

$$\begin{aligned}
\frac{d}{u} &= 1 + \frac{2}{u} \\
u * \frac{d}{u} &= u * (1 + \frac{2}{u}) \\
d &= u + 2 \\
d - u &= u + 2 - u \\
d - u &= 2 \qquad \text{(G.4)}
\end{aligned}$$

El sistema de ecuaciones G.3 y G.4 se puede expresar como:

$$AX = B$$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \quad , \quad X = \begin{bmatrix} d \\ u \end{bmatrix} \quad , \quad B = \begin{bmatrix} 16 \\ 2 \end{bmatrix}$$

Podemos calcular A^{-1} fácilmente,

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$|A| = (1)(-1) - (1)(1) = -2$$

De esta forma podemos obtener las variables buscadas $X = A^{-1}B$,

$$\begin{aligned}
X &= \frac{1}{-2} \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 16 \\ 2 \end{bmatrix} \\
X &= \frac{1}{-2} \begin{bmatrix} (-1)(16) + (-1)(2) \\ (-1)(16) + (1)(2) \end{bmatrix} \\
X &= \frac{1}{-27} \begin{bmatrix} -16 - 2 \\ -16 + 2 \end{bmatrix} \\
X &= \frac{1}{-27} \begin{bmatrix} -18 \\ -14 \end{bmatrix} \\
X &= \begin{bmatrix} \frac{-18}{-2} \\ \frac{-14}{-2} \end{bmatrix} \\
X &= \begin{bmatrix} 9 \\ 7 \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

De manera que $d = 9$ y $u = 7$, por lo tanto el número $n = 97$.

El número $n = 97$.

3. La diferencia de las edades de dos personas es igual a una quinta parte de su suma. Si además sabemos que el doble de edad de la persona mayor más la edad de la persona menor es 160. Determine las edades de las dos personas. Para resolver este ejercicio forme el sistema de ecuaciones y utilice el método de Gauss-Jordan para encontrar la solución.

   Solución. Si x_1 es la edad de la persona mayor y x_2 la edad de la persona menor. Si la diferencia de las edades de dos personas es igual a una quinta parte de su suma, tenemos:

$$\begin{aligned}
x_1 - x_2 &= \frac{1}{5}(x_1 + x_2) \\
(5)(x_1 - x_2) &= (5)\frac{1}{5}(x_1 + x_2) \\
5x_1 - 5x_2 &= x_1 + x_2 \\
5x_1 - 5x_2 - x_1 - x_2 &= x_1 + x_2 - x_1 - x_2 \\
4x_1 - 6x_2 &= 0 \\
\frac{1}{2}(4x_1 - 6x_2) &= \frac{1}{2} * 0 \\
2x_1 - 3x_2 &= 0 \qquad \text{(G.5)}
\end{aligned}$$

   Si además sabemos que el doble de edad de la persona mayor más la edad de la persona menor es 160, podemos plantear la segunda ecuación:

$$2x_1 + x_2 = 160 \qquad \text{(G.6)}$$

   Formemos la matriz extendida de este sistema de ecuaciones (G.5 y G.6) para aplicar el método de Gauss-Jordan:

$$\begin{bmatrix} 2 & -3 & 0 \\ 2 & 1 & 160 \end{bmatrix}$$

   Operación elemental: $R_1 \leftarrow \frac{1}{2} * R_1$

$$\begin{bmatrix} 1 & \frac{-3}{2} & 0 \\ 2 & 1 & 160 \end{bmatrix}$$

   Operación elemental: $R_2 \leftarrow R_2 - 2 * R_1$

$$\begin{bmatrix} 1 & \frac{-3}{2} & 0 \\ 0 & 4 & 160 \end{bmatrix}$$

   Operación elemental: $R_2 \leftarrow \frac{1}{4} * R_2$

$$\begin{bmatrix} 1 & \frac{-3}{2} & 0 \\ 0 & 1 & 40 \end{bmatrix}$$

Operación elemental: $R_1 \leftarrow R_1 - \frac{-3}{2} * R_2$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 60 \\ 0 & 1 & 40 \end{bmatrix}$$

De manera que obtenemos: $x_1 = 60$ y $x_2 = 40$.

La persona mayor tiene 60 años y la persona menor tiene 40 años.

4. Una familia tiene dos hermanos menores y dos hermanas mayores. Al dividir la suma de las edades de las hermanas entre la suma de las edades de los hermanos el cociente es 2 y el residuo es 5. Si además se conoce que la edad del hermano menor equivale a las dos terceras partes de la edad del hermano mayor, la edad de la hermana menor equivale a cinco sextas partes de la edad de la hermana mayor y la edad del hermano menor equivale a un tercio de la edad de la hermana mayor, determine las edades de los 4 hermanos. Formule el sistema de ecuaciones que representa este problema y determine las edades pedidas.

   Solución: Sean h_1 y h_2 las edades de los hermanos menor y mayor respectivamente y sean m_1 y m_2 las edades de los hermanas menor y mayor respectivamente. De las condiciones del problema tenemos:

$$\begin{aligned}
\frac{m_1+m_2}{h_1+h_2} &= 2+\frac{5}{h_1+h_2} \\
\frac{h_1+h_2}{1} * \frac{m_1+m_2}{h_1+h_2} &= \frac{h_1+h_2}{1} * (2+\frac{5}{h_1+h_2}) \\
m_1+m_2 &= 2*(h_1+h_2)+5 \\
m_1+m_2 &= 2h_1+2h_2+5 \\
m_1+m_2-2h_1-2h_2 &= 2h_1+2h_2+5-2h_1-2h_2 \\
m_1+m_2-2h_1-2h_2 &= 5 \qquad \text{(G.7)}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
h_1 &= \frac{2}{3}h_2 \\
h_1-\frac{2}{3}h_2 &= \frac{2}{3}h_2-\frac{2}{3}h_2 \\
h_1-\frac{2}{3}h_2 &= 0 \qquad \text{(G.8)} \\
m_1 &= \frac{5}{6}m_2 \\
m_1-\frac{5}{6}m_2 &= \frac{5}{6}m_2-\frac{5}{6}m_2 \\
m_1-\frac{5}{6}m_2 &= 0 \qquad \text{(G.9)} \\
h_1 &= \frac{1}{3}m_2 \\
-\frac{1}{3}m_2+h_1 &= -\frac{1}{3}m_2+\frac{1}{3}m_2 \\
-\frac{1}{3}m_2+h_1 &= 0 \qquad \text{(G.10)}
\end{aligned}$$

Con las ecuaciones anteriores que tienen número podemos formar el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{aligned}
(1)m_1 + (1)m_2 + (-2)h_1 + (-2)h_2 &= 5 \\
(0)m_1 + (0)m_2 + (1)h_1 + (-\frac{2}{3})h_2 &= 0 \\
(1)m_1 + (-\frac{5}{6})m_2 + (0)h_1 + (0)h_2 &= 0 \\
(0)m_1 + (-\frac{1}{3})m_2 + (1)h_1 + (0)h_2 &= 0
\end{aligned}$$

El cual se puede representar como $AX = B$, donde las matrices A, X y B son las siguientes matrices:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{2}{3} \\ 1 & -\frac{5}{6} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{3} & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad , \quad X = \begin{bmatrix} m_1 \\ m_2 \\ h_1 \\ h_2 \end{bmatrix} \quad , \quad B = \begin{bmatrix} 5 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

El sistema se puede resolver fácilmente utilizando la inversa. En Octave tenemos:

```
>>A=[1 1 -2 -2; 0 0 1 -2/3; 1 -5/6 0 0; 0 -1/3 1 0]
A =
   1.00000   1.00000  -2.00000  -2.00000
   0.00000   0.00000   1.00000  -0.66667
   1.00000  -0.83333   0.00000   0.00000
   0.00000  -0.33333   1.00000   0.00000
>> B=[5; 0; 0; 0]
B =
   5
   0
   0
   0
>> X = inv(A)*B
X =
   25.0000
   30.0000
   10.0000
   15.0000
```

Las edades son: hermana menor de 25 años, hermana mayor de 30, hermano menor de 10 y hermano mayor de 15.

5. En los siguientes sistemas de ecuaciones, determine para qué valores de K el sistema:

   - No tiene solución.
   - Tiene un número infinito de soluciones. Encuentre todos los posibles valores para x y y.

- Tiene solución única. Encuentre los valores únicos de x y de y.

a)

$$\begin{aligned} 2x + 4y &= 10 \\ 3x - 5y &= -6K \end{aligned}$$

Solución. Formemos la matriz extendida de este sistema de ecuaciones para aplicar el método de Gauss-Jordan:

$$\begin{bmatrix} 2 & 4 & 10 \\ 3 & -5 & -6K \end{bmatrix}$$

Operación elemental: $R_1 \leftarrow \frac{1}{2} * R_1$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 3 & -5 & -6K \end{bmatrix}$$

Operación elemental: $R_2 \leftarrow R_2 - 3 * R_1$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 0 & -11 & -6K - 15 \end{bmatrix}$$

Operación elemental: $R_2 \leftarrow \frac{1}{-11} * R_2$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 0 & 1 & \frac{6K+15}{11} \end{bmatrix}$$

Operación elemental: $R_1 \leftarrow R_1 - 2 * R_2$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 5 - 2(\frac{6K+15}{11}) \\ 0 & 1 & \frac{6K+15}{11} \end{bmatrix}$$

Podemos simplificar un poco más el valor de x:

$$\begin{aligned} x &= 5 - 2(\frac{6K + 15}{11}) \\ x &= (5)(\frac{11}{11}) + \frac{-12K - 30}{11} \\ x &= \frac{55}{11} + \frac{-12K - 30}{11} \\ x &= \frac{-12K - 30 + 55}{11} \\ x &= \frac{-12K + 25}{11} \end{aligned}$$

El sistema tiene una solución única dada por:

$$\begin{aligned} x &= \frac{-12K + 25}{11} \\ y &= \frac{6K + 15}{11} \end{aligned}$$

b)

$$\begin{array}{rrl} x & +Ky & = 3 \\ 2x & -2y & = -6K \end{array}$$

Solución. Formemos la matriz extendida de este sistema de ecuaciones para aplicar el método de Gauss-Jordan:

$$\begin{bmatrix} 1 & K & 3 \\ 2 & -2 & -6K \end{bmatrix}$$

Operación elemental: $R_2 \leftarrow R_2 - 2 * R_1$

$$\begin{bmatrix} 1 & K & 3 \\ 0 & -2-2K & -6K-6 \end{bmatrix}$$

Para el siguiente paso tenemos dos casos: a) $-2-2K = 0$ y b) $-2-2K \neq 0$.

Veamos el primer caso, cuando $-2-2K = 0$. Determinemos el valor de K,

$$\begin{aligned} -2-2K &= 0 \\ -2-2K+2K &= 0+2K \\ -2 &= 2K \\ (\frac{1}{2})(-2) &= (\frac{1}{2})2K \\ -1 &= K \end{aligned}$$

De manera que la matriz extendida, con $K = -1$, es la siguiente:

$$\begin{bmatrix} 1 & K & 3 \\ 0 & -2-2K & -6K-6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

De esta forma el sistema tiene un número infinito de soluciones definidas por la primera ecuación:

$$x - y = 3$$

Si despejamos y tenemos:

$$\begin{aligned} x-y &= 3 \\ x-y-x &= 3-x \\ -y &= 3-x \\ (-1)(-y) &= (-1)(3-x) \\ y &= x-3 \end{aligned}$$

Si $x = \alpha$, tenemos que $y = \alpha - 3$, siendo α un número real.

Veamos ahora el segundo caso, cuando $-2-2K \neq 0$, es decir, cuando $K \neq -1$. En este caso podemos continuar con el método de Gauss-Jordan:

Operación elemental: $R_2 \leftarrow \frac{1}{-2-2K} * R_2$

$$\begin{bmatrix} 1 & K & 3 \\ 0 & 1 & \frac{-6K-6}{-2-2K} \end{bmatrix}$$

Podemos simplificar el valor de y:

$$\begin{aligned} \frac{-6K-6}{-2-2K} &= \frac{-6(K+1)}{-2(K+1)} \\ \frac{-6K-6}{-2-2K} &= \frac{-6}{-2} \\ \frac{-6K-6}{-2-2K} &= 3 \end{aligned}$$

Volviendo a la matriz extendida, tenemos:

$$\begin{bmatrix} 1 & K & 3 \\ 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

Operación elemental: $R_1 \leftarrow R_1 - K * R_2$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 3-3K \\ 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

Encontrando en este caso que la solución única es $x = 3 - 3K$ y $y = 3$.

El sistema tiene una solución única, cuando $K \neq -1$, y esta dada por:

$$\begin{aligned} x &= 3 - 3K \\ y &= 3 \end{aligned}$$

El sistema tiene infinidad de soluciones, cuando $K = -1$, y están dadas por:

$$\begin{aligned} x &= \alpha \\ y &= \alpha - 3 \end{aligned}$$

Siendo α un número real.
La opción sin solución no se presenta en este ejercicio.

6. Determine el polinomio que tiene las siguientes raíces: $x_1 = 0$, $x_2 = \sqrt{-4}$, $x_3 = -\sqrt{-4}$, $x_4 = 2 + \sqrt{-9}$, $x_5 = 2 - \sqrt{-9}$.

Solución. Las raíces se pueden expresar como:

$$\begin{aligned} x_1 &= 0 \\ x_2 &= \sqrt{-4} = \sqrt{(4)(-1)} = \sqrt{4}\sqrt{-1} = 2i \\ x_3 &= -\sqrt{-4} = -\sqrt{(4)(-1)} = -\sqrt{4}\sqrt{-1} = -2i \\ x_4 &= 2 + \sqrt{-9} = 2 + \sqrt{(9)(-1)} = 2 + \sqrt{9}\sqrt{-1} = 2 + 3i \\ x_5 &= 2 - \sqrt{-9} = 2 - \sqrt{(9)(-1)} = 2 - \sqrt{9}\sqrt{-1} = 2 - 3i \end{aligned}$$

De manera que el polinomio tiene la forma:

$$
\begin{aligned}
P(x) &= C*(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)(x-x_4)(x-x_5)\\
P(x) &= C*(x-0)(x-2i)(x-(-2i))(x-(2+3i))(x-(2-3i))\\
P(x) &= C*(x)[(x-2i)(x+2i)][(x+(-2-3i))(x+(-2+3i))]\\
P(x) &= C*(x)[(x^2-(2i)^2][x^2+x(-2+3i)+x(-2-3i)+(-2-3i)(-2+3i)]\\
P(x) &= C*(x)[(x^2-(2^2i^2)][x^2-2x+3xi-2x-3xi+((-2)^2-(3i)^2)]\\
P(x) &= C*(x)[(x^2-(4)(-1)][x^2-4x+(4-(3^2i^2)]\\
P(x) &= C*(x)[(x^2+4][x^2-4x+(4-(9)(-1))]\\
P(x) &= C*(x)[(x^2+4][x^2-4x+(4+(9))]\\
P(x) &= C*(x)[(x^2+4][x^2-4x+13]\\
P(x) &= C*[(x^3+4x][x^2-4x+13]\\
P(x) &= C*[(x^5-4x^4+13x^3+4x^3-16x^2+52x]\\
P(x) &= C*[(x^5-4x^4+17x^3-16x^2+52x]
\end{aligned}
$$

Este resultado lo podemos comprobar fácilmente con Octave, para obtener las raíces del polinomio:

```
>> roots([1 -4 17 -16 52 0])
ans =
   2.00000 + 3.00000i
   2.00000 - 3.00000i
  -0.00000 + 2.00000i
  -0.00000 - 2.00000i
   0.00000 + 0.00000i
```

El polinomio buscado es:

$$P(x) = C*(x^5-4x^4+17x^3-16x^2+52x)$$

Siendo C un número real distinto de cero.

7. Encuentre el o los intervalos de los números reales en los cuales se cumplen la siguiente desigualdad, utilizando el método de los intervalos:

$$\frac{3x+3}{4x^2-9} \geq x$$

Solución. La desigualdad anterior también se puede expresar como:

$$\begin{aligned}
\frac{3x+3}{4x^2-9} &\geq x \\
\frac{3x+3}{4x^2-9} - x &\geq x - x \\
\frac{3x+3}{4x^2-9} - x &\geq 0 \\
\frac{3x+3}{4x^2-9} - x\frac{4x^2-9}{4x^2-9} &\geq 0 \\
\frac{3x+3}{4x^2-9} - \frac{4x^3-9x}{4x^2-9} &\geq 0 \\
\frac{3x+3}{4x^2-9} + \frac{-4x^3+9x}{4x^2-9} &\geq 0 \\
\frac{3x+3-4x^3+9x}{4x^2-9} &\geq 0 \\
\frac{-4x^3+12x+3}{4x^2-9} &\geq 0 \\
(-1)\frac{-4x^3+12x+3}{4x^2-9} &\leq (-1)0 \\
\frac{4x^3-12x-3}{4x^2-9} &\leq 0 \\
\frac{4x^3-12x-3}{(2x-3)(2x+3)} &\leq 0
\end{aligned}$$

Para encontrar las raíces del polinomio podemos utilizar Octave:

```
>> roots([4 0 -12 -3])
ans =
   1.84563
  -1.59007
  -0.25556
```

Las raíces del denominador son:

$$\begin{aligned}
2x-3 &= 0 \\
2x-3+3 &= 0+3 \\
2x &= 3 \\
\frac{1}{2}\,2x &= \frac{1}{2}(3) \\
x_2 &= \frac{3}{2}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}2x+3 &= 0\\ 2x+3-3 &= 0-3\\ 2x &= -3\\ \frac{1}{2}\,2x &= \frac{1}{2}(-3)\\ x_4 &= -\frac{3}{2}\end{aligned}$$

De manera que tenemos 5 raíces: $x_1 = -1.59$, $x_2 = -1.5$, $x_3 = -0.25$, $x_4 = 1.5$ y $x_5 = 1.84$; las cuales generan 6 intervalos:

	$(-\infty, -1.59]$	$(-1.59, -1.5)$	$(-1.5, -0.25]$	$(-0.25, 1.5)$	$(1.5, 1.84]$	$(1.84, \infty)$
signo$(4x^3 - 12x - 3)$	-1	1	1	-1	-1	1
signo$(2x - 3)$	-1	-1	-1	-1	1	1
signo$(2x + 3)$	-1	-1	1	1	1	1
signo$(\frac{4x^3-12x-3}{(2x-3)(2x+3)})$	-1	1	-1	1	-1	1

El resultado buscado es:

$$x \in (-\infty, -1.59] \cup (-1.5, -0.25] \cup (1.5, 1.84]$$

El resultado lo podemos comprobar fácilmente usando Octave y la expresión original de la desigualdad:

```
>> x=[-3:0.001:3];
>> y=(3*x+3)./(4*x.^2 -9) - x;
>> plot(x,y)
>> hold on
>> y1=sign(y);
>> plot(x,y1)
>> axis([-3 3 -3 3])
```

La figura G.1 presenta la gráfica, donde se puede observar que los intervalos encontrados son los correctos.

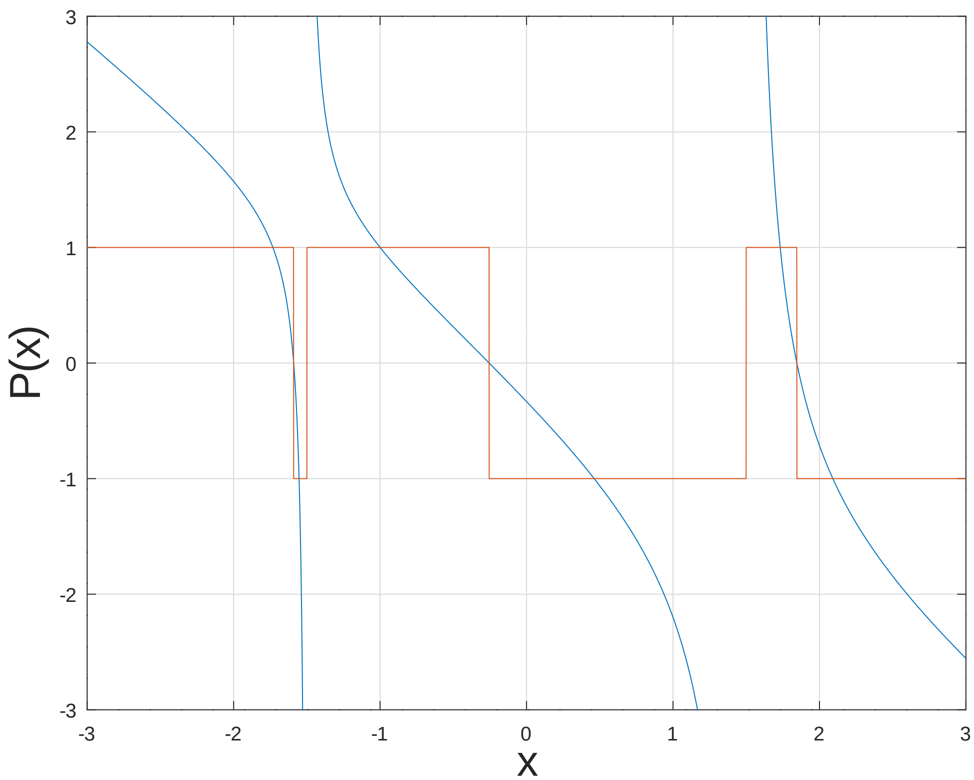


Figura G.1: Gráfica de la desigualdad del ejercicio 6.

Apéndice H

Respuestas a ejercicios impares

Capítulo 1. Los números enteros y la suma

1. $a = 7$, **3.** $a = 7$, **5**. $a = 1$, **7**. $a = \overline{2}$, **9.** $a = \overline{7}$, **11.** $a = 6$, **13**. $a = 1$, **15.** $2 = 2$, **17.** $2 < 3$, **19.** $0 = 0$, **21.** $\overline{1} = \overline{1}$, **23.** $\overline{3} < \overline{2}$, **25.** 3 manzanas, **27.** 7 manzanas, **29.** 3 grados, **31.** debo 2 pesos.

Capítulo 2. La resta como una suma

1. $a = 1$, **3.** $a = 1$, **5**. $a = -1$, **7**. $a = -7$, **9.** $a = -9$, **11.** $a = 0$, **13**. $a = -8$, **15.** $a = 5$, **17.** $a = 1$, **19.** $a = 0$.

Capítulo 3. La multiplicación y la potencia

1. $a = 10$, **3.** $a = -12$, **5**. $a = 6$, **7**. $a = 0$, **9.** $a = -29$, **11.** $a = 256$, **13**. $a = -110$, **15.** $a = 1101$, **17.** $1 * 10^2 + 2 * 10^2 + 3 * 10^0$ (ciento veintitrés), **19.** $1 * 10^5 + 1 * 10^0$ (cien mil uno), **21.** $1 * 10^8 + 2 * 10^3 + 2 * 10^0$ (cien millones tres mil dos), **23.** $1 * 10^9 + 4 * 10^5 + 1 * 10^4 + 3 * 10^1$ (mil millones cuatrocientos diez mil treint**a**).

Capítulo 4. Números fraccionarios y la división

1. $\frac{1}{2} = \frac{10}{20}$, **3.** $\frac{1}{3} > 0.3$, **5**. $\frac{7}{3} > \frac{9}{4}$, **7**. $\frac{5}{3} > 1.6$, **9.** $a = \frac{10}{3}$, **11.** $a = -\frac{2}{3}$, **13**. $a = 1 + \frac{46}{99}$, **15.** $a = \frac{19}{30}$, **17.** $a = -\frac{1}{10}$, **19.** $a = -1$, **21.** $a = \frac{1}{42}$, **23.** $a = \frac{1}{4}$, **25.** $a = 2$, **27.** $a = 3 + \frac{1}{3}$, **29.** $a = 3 + \frac{6}{7}$, **31.** $a = 429 + \frac{2}{3}$,

Capítulo 5. Algoritmos de las operaciones básicas

1. $a = 140$, **3.** $a = 155$, **5.** $a = 13,343$, **7.** $a = 8,283$, **9.** $a = 8,908$, **11.** $a = 2,210$, **13.** $a = 15,129$, **15.** $a = 2,592,590$, **17.** $a = -19,392$, **19.** $a = 0$, **21.** $a = 3 + \frac{1}{3}$, **23.** $a = 102 + \frac{10}{12}$, **25.** $a = 3506 + \frac{4}{25}$, **27.** $a = 429$, **29.** $5! = 120$, $8! = 40320$, $10! = 3628800$, **31.** 840 jabones.

Capítulo 6. Evaluación 1. Ver Apéndice B.

Capítulo 7. Conceptos geométricos básicos

1. a) 0.2194 rad, b) 0.5324 rad, c) $57° \ 17' \ 44.16''$ d) $45° \ 0' \ 0''$, **3.** $P = 16$, $A = 12$, **5.** $P = 240$ m, $A = 2700$ m^2, **7.** $P = 20\pi$ cm, $A = 100\pi$ cm^2, **9.** $11.3097 \ \frac{\text{km}}{\text{h}}$.

Capítulo 8. Las ecuaciones

1. $\$199,000.00$, **3.** los números 15 y 16, **5.** 2.4 horas, **7.** 6.0198 centímetros, **9.** $y = -\frac{1}{2}\ x + \frac{7}{2}$, **11.** $x = -5.2$, $y = 1.1$, **13.** Área de 20.663 m^2.

Capítulo 9. Trigonometría

1. área de 6 m^2, **3.** $\theta_1 = 30°$, $\theta_2 = 60°$ y $\theta_3 = 90°$, **5.** 433.01 m.

7. Consideremos un punto (x, y) sobre una recta $y = mx$ que pasa por el origen. Calculemos la función $\sin(\theta)$:

$$\begin{aligned}
\sin(\theta) &= \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} \\
\sin(\theta) &= \frac{mx}{\sqrt{x^2+(mx)^2}} \\
\sin(\theta) &= \frac{mx}{\sqrt{x^2+m^2x^2}} \\
\sin(\theta) &= \frac{mx}{\sqrt{x^2(1+m^2)}} \\
\sin(\theta) &= \frac{mx}{x\sqrt{(1+m^2)}} \\
\sin(\theta) &= \frac{m}{\sqrt{(1+m^2)}} \\
\sin(\theta) &= \frac{\tan(\theta)}{\sqrt{(1+(\tan^2(\theta))}}
\end{aligned}$$

Donde se ha aprovechado que $m = \tan(\theta)$. La función $\sin(\theta)$ no depende del punto en cuestión (x, y), por lo tanto no depende del tamaño del triángulo. La demostración de la función $\cos(\theta)$ es similar:

$$\begin{aligned}
\cos(\theta) &= \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} \\
\cos(\theta) &= \frac{x}{\sqrt{x^2+(mx)^2}} \\
\cos(\theta) &= \frac{x}{\sqrt{x^2+m^2x^2}} \\
\cos(\theta) &= \frac{x}{\sqrt{x^2(1+m^2)}} \\
\cos(\theta) &= \frac{x}{x\sqrt{(1+m^2)}} \\
\cos(\theta) &= \frac{1}{\sqrt{(1+m^2)}} \\
\cos(\theta) &= \frac{1}{\sqrt{(1+(\tan^2(\theta))}}
\end{aligned}$$

9. $y = -1.7321x$.

Capítulo 10. Las funciones exponencial y logarítmica

1. a) Queda el $65.975\,\%$ del material original, **b)** tiene una antigüedad de $10,000$ años.

3. Realizando el cálculo en Octave:

```
>> logaritmo_10 = log(1000000) / log(10)
logaritmo_10 =  6.0000
```

La respuesta es 6.

Capítulo 11. Evaluación 2. Ver Apéndice C.

Capítulo 12. Lógica y conjuntos

1. En las tablas H.1) ((**a**) y H.2 (**b**) se muestran las tablas de verdad de cada inciso.

p	q	$p \to q$	$\neg p$	$(\neg p) \vee q$
F	F	V	V	V
F	V	V	V	V
V	F	F	F	F
V	V	V	F	V

Tabla H.1: Tabla de verdad del ejercicio 12.1a. Observe que la tercera y la última columna son idénticas, en los cuatro renglones.

p	q	$p \to q$	$\neg q$	$\neg p$	$(\neg q) \to (\neg p$
F	F	V	V	V	V
F	V	V	F	V	V
V	F	F	V	F	F
V	V	V	F	F	V

Tabla H.2: Tabla de verdad del ejercicio 12.1b. Observe que la tercera y la última columna son idénticas, en los cuatro renglones.

3.

a) $P = \{1, 2, 3, \ldots\}$,

b) $P = \{0, 1, 2, \ldots\}$,

c) $P = \{\ldots, -3, -2, -1\}$,

d) $P = \{\ldots, -3, -2, -1, 1, 2, 3, \ldots\}$,

e) $P = \{\ldots, -6, -4, -2, 2, 4, 6, \ldots\}$.

5.

a) $P = \{\ldots, -6, -4, -2, 0, 2, 4, 6, \ldots\}$, $P = \{x \in \ Z \mid \exists_{k \in Z} \ \ (x = 2 * k)\}$,

b) $P = \{\ldots, -5, -3, -1, 1, 3, 5, \ldots\}$, $P = \{x \in \ Z \mid \exists_{k \in Z} \ \ (x = 2 * k + 1)\}$,

c) $P = \{\ldots, -6, -3, 0, 3, 6, 9, \ldots\}$, $P = \{x \in \ Z \mid \exists_{k \in Z} \ \ (x = 3 * k)\}$.

7. a) $A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$,

b) $A \cap B = \{1, 2, 3, 4\}$,

c) $A - B = \{5, 6, 7, 8, 9\}$,

d) $A^c = \{10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20\}$,

e) $B^c = \{5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20\}$,

f) $A \cap B^c = \{5, 6, 7, 8, 9\}$,

g) $(A - C) \cap B^c = \{5, 6, 7, 9, 10, 11\}$,

h) $A \subseteq B \equiv F$.

9. a) 50, **b)** $|A \times B| = |A||B|$.

11. a) $27^4 * 10^4$, **b)** $27^3 * 10^4$, **c)** $27^2 * 10^4$, **d)** $27^4 * 10^3$.

13. a) función inyectiva, **b)** función inyectiva, **c)** función inyectiva.

Capítulo 13. Números complejos

1. a) $z = 4 + 8i$, **b)** $z = -5 - 7i$, **c)** $z = 2$, **d)** $z = -2i$, **e)** $z = 2i$.

3. $k_1 = 5$, $k_2 = 1$,

5. a) $z_0 = 3$, $z_1 = -3$, **b)** $z_0 = 3i$, $z_1 = -3i$, **c)** $z_k = 2\ \angle(0{+}36°k)$, $\;\; k = 0, 1, 2, \ldots 9$, **d)** $z_k = \sqrt[9]{2}\ \angle(5°{+}40°k)$, $k = 0, 1, 2, \ldots 8$, **e)** $z_0 = 1 + i$, $z_1 = 1 - i$, **f)** $z_0 = 0$, $z_1 = 0$, $z_2 = 1$, **g)** $z_0 = 0$, $z_1 = 0$, $z_2 = i$, $z_3 = -i$.

Capítulo 14. Evaluación 3. Ver Apéndice D.

Capítulo 15. Sistemas de ecuaciones lineales

1. El bat cuesta 105 pesos y la pelota 5 pesos.

3. $x = 0$, $y = 1$, $z = 2$.

5. $x = k$, $y = -k$, $z = 0$.

7. $x = 3k$, $y = -2k$, $z = 0$.

9. $x = 0$, $y = \alpha$, $z = -\alpha$ (siendo α un número real).

Capítulo 16. Conceptos básicos de matrices

1. $x = 1$, $y = 2$, $z = 3$.

3.

$$\begin{aligned}
\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} * \frac{1}{ad-bc}\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix} &= \frac{1}{ad-bc}\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix} \\
&= \frac{1}{ad-bc}\begin{bmatrix} ad-bc & -ab+ab \\ cd-cd & -bc+ad \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{1}{ad-bc}\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} &= \frac{1}{ad-bc}\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \\
&= \frac{1}{ad-bc}\begin{bmatrix} ad-bc & bd-bd \\ -ac+ac & -bc+ad \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

5. Se formula el sistema de ecuaciones $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ y se obtiene la inversa de la matriz $\mathbf{A}$. La solución se obtiene como $\mathbf{x} = \mathbf{A}^{-1} * \mathbf{b}$, obteniendo: $x = k$, $y = -k$, $z = 0$.

7. Enseguida se presenta la solución utilizando Octave:

```
>> x1=1; y1=10; x2=2; y2=9; x3=3; y3=7; x4=4; y4=8;
>> A=[x1 1; x2 1; x3 1; x4 1];   B=[y1; y2; y3; y4];
```

```
>> X=inv(A'*A) * A' * B
X =
   -0.80000
   10.50000
>> plot([x1 x2 x3 x4],[y1 y2 y3 y4], '*')
>> hold on
>> axis([0 5 0 11])
>> cx=[0 5];
>> y = -0.8 .* cx + 10.5;
>> plot(cx,y)
>> xlabel('x', 'fontsize',22)
>> ylabel('y', 'fontsize',22)
```

De manera que la recta calculada es: $y = -0.8x + 10.5$. La gráfica se presenta en la figura H.1.

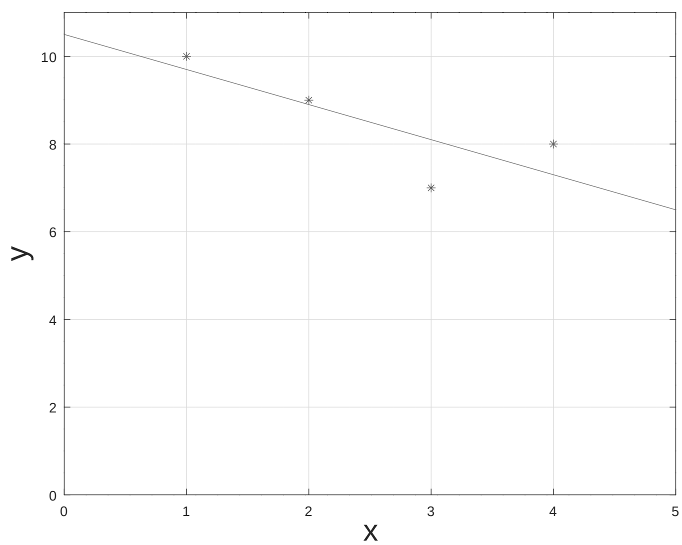


Figura H.1: Gráfica del ejercicio 7.

9. La distancia es $d = 1.2127$.

11. Enseguida se presenta la solución utilizando Octave:

```
>> A=[1.8 0.4; 0.4 1.2]
A =
   1.80000   0.40000
   0.40000   1.20000
>> [U, D] = eig(A)
U =
   0.44721  -0.89443
  -0.89443  -0.44721
D =
Diagonal Matrix
   1   0
   0   2
```

Capítulo 17. Polinomios

1. $P(x) = -2x + 5$.

3. $P(x) = 0.0625x^2 - 0.125x + 2.0625$.

5. $P(x) = -0.0061728x^3 + 0.3333333x^2 - 3.2777778x + 10$.

7. a) $3*(x^10+x^3+x^2) = 3x^10+3x^3+3x^2)$, **b)** $-1*(2x^8-2x^2+x) = -2x^8+2x^2-x$, **c)** $(5x^3-5x+2)(x^3+1) = 5x^6 - 5x^4 + 7x^3 - 5x + 2$.

9. a) $P_c(x) = x^4 + x^3 + x^2 + 4x + 2$, $P_r(x) = -1$, **b)** $P_c(x) = x + 3$, $P_r(x) = -3x - 7$.

11. a) $P(2) = 0$, **b)** $P(-3) = 53$, **c)** $P(0) = -5$, **d)** $P(-1) = 5$.

13. a) $P(x) = x^2 - 1$, **b)** $P(x) = x^2 + 10x$, **c)** $P(x) = x^3 - 6x^2 + 11x - 6$, **d)** $P(x) = x^3 - 5x^2 + 7x - 3$, **e)** $P(x) = x^4 - 8x^3 + 22x^2 - 24x + 9$, **f)** $P(x) = x^4 - 5x^3 + 7x^2 - 3x$, **g)** $P(x) = x^4 - 5x^3 + 13x^2 - 19x + 10$, **h)** $P(x) = x^4 - 6x^3 + 18x^2 - 30x + 25$.

15. a) $x_1 = -1$, $x_2 = -1$, $x_3 = 0$, **b)** $x_1 = 3$, $x_2 = -3$, $x_3 = -2$, **c)** $x_1 = -3$, $x_2 = -1.5$, $x_3 = 1$, **d)** $x_1 = -2$, $x_2 = 2i$, $x_3 = -2i$, **e)** $x_1 = -5$, $x_2 = -2$, $x_3 = 0$, $x_4 = 5$, $x_5 = -5i$, $x_6 = 5i$, **f)** $x_1 = -5$, $x_2 = 5$, $x_3 = 0$, $x_4 = i$, $x_5 = -i$, $x_6 = 2i$, $x_7 = -2i$.

Capítulo 18. Desigualdades

1. a) $x \in (-\infty, -1)$, **b)** $x \in (10, \infty)$, **c)** $x \in [-1, 10)$, **d)** $x \in (-\infty, 5) \cup (10, \infty)$, **e)** $x \in \emptyset$ (no existen valores para x que satisfagan la desigualdad).

3. a) $-1 < x < 2$, **b)** $x < 0$, **c)** $x \leq 0$, **d)** $(x < 5) \vee (6 < x < 7)$, **e)** $(1 < x < 2) \vee (2 < x < 3) \vee (4 < x5)$.

5. a) $x < 3$, **b)** $x > -\frac{3}{2}$, **c)** $x \in (-\infty, -3) \cup (-\frac{1}{2}, \frac{3}{2})$, **d)** $x \in (-2, -1) \cup (\frac{2}{5}, 1)$, **e)** $x \in (-\infty, -0.61803) \cup (0, 1.61803)$.

7. a) $x \in (-1, 0)$, **b)** $x \in (-1, \infty)$, **c)** $x \in (-1, 1) \cup (2, \infty)$, **d)** $x \in (-\infty, -1) \cup (1, 3)$, **e)** $x \in (-1, 0) \cup (1, 3)$.

9. a) $x \in (-3, 3)$, **b)** $x \in (-1, 3)$, **c)** $x \in (-\infty, -\frac{1}{2}] \cup [\frac{3}{2}, \infty)$, **d)** $x \in (-\frac{9}{4}, -\frac{1}{2})$.

Apéndice A. Aprovechando la tecnología

1.

```
>> x = [1 2 3];
>> r = (-10 - sqrt((-10)^2 -4 * 5 .* x))/(2*5)
r =
   -1.8944  -1.7746  -1.6325
```

3.

```
>> x = [0:0.1:10];
>> y = 2 .* x .+ 3;
>> plot(x,y)
>> grid on
```

La gráfica se presenta en la figura H.2.

5.

```
>> x = [0:0.1:2*pi];
>> y = sin(x);
```

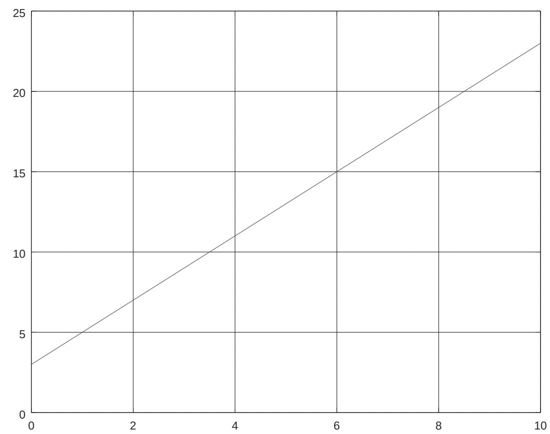


Figura H.2: Gráfica del ejercicio 3.

```
>> plot(x,y)
>> grid on
```

La gráfica se presenta en la figura H.3.

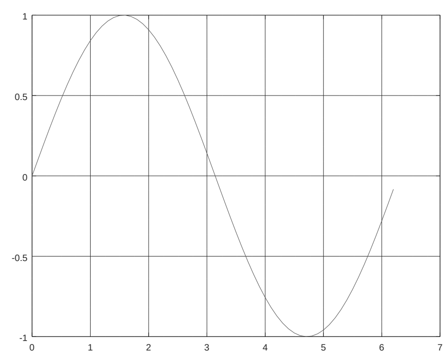


Figura H.3: Gráfica del ejercicio 5.

7.

```
>> x = [2 6 3 2];
>> y = [2 2 5 2];
>> plot(x,y)
>> grid on
>> axis equal
>> lado_1 = sqrt((x(2)-x(1))^2 +(y(2)-y(1))^2)
lado_1 =  4
>> lado_2 = sqrt((x(3)-x(2))^2 +(y(3)-y(2))^2)
lado_2 =  4.2426
>> lado_3 = sqrt((x(4)-x(3))^2 +(y(4)-y(3))^2)
```

```
lado_3 =  3.1623
>> perimetro = lado_1 + lado_2 + lado_3
perimetro =  11.405
```

La gráfica se presenta en la figura H.4.

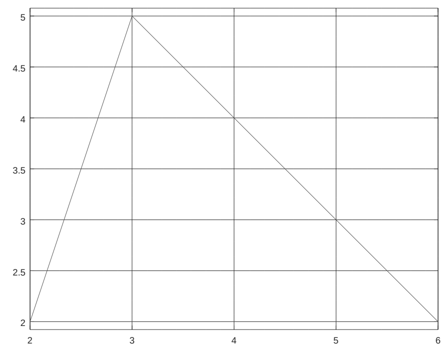


Figura H.4: Gráfica del ejercicio 7.

Índice alfabético

Acarreo, 57
Algoritmo, 55
Altura del triángulo, 88
Apotema, 91
Argumento de un número complejo, 206

Binomio, 109
Binomios conjugados, 110

Cardinalidad, 180
Cardinalidad de la unión de dos conjuntos, 180
Catetos del triángulo, 83
Centímetro, 99
Cero (0), 1
Cilindro, 1, 98
Circuncentro, 151
Circunferencia, 92
Codominio de la función, 193
Coeficiente líder, 295
Combinación lineal de vectores, 376
Comparación de fracciones, 39
Complemento de un conjunto, 181
Conjunción lógica, 173
Conjunto, 177
Conjunto potencia, 190
Conjunto Universo, 178
Conjunto universo, 179, 180
Conjunto vacío, 177
Conjuntos disjuntos, 180
Coordenadas, 77
Cuadrado, 82
Cuantificador existencial, 184
Cuantificador universal, 184
Cuantificadores anidados, 186
Cubo, 96
Círculo, 92

Decena, 18
Decimal, 19
Decímetro, 99
Densidad de probabilidad Gaussiana, 158
Desigualdades, 333
Determinante de una matriz, 274
Diagramas de Venn Euler, 179
Diez, 18
Diferencia, 11
Distancia entre dos puntos, 86, 87
Disyunción lógica, 172
División, 41
Diámetro, 92
Dominio de la función, 193
Dominio de una función, 120
Dígitos, 19

Ecuación, 106
Ecuación de primer grado con una variable, 105
Ecuación explícita de la recta, 118
Ecuación general de una recta, 117
Eje x, 77
Eje y, 77
Elementos del conjunto, 177

Factores de conversión, 101
Factorial, 156
Factorización de un polinomio, 323
Factorización de un polinomio cuadrático, 115
Fase de un número complejo, 206
Forma binomial de un numero complejo, 206
Forma binomial de un número complejo, 204
Forma polar de un número complejo, 205
Forma vectorial de un número complejo, 205
Fracciones equivalentes, 38
Fracciones parciales, 329
Fracción, 31
Fracción impropia, 33
Fracción propia, 33
Fracción simple, 41
Funciones biyectivas, 195

Funciones inyectivas, 194
Funciones sobreyectivas, 194
Función, 119, 121, 193
Función exponencial, 156
Función parcial, 194
Función proposicional, 182
Función signo, 338
Función total, 194
Fórmula general de una ecuación cuadrática, 112

Grado, 94
Grados, 79
Grados sexagesimales, 79
Gramo, 100

Heptágono regular, 91
Hexaedro regular, 96
Hexágono regular, 91
Hipotenusa, 83, 129
Hueco, 2

Identidad, 106
Igualdad, 3, 4
Igualdad de conjuntos, 189
Igualdad de números complejos, 205
Implicación lógica, 173
Infinito, 92, 135
Intersección de conjuntos, 179
Inversa de una matriz cuadrada, 266
Inverso aditivo, 6
inverso aditivo, 9
Inverso multiplicativo, 42

Kilogramo, 100
Kilómetro, 99

Lados del cuadrado, 81
Ley de doble complemento, 191
Ley de doble negación, 175
Leyes asociativas, 175, 191
Leyes conmutativas, 175, 190
Leyes de complementación, 175, 191
Leyes de complemento, 191
Leyes de D'Morgan, 176, 191
Leyes de D'Morgan extendidas, 176
Leyes de dominación, 175, 191
Leyes de idempotencia, 175, 191
Leyes de identidad, 175, 191
Leyes distributivas, 176, 191
literal, 7
Litro, 100
Logaritmo, 159
Logaritmo binario, 160
Logaritmo decimal, 159
Logaritmo natural, 159
Línea recta, 78

Magnitud de un número complejo, 205
Matrices elementales, 267
Matriz, 238, 257
Matriz cuadrada, 259
Matriz identidad, 259
Matriz nula, 259
Matriz Pseudoinversa, 373
Matriz pseudoinversa, 280, 379
Matriz transpuesta, 270
Metro, 99
metros, 81
Microgramo, 100
Microsegundo, 100
Miligramo, 100
Mililitro, 100
Milisegundo, 100
Milímetro, 99
Minuendo, 11
Monomio, 109
Multiplicación, 17
Multiplicar por -1, 25
Método de sumas y restas, 122
Método de sustitución, 122
Múltiplo de un entero, 39

Nanosegundo, 100
Negación lógica, 172
Neutro aditivo, 9
Neutro multiplicativo, 23
Número e, 155
Número complejo conjugado, 215
Número natural, 42
Número primo, 42
Número racional, 31
Números, 1
Números compuestos, 42
Números enteros, 3
Números enteros negativos, 2

Números enteros positivos, 2
Números imaginarios, 202
Números naturales, 2
Números racionales, 31, 52
Números reales, 52

Octágono regular, 91
Operaciones elementales, 234
operación AND, 173
operación OR, 172
Ortoedro, 97

Paralelogramo, 90
Parábola, 296
Pendiente, 118
Pentágono regular, 91
Perímetro, 81
Plano cartesiano, 77
Polinomio, 109
Polinomios, 295
Polígono regular, 91
Porcentaje, 37
Potencia, 26
Predicado, 182
Primos relativos, 42
Prisma rectangular ortogonal, 97
Producto, 17
Producto Cartesiano, 192
Producto de fracciones, 36
Producto punto de dos vectores, 373
Productos notables, 109
Programa Octave, 357
Propiedad asociativa de la suma, 8
Propiedad asociativa del producto, 22
Propiedad conmutativa de la suma, 8
Propiedad conmutativa del producto, 22
Propiedad distributiva, 23, 28
Propiedad distributiva generalizada, 24, 28
Propiedades de la función exponencial, 156
Propiedades de los logaritmos, 160
Proposiciones, 172
Proposición lógica, 171
Punto en el plano, 77

Radio, 92
Radián, 94
Rango de una función, 120
Recta, 78
Recta numérica, 52
Rectas coincidentes, 80
Rectas perpendiculares, 80
Rectas secantes, 80
Rectángulo, 82
rectángulo, 83
Regla de la herradura, 43
Regla de los signos, 26, 45
Regla de tres para variación proporcional directa, 125
Regla de tres para variación proporcional inversa, 126
Regla del paralelogramo, 209
Relaciones Pitagóricas, 138
Relación, 193
Relación mayor que, 7
Relación menor que, 7
Resta, 11–13
Resta como quitar, 11
Resta como suma, 11
Resta de conjuntos, 181
Resta de fracciones, 34
Resta de números complejos, 212

Segmento de recta, 78
Segundo, 100
Sistema de ecuaciones, 122
Sistemas homogéneos, 253, 272
Subconjunto, 188
Subconjunto propio, 190
Suma, 3
Suma como unión de tableros, 3
Suma de fracciones, 34
Suma de matrices, 260
Suma de números complejos, 209
Sumandos, 3
Sustitución de literales, 7
Sustraendo, 11
Símbolo de pertenencia, 177

Tabla de membresía, 191
Teorema de Pitágoras, 84, 130
Teorema del factor, 322
Teorema del residuo, 321
Tonelada, 100
Transformación lineal, 282
Trinomio, 109
Triángulo, 87

Triángulo equilátero, 87
Triángulo escaleno, 87
Triángulo isósceles, 87
Triángulo rectángulo, 83, 129
triángulo rectángulo, 86

Unidad, 23
Unidad imaginaria, 202
Unión de conjuntos, 179

Valor absoluto, 15
Valor lógico Falso, 171
Valor lógico Verdadero, 171
Valor propio, 282
Variable dependiente, 120
Variable en Octave, 361
Variable independiente, 120
Variación proporcional directa, 125
Variación proporcional inversa, 126
Vector, 204
Vector columna, 259
Vector propio, 282
Vector renglón, 258
Vector unitario, 212, 283
Vectores ortogonales, 377
Volumen del cubo, 96
Vértice de una parábola, 307
Vértices, 81

Ángulo, 78, 93
Ángulo agudo, 79
Ángulo de inclinación, 131
Ángulo de inclinación de una recta, 80
Ángulo de un número complejo, 206
Ángulo llano, 80
Ángulo negativo, 79
Ángulo obtuso, 80
Ángulo positivo, 78
Ángulo recto, 80, 129
Área del cuadrado, 81
Área del cubo, 96

Matemáticas básicas: de lo intuitivo y concreto a lo abstracto.
Segunda edición. Distribución electrónica.